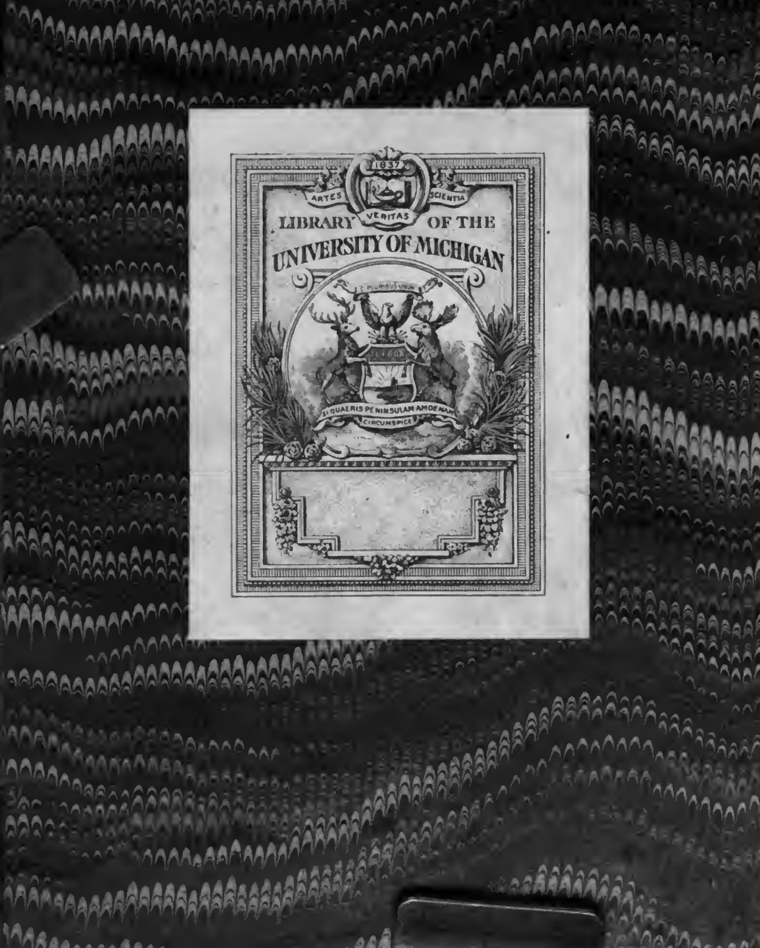
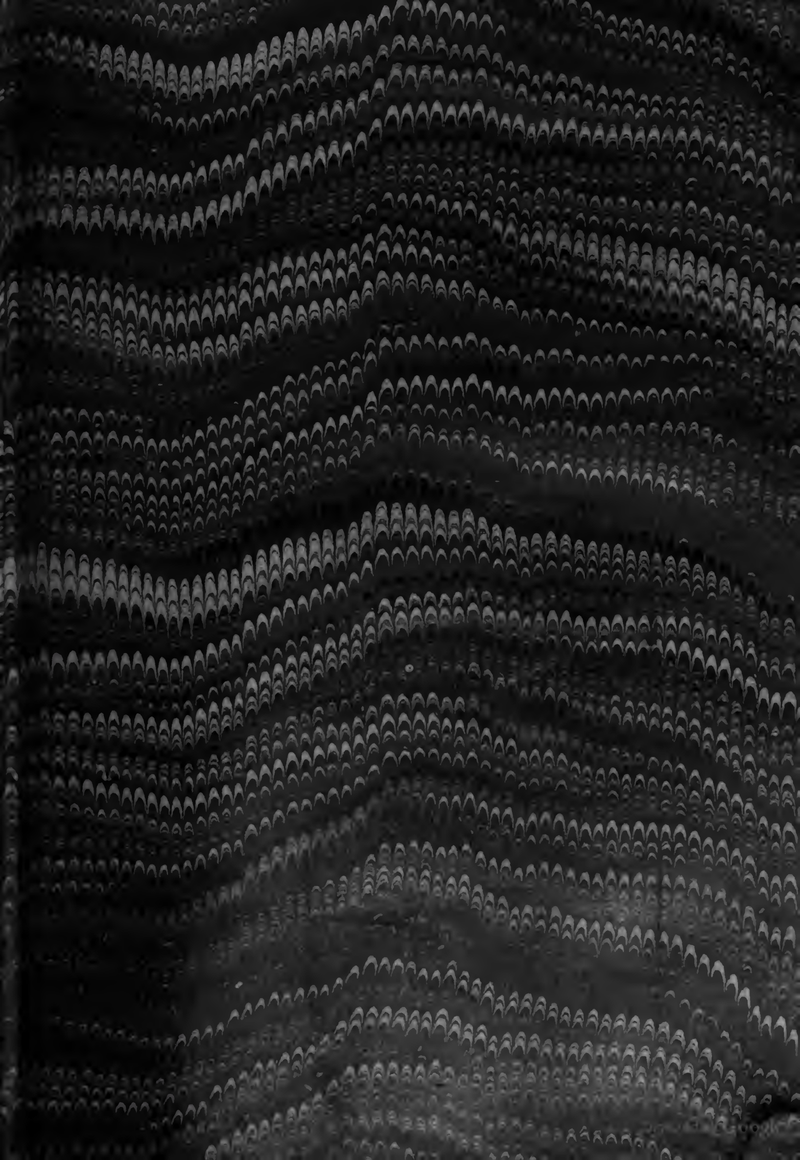
B 492235

Digitized by Google


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

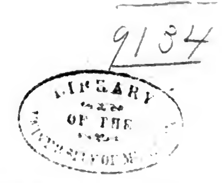


133

MATHEMATICS
QA
303
.D562
1862

Digitized by Google

Digitized by Google


9134
LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF M...

Die

Differential- und Integralrechnung,

umfassend

und

mit steter Berücksichtigung der Anwendung dargestellt

von

Dr. J. Dienger,

Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe.

Erster Band.

Mit 52 in den Text eingedruckten Figuren.

Zweite, umgearbeitete Auflage.

Stuttgart.

Verlag der J. B. Metzler'schen Buchhandlung.

1862.

Digitized by Google

Digitized by Google

Vorwort zur ersten Auflage.

Mit Ausnahme der Integration der partiellen Differentialgleichungen und der Variationsrechnung enthält das Werk, das ich der Oeffentlichkeit hiemit übergebe, eine vollständige Darstellung der Differential- und Integralrechnung, auf wissenschaftlichen Grundlagen aufgebaut und nach dem heutigen Stande der Wissenschaft durchgeführt.

Dabei glaube ich in Bezug auf Ausführlichkeit genug gethan zu haben, da wohl wenige Sätze, die von wissenschaftlichem Werthe sind, ausgeschlossen wurden, wobei natürlich mein Augenmerk vorzugsweise darauf gerichtet war, Alles in ein organisches Ganze zu vereinigen, so dass nicht eine Sammlung einzelner Sätze und Methoden zum Vorschein käme. — Eben so bin ich immer darauf bedacht gewesen, durch Beispiele der verschiedensten Art die allgemeinen Sätze zu erläutern; die Beispiele selbst sind entweder rein analytische, oder sie sind aus der Geometrie, Mechanik, mathematischen Physik und Astronomie gewählt. Namentlich habe ich mehrfach die Wärmeprobleme aufgeführt, wie denn auch in §. 75 die allgemeinen Differentialgleichungen der Wärmebewegung aufgestellt sind.

Die noch fehlenden Theile, namentlich die Integration der partiellen Differentialgleichungen, hoffe ich in nicht ferner Zeit nachfolgen lassen zu können.

Die Druckeinrichtung ist so getroffen worden, dass die allgemeinen Lehren mit grösserer Schrift, Aufgaben und Erläuterungen dagegen mit kleinerer gedruckt sind. — Die Verlagshandlung hat auch ihrerseits Alles gethan, um das Buch äusserlich würdig auszustatten.

Digitized by Google

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die im Herbste 1857 ausgegebene erste Auflage der Differential- und Integralrechnung wurde wesentlich umgearbeitet, so dass die vorliegende zweite Auflage, wenigstens ihrer grössern Hälfte und der Anordnung des Stoffes nach, als ein neues Buch erklärt werden kann. Ich habe diess für meine Vorträge an der hiesigen polytechnischen Schule für nothwendig gehalten, und hoffe auch Denjenigen, welche das Buch zum weitern Studium benützen wollen, dadurch einen Dienst erwiesen zu haben. Auf eine Rechtfertigung der getroffenen Anordnung kann ich mich hier nicht einlassen: sie muss ohnehin im Buche selbst enthalten seyn. Ich glaube, dass wenn das Buch in seiner frühern Gestalt einigen Nutzen zu bringen im Stande war, diess in grösserem Maasse bei der neuen der Fall seyn kann.

Die neue Auflage erscheint in zwei Bänden, da für einen Band das Buch wohl zu umfangreich geworden wäre. Die äussere Ausstattung hat durch die fortwährende Sorgfalt des Verlegers gewonnen, und es mögen die vielfach eingestreuten Ueberschriften ebenfalls zur bequemern Benützung und Uebersichtlichkeit des Buches beitragen.

Die elf ersten Abschnitte (erstes Buch), wie sie im nachfolgenden Inhalts-Verzeichnisse aufgeführt sind, mit Ausschluss der durch ein * bezeichneten §§., bilden im Allgemeinen den Umfang des in der zweiten mathematischen Klasse der hiesigen polytechnischen Schule zu behandelnden Theils der Differential- und Integralrechnung.

Digitized by Google

Inhalts-Verzeichniss.

Erster Abschnitt.

Einleitung. Sätze aus der niedern Analysis. Gränzwerthe.

Zweiter Abschnitt.

Differentialquotient für Funktionen einer einzigen unabhängig Veränderlichen.

Digitized by Google

Dritter Abschnitt.

Differentialquotienten höherer Ordnung. Bedeutung gewisser Differentialquotienten. Vertauschung der unabhängig Veränderlichen.

Vierter Abschnitt.

Untersuchung der scheinbar unbestimmten Formen.

Fünfter Abschnitt.

Von den grössten und den kleinsten Werthen für Funktionen einer unabhängig Veränderlichen.

Digitized by Google

Sechster Abschnitt.

Das unbestimmte Integral.

Siebenter Abschnitt.

Das bestimmte Integral.

Digitized by Google

Achter Abschnitt.

Anwendung der bestimmten Integrale auf Berechnung von Flächen- und Körper-Inhalten, so wie von Bogenlängen.

Seite

Neunter Abschnitt.

Die Theoreme von Taylor und Maclaurin, nebst deren Anwendungen.

Zehnter Abschnitt.

Die Sätze von Bürmann und Lagrange.

Digitized by Google

Elfter Abschnitt.

Näherungsweise Berechnung eines bestimmten Integrals.

Zwölfter Abschnitt.

Differentialquotienten für Funktionen mehrerer unabhängig Veränderlichen. Vertauschung dieser letztern. Analytische Anwendungen.

Dreizehnter Abschnitt.

Vielfache Integrale. Anwendungen.

Digitized by Google

Vierzehnter Abschnitt.

Weitere Untersuchungen über bestimmte Integrale.

Lässt man die mit einem * bezeichneten §§. auch vorerst weg, so erhält man immerhin einen ziemlich vollständigen Lehrgang der Differential- und Integralrechnung.

Digitized by Google

Erstes Buch.

Differentialrechnung für Funktionen einer unabhängig Veränderlichen. Integration solcher Funktionen. Bestimmte einfache Integrale und Anwendungen derselben.

Digitized by Google

Digitized by Google

Erster Abschnitt.

Einleitung. Sätze aus der niedern Analysis. Gränzwerthe.

§. 1.

Anführung der Hauptsätze der Potenzenlehre.

Die elementare Algebra betrachtet eine Reihe analytischer Formen, deren Eigenschaften sie genauer untersucht und die Anwendung derselben erläutert. Es wird hier, zu Eingang eines Werkes, das die Fortbildung dieser Lehren sich zur Aufgabe gestellt, nicht unpassend seyn, die wichtigsten Sätze, welche in der Algebra aufgestellt werden, kurz anzuführen.

I. Unter der Grösse a^n, wenn n eine positive ganze Zahl ist, versteht man ein Produkt von n Faktoren, deren jeder gleich a ist. Ist m ebenfalls eine positive ganze Zahl, so ist immer

$$a^n a^m = a^{n+m}, \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad (a^n)^m = a^{nm}, \qquad (1)$$

wobei jedoch im zweiten Satze $n > m$ gedacht ist. Für $n < m$ wäre

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}}, \qquad (1')$$

während für $n = m$ der Werth des Quotienten gleich 1 ist.

II. Ist wieder n eine positive ganze Zahl, so gilt als Erklärung der Grösse a^{-n} die Gleichung

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \qquad (2)$$

mittelst der erwiesen wird, dass die Sätze (1) gelten, auch wenn m und n positive oder negative ganze Zahlen sind. Dazu gehört dann noch die Gleichung

$$a^0 = 1, \qquad (3)$$

die für jedes beliebige a gilt.

III. Das Zeichen $\sqrt[n]{a}$, wo n eine positive ganze Zahl ist, bedeutet die n^{te} Wurzel von a, und verlangt, man solle eine Zahl suchen, die n mal als Faktor gesetzt ein Produkt $= a$ gibt. Dabei ist jedoch a im Allgemeinen als positive Zahl gedacht, und man wählt auch nur die positiven Werthe der Wurzel. Man hat dann:

Digitized by Google

$$(\sqrt[n]{a})^n = a,\ \sqrt[n]{a^n} = a,\ \sqrt[n]{a^{mn}} = a^m;\ \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab},\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};$$

$$\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[mn]{a^{rm}},\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}. \qquad (4)$$

IV. Das Zeichen $a^{\pm\frac{m}{n}}$, in dem n und m positive ganze Zahlen sind, wird erklärt durch die Gleichungen:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}. \qquad (5)$$

Hieraus nun wird gezeigt, dass die Sätze (1) gelten, auch wenn m und n beliebige gebrochene Zahlen sind, so dass sie für alle möglichen Exponenten richtig sind. Dabei ist jedoch in der Regel a als positiv anzusehen. *

V. Unter dem Zeichen *log* a verstehen wir den Exponenten zur Zahl 10 als Grundzahl, so dass als Werth der Potenz a erscheint. Wir setzen also, wenn

$$log\,a = \alpha : 10^\alpha = a. \qquad (6)$$

Unter dem Zeichen *log* a (*Gr* b) verstehen wir ebenfalls einen Exponenten, jedoch für b als Grundzahl, wobei der Werth der Potenz wieder a ist. Also

$$\text{wenn } log\,a\ (Gr\,b) = \alpha, \text{ so ist } b^\alpha = a. \qquad (7)$$

Welches nun auch die Grundzahl sey, so gelten immer folgende Sätze:

$$log\,(AB) = log\,A + log\,B,\ log\,\frac{A}{B} = log\,A - log\,B,\ log\,A^n = n\,log\,A, \qquad (8)$$

wo also nicht bloss die Grundzahl 10 gemeint seyn muss.

Ist die Grundzahl eine positive Zahl, so kann man die Logarithmen negativer Zahlen nicht ausdrücken. Denn ist $-a$ eine negative Zahl, b die positive Grundzahl, so müsste, wenn für diese Grundzahl wäre

$$log\,(-a) = \alpha, \text{ auch } b^\alpha = -a \text{ seyn.}$$

Ist aber α positiv, so ist es b^α auch, kann also nicht $= -a$ seyn; ist α negativ, so ist b^α immerhin noch positiv nach II. und III., und man ist wieder in derselben Lage. Daraus ergibt sich, dass *log* ($-$ a) weder positiv, noch negativ seyn kann, d. h. nicht angebbar ist.

Ist die Grundzahl b grösser als 1 (und wir werden keine andern Logarithmen betrachten), so wird b^α wachsen mit positivem wachsendem α; dagegen abnehmen, wenn das negative α anwächst, wie sich aus $b^{-\alpha} = \frac{1}{b^\alpha}$ sofort ergibt. Wächst hier α über alle Gränzen hinaus, oder wird unend-

* Wäre etwa $a = -1$, und $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ in (5), so würde auf $(-1)^{\frac{1}{2}}$ nicht sofort der vierte Satz (4) anzuwenden seyn, also nicht etwa $\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$ zu setzen seyn. Man vergleiche hierüber §. 4.

Digitized by Google

lich (∞), so nimmt $b^{-\alpha}$ unbegränzt ab, und wird immer näher an 0 kommen. In diesem Sinne ist es zu verstehen, wenn man schreibt: $b^{-\infty} = 0$. Es kommt diese Gleichung auch darauf hinaus, zu setzen

$$log\, 0 = -\infty. \qquad (8')$$

Dass für $a > 1$: $log\, a > 0$, für $a < 1$ aber $log\, a < 0$, ergibt sich aus (8) unmittelbar. Doch gelten die letztern Sätze nur, wenn die Grundzahl > 1.

Kennt man den Logarithmus der Zahl a für die Grundzahl b, so kann man daraus leicht den Logarithmus derselben Zahl a für die andere Grundzahl c finden. Ist nämlich der erste Logarithmus $= \alpha$, der zweite x, so muss

$$b^{\alpha} = a, \quad c^{x} = a,$$

also

$$b^{\alpha} = c^{x}, \quad \alpha = x\, log\, c, \quad x = \frac{\alpha}{log\, c} \qquad (8')$$

seyn, wo durch *log* die Logarithmen für die Grundzahl b angedeutet werden.

Arithmetische und geometrische Reihen.

VI. Eine Zahlenreihe, in der das folgende Glied immer um dieselbe Zahl d grösser ist das vorhergehende, bildet eine arithmetische Reihe. Ist a ihr erstes Glied, d der (genannte) Unterschied, so ist ihr n^tes Glied gleich $a + (n-1)d$. Die Summe der n ersten Glieder, wenn z das n^te Glied, sei s, so ist

$$s = \frac{(a+z)n}{2}, \quad z = a + (n-1)d. \qquad (9)$$

VII. Ist in der Zahlenreihe das folgende Glied aus dem vorhergehenden dadurch gebildet, dass man das letztere durch die sich immer gleich bleibende Zahl q multiplizirte, so heisst diese Reihe eine geometrische, deren Gestalt also ist

$$a, \; aq, \; aq^2, \; aq^3, \; aq^4, \ldots\ldots\ldots$$

Das n^te Glied derselben ist aq^{n-1}, und wenn s die Summe der n ersten Glieder, z das n^te Glied, so hat man

$$s = \frac{zq - a}{q - 1}, \quad z = aq^{n-1}. \qquad (10)$$

§. 2.

Begriff einer Funktion.

Jede Grösse, deren Werth abhängt vom Werthe einer andern Grösse, nennen wir eine Funktion dieser andern Grösse. So ist also a^2 eine Funktion von a, da a^2 sich ändert mit a, also von dem Werthe von a abhängt. Eben so sind $\sqrt[3]{a}$, $log\, a$, 2^a Funktionen von a. Hängt die Funktion bloss von einer andern Grösse, so heisst sie eine Funktion einer; hängt sie von mehreren ab, eine Funktion mehrerer Grössen. So ist die Grösse s in (10) eine Funktion der drei Grössen a, q, z; a^n ist eine Funktion der zwei Grössen a, n u. s. w.

Da die Grössen, von denen andere abhängen, beliebige Werthe haben,

Digitized by Google

sich also beliebig ändern können, so heisst man sie willkürlich veränderliche Grössen, oder auch unabhängig Veränderliche, während die Funktionen selbst, da sie sich auch mit den erstern Grössen ändern, abhängig Veränderliche genannt werden. In $log\, a$ ist also a die unabhängig Veränderliche, da a willkürliche Werthe haben kann; $log\, a$ aber ist die abhängig Veränderliche, die sich zwar ändert, aber nur mit a, und nicht beliebig.

Die in §. 1 aufgeführten Grössen sind Beispiele für verschiedene Funktionen.

Gewöhnlich bezeichnet man die unabhängig Veränderliche, wenn wir bei dem Falle einer einzigen stehen bleiben, durch x, so dass also x^4, $log\, x$, $\sqrt[3]{x}$, u. s. w. Funktionen von x sind. Doch ist begreiflich diese Bezeichnung eine willkürliche, und, wenn passend, wird sie auch geändert werden können. Wir werden später nochmals auf das hier Gesagte zurückkommen und weiter Nöthiges alsdann zufügen (§. 10, I).

§. 3.

Die trigonometrischen Funktionen.

I. Die elementare Trigonometrie betrachtet vier Funktionen eines Winkels x, nämlich $sin\, x$, $cos\, x$, $tg\, x$, $cotg\, x$ und erweist eine Reihe Eigenschaften derselben. Für jenen Zweig der Elemente ist dabei x immer durch Grade, Minuten, Sekunden u. s. w. ausgedrückt.

Auch die Analysis bedarf dieser Funktionen, nur muss sie für die Winkel ein anderes Maass aufstellen. Dazu wählt sie den zwischen den Seiten des Winkels mit einem Halbmesser 1 beschriebenen Kreisbogen, wobei die Spitze des Winkels Mittelpunkt ist. Wenn wir also künftig von einem Winkel x sprechen, so verstehen wir unter x diesen Bogen und nicht Grade u. s. w. Berechnet man die Länge des fraglichen Bogens, so erhält man immer eine reine Zahl; so etwa für einen Winkel von 60^0 ist jener Bogen, als der sechste Theil des Kreisumfangs, gleich $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}=1{\cdot}0471975$, so dass wir einfach vom Sinus von $\frac{\pi}{3}$ (d. h. 1·047 ...) sprechen werden, und darunter dasselbe verstehen, was die Trigonometrie unter $sin\, 60^0$ versteht.

Für uns ist also in $sin\, x$, $cos\, x$, $tg\, x$, $cotg\, x$ die (unabhängig veränderliche) Grösse x immer eine reine Zahl. Wir können mithin von $sin\, 5$ sprechen, meinen aber damit natürlich nicht $sin\, 5^0$, sondern den Sinus eines Winkels, dessen analytisches Maass $=5$ ist, d. h. also, der so beschaffen ist, dass ein mit einem Halbmesser $=1$ zwischen seinen Seiten beschriebener Kreisbogen die Länge 5 hat.

Von den hieher gehörigen Formeln wiederholen wir nur die folgenden:

$$sin(-x)=-sin\, x,\quad cos(-x)=cos\, x,\quad tg(-x)=-tg\, x,\quad cotg(-x)=-cotg\, x;$$
$$2 sin^2 \tfrac{1}{2}x=1-cos\, x,\quad 2cos^2\tfrac{1}{2}x=1+cos\, x,\quad sin\, 2x=2 sin\, x\, cos\, x,$$
$$cos\, 2x=cos^2 x-sin^2 x=1-2sin^2 x=2cos^2 x-1.$$

Digitized by Google

Verwandlung beider Maasse in einander.

II. Ist α ein in gewöhnlichem (trigonometrischem) Maasse ausgedrückter Winkel, so erhält man das analytische Maass x desselben aus der Gleichung

wenn α in Graden gegeben ist: $\frac{\alpha}{360}=\frac{x}{2\pi}$, $x=\frac{2\pi}{360}\alpha$,

„ α „ Minuten „ „ $\frac{\alpha}{360.60}=\frac{x}{2\pi}$, $x=\frac{2\pi}{360.60}\alpha$,

„ α „ Sekunden „ „ $\frac{\alpha}{360.60.60}=\frac{x}{2\pi}$, $x=\frac{2\pi}{360.60.60}\alpha$.

Also ist das analytische Maass eines Winkels von $172^0 25' 13''$ gleich $\frac{2\pi}{360.60.60}\times 620713 = 3{\cdot}0093$, so dass *sin* $172^0 25' 13''$ und *sin* $3{\cdot}0093$ dasselbe bedeuten.

III. Ist x das analytische Maass eines Winkels, so ergibt sich das trigonometrische Maass α desselben in Sekunden aus der Gleichung

$$\frac{x}{2\pi}=\frac{\alpha}{360.60.60},\quad \alpha=\frac{360.60.60}{2\pi}x,\quad \log\frac{360.60.60}{2\pi}=5{\cdot}3144251.$$

Den Logarithmentafeln ist gewöhnlich eine Tafel angehängt, welche die Verwandlung der beiderseitigen Maasse in einander erleichtert. *

Als ein Zahlenbeispiel mag die Berechnung von *sin* $2{\cdot}75$ hier angeführt werden. Ist α das trigonometrische Maass, so ist

$$\alpha=\frac{360.60.60}{2\pi}2{\cdot}75 \text{ Sekunden} = 157^0 33' 48{\cdot}2''.$$

Dann *log sin* $157^0 33' 48{\cdot}2 = 9{\cdot}5816779-10$, wozu als Zahl gehört $0{\cdot}3816611$, so dass endlich *sin* $2{\cdot}75 = 0{\cdot}3816611$.

Goniometrische Funktionen.

IV. Kennt man von einer Zahl x den Sinus, oder den Cosinus u. s. w., und wird diese Zahl selbst gesucht, so nennt man dieselbe arcus (Bogen) und die Bezeichnung soll so gewählt werden, dass wenn

---

* Also ist $\frac{\pi}{2}$ das analytische Maass von 90^0, π von 180^0, $\frac{3\pi}{2}$ von 270^0, 2π von 360^0, so dass etwa:

$$\sin\frac{\pi}{2}=+1,\quad \sin\pi=0,\quad \sin\frac{3\pi}{2}=-1,\quad \sin 2\pi=0;$$

$$\sin(-\frac{\pi}{2})=-1,\ \sin(-\pi)=0,\ \sin(-\frac{3\pi}{2})=+1,\ \sin(-2\pi)=0;$$

$$\sin(m\pi+x)=(-1)^m\sin x,\quad \sin(2m\pi+x)=\sin x.$$

$$\cos\frac{\pi}{2}=0,\quad \cos\pi=-1,\quad \cos\frac{3\pi}{2}=0,\quad \cos 2\pi=+1;$$

$$\cos(-\frac{\pi}{2})=0,\ \cos(-\pi)=-1,\ \cos(-\frac{3\pi}{2})=0,\ \cos(-2\pi)=1;$$

$$\cos(m\pi+x)=(-1)^m\cos x,\quad \cos(2m\pi+x)=\cos x.$$

$$tg\frac{\pi}{2}=\infty,\ tg\pi=0,\ tg\frac{3}{2}\pi=-\infty,\ tg 2\pi=0;\ tg(m\pi+x)=tg x.$$

$$cotg\frac{\pi}{2}=0,\ cotg\pi=-\infty,\ cotg\frac{3}{2}\pi=0,\ cotg 2\pi=\infty;\ cotg(m\pi+x)=cotg x.$$

Hierin ist m eine ganze Zahl.

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l} \sin x = a : x = arc\,(\sin = \alpha), \\ \cos x = \alpha : x = arc\,(\cos = a), \\ tg\, x \;= a : x = arc\;(tg = \alpha), \\ cotg\, x = \alpha : x = arc\,(cotg = \alpha) \end{array}\right\} \qquad (11)$$

was gelesen wird: „arcus, dessen Sinus gleich α“ u. s. w. und wo also $arc\,(tg = \alpha)$ denjenigen Bogen zum Halbmesser 1 (d. h. diejenige Zahl) bezeichnet, dessen Tangente gleich α ist.

Da es nun bekanntlich unendlich viele Winkel gibt, deren Sinus $= \alpha$ (vergl. etwa des Verfassers Handbuch der Trigonometrie, I. Abth. §. 19), so wäre das Zeichen $arc\,(sin = \alpha)$ und eben so die andern in (11) vieldeutig, wenn wir nicht Einschränkungen setzen. Diese bestehen nun in folgenden Erklärungen:

1) Das Zeichen $arc\,(sin = \alpha)$ soll eine zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegende Zahl bedeuten, deren Sinus den Werth α hat. Diese Zahl ist zwischen 0 und $+\frac{\pi}{2}$, wenn α positiv; dagegen zwischen 0 und $-\frac{\pi}{2}$, wenn α negativ ist. α selbst muss zwischen -1 und $+1$ liegen. Aus I. folgt, dass

$$arc\,(sin = -\alpha) = -arc\,(sin = \alpha),$$

da Bögen, die gleich aber von verschiedenen Zeichen sind, Sinus besitzen, die sich eben so verhalten.

2) Das Zeichen $arc\,(cos = \alpha)$ bedeutet eine zwischen 0 und π liegende Zahl, deren Cosinus den Werth α hat. Sie liegt zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, wenn $\alpha > 0$; zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π, wenn $\alpha < 0$.

3) Das Zeichen $arc\,(tg = \alpha)$ bedeutet eine zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegende Zahl, deren Tangente den Werth α hat. Sie liegt zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, wenn $\alpha > 0$; zwischen 0 und $-\frac{\pi}{2}$, wenn $\alpha < 0$. α selbst liegt zwischen $-\infty$ und $+\infty$. Wie in 1) ist

$$arc\,(tg = -\alpha) = -arc\,(tg = \alpha).$$

4) Das Zeichen $arc\,(cotg = \alpha)$ bedeutet eine zwischen 0 und π liegende Zahl, deren Cotangente den Werth α hat. Sie liegt zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, wenn $\alpha > 0$; zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π, wenn $\alpha < 0$.

V. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass (unter diesen Einschränkungen) immer:

$$arc\,(cos = \alpha) = \frac{\pi}{2} - arc\,(sin = \alpha); \quad arc\,(cotg = \alpha) = \frac{\pi}{2} - arc\,(tg = \alpha). \qquad (12)$$

Um die erste dieser Gleichungen zu erweisen, wollen wir die beiden möglichen Fälle untersuchen.

1) Sey $\alpha > 0$, also $arc\,(cos = \alpha) < \frac{\pi}{2}$, $arc\,(sin = \alpha) < \frac{\pi}{2}$, während diese beiden Grössen positiv sind. Ist nun

$$arc\,(sin = \alpha) = \beta, \quad arc\,(cos = \alpha) = \gamma, \quad \text{d. h. } \alpha = \sin\beta, \quad \alpha = \cos\gamma,$$

Digitized by Google

so ist auch $\sin\beta = \cos\gamma$, so dass β und γ zwei positive Winkel sind, beide kleiner als $\frac{\pi}{2}$ (d. h. 90^0), so beschaffen, dass der Sinus des einen dem Cosinus des andern gleich ist. Dazu gehört aber bekanntlich, dass $\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, d. h.

$$arc\,(\sin = \alpha) + arc\,(\cos = \alpha) = \frac{\pi}{2},$$

was die erste Gleichung (12) liefert.

2) Sey $\alpha < 0$, also $arc\,(\cos = \alpha) > \frac{\pi}{2}$, $arc\,(\sin = \alpha) < 0$. Setzen wir $\alpha = -\alpha'$, so ist $\alpha' > 0$, und $arc\,(\cos = \alpha) = arc\,(\cos = -\alpha')$, $arc\,(\sin = \alpha) = arc\,(\sin = -\alpha')$. Bekanntlich aber ist $\cos(\pi - x) = -\cos x$, woraus offenbar folgt, dass $arc\,(\cos = -\alpha') = \pi - arc\,(\cos = \alpha')$, eine Gleichung, deren Richtigkeit sofort erkannt wird, wenn man sie nur in Worte fasst. Eben so ist $arc\,(\sin = -\alpha') = -arc\,(\sin = \alpha')$, so dass

$$arc\,(\cos = \alpha) + arc\,(\sin = \alpha) = arc\,(\cos = -\alpha') + arc\,(\sin = -\alpha') = \pi - arc\,(\cos = \alpha')$$
$$- arc\,(\sin = \alpha') = \pi - [arc\,(\cos = \alpha') + arc\,(\sin = \alpha')].$$

Da aber $\alpha' > 0$, so ist nach 1) $arc\,(\cos = \alpha') + arc \sin(= \alpha') = \frac{\pi}{2}$, so dass endlich

$$arc\,(\sin = \alpha) + arc\,(\cos = \alpha) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

wie vorhin.

Die zweite Gleichung (12) wird ganz eben so bewiesen. Desshalb sind die Zeichen $arc\,(\cos = \alpha)$, $arc\,(cotg = \alpha)$ überflüssig und wir werden davon später auch nur höchst selten Gebrauch machen. Weitere Sätze in Bezug auf die hier erörterten Grössen werden wir da erweisen, wo wir etwa von ihnen Gebrauch machen. (Vergl. §. 32, IV.)

§. 4.

Imaginäre Zahlen. Potenzen von $\cos x + i \sin x$.

I. Die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl kann positiv oder negativ genommen werden; will man aber die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl ausziehen, so ist dieselbe in positiven oder negativen Zahlen nicht angebbar. So kann $\sqrt{-4}$ weder $+2$, noch -2 seyn, da $(+2)^2 = +4$, $(-2)^2 = +4$ und nicht -4 ist. Immerhin aber lässt sich die Grösse $\sqrt{-4}$ erklären als eine Zahl, deren Quadrat -4 ist. Solche Zahlen, wie $\sqrt{-4}$ nennen wir imaginäre Zahlen, und verstehen darunter zunächst also nur die Quadratwurzeln aus negativen Zahlen.

Hiernach ist also $(\sqrt{-a})^2 = -a$. Da aber auch $(\sqrt{-1})^2 = -1$, $(\sqrt{a}\sqrt{-1})^2 = a(-1) = -a$, so kann man setzen

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1}.$$

Da $\sqrt{a}$, als die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl, immer angebbar ist, so erscheint also $\sqrt{-a}$ als das Produkt der angebbaren Zahl $\sqrt{a}$ in die imaginäre Zahl $\sqrt{-1}$. Diese letztere bezeichnen wir künftig immer durch i und setzen also:

$$\sqrt{-a} = i\sqrt{a}. \qquad (13)$$

Digitized by Google

Aus der Erklärung für i folgt sofort:

$$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = +1,\ i^5 = i,\ i^6 = -1 \text{ u. s. w.}$$

Positive und negative Zahlen heissen nun, im Gegensatze zu den imaginären, reelle Zahlen. Sind a und b reelle Zahlen (also positiv oder negativ, aber angebbar), so heisst endlich $a + bi$ ein gemischt imaginärer Ausdruck, oder eine gemischt imaginäre Zahl. Für $a = 0$ ist sie rein imaginär, für $b = 0$ aber reell. Demnach ist $a + bi$ die allgemeine Form der reellen und imaginären Zahlen.

II. Sind a, b, A, B reelle Zahlen, und es ist

$$a + bi = A + Bi, \tag{14}$$

so ist nothwendig

$$a = A,\ b = B. \tag{14'}$$

Dieser Satz, von dem man häufig Gebrauch macht, lässt sich in folgender Weise erkennen. Aus (14) folgt

$$a - A = (B - b)i,$$

so dass, wenn man beiderseitig die Quadrate nimmt, und beachtet, dass $i^2 = -1$:

$$(a - A)^2 = -(B - b)^2,\ (a - A)^2 + (B - b)^2 = 0.$$

$a - A$, $B - b$ sind aber reelle Zahlen, ihre Quadrate folglich positiv; soll nun die Summe dieser positiven Zahlen Null seyn, so ist diess nur möglich, wenn beide Null sind. Demnach ist

$$(a - A)^2 = 0,\ (B - b)^2 = 0, \text{ d. h. } a - A = 0,\ B - b = 0,$$

was die (14') sind. — Uebrigens würde sich aus (14) ergeben $i = \frac{a - A}{B - b}$, wenn die (14') nicht stattfänden, was nicht zulässig ist, da die imaginäre Zahl i der reellen $\frac{a - A}{B - b}$ nicht gleich seyn kann.

Trigonometrische Form.

III. Setzt man, wenn a und b reell sind:

$$a = r \cos\alpha,\ b = r \sin\alpha, \tag{15}$$

so erhält man, durch Quadrirung und Addition:

$$a^2 + b^2 = r^2,\ \cos\alpha = \frac{a}{r},\ \sin\alpha = \frac{b}{r}.$$

Wählt man r bloss positiv, so folgt also aus (15):

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \cos\alpha = \frac{a}{r},\ \sin\alpha = \frac{b}{r}, \tag{15'}$$

wodurch r und α genau bestimmt sind. Alsdann ist

$$a + bi = r(\cos\alpha + i \sin\alpha), \tag{16}$$

welche Form wir die trigonometrische nennen wollen. Aus (16) folgt

$$(a + bi)^n = r^n (\cos\alpha + i \sin\alpha)^n,$$

welche Grösse bekannt ist, wenn man $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$ kennt.

Durch unmittelbare Multiplikation ergibt sich:

Digitized by Google

$$(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + i\cos\alpha_1\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2$$
$$= \cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2 + i(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2),$$

d. h. nach einem elementaren Satze:

$$(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) = \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2). \qquad (16)$$

Daraus ergibt sich sofort

$$(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)(\cos\alpha_3 + i\sin\alpha_3) = [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2)] \times$$
$$(\cos\alpha_3 + i\sin\alpha_3) = \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3),$$

und allgemein:

$$(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)\ldots(\cos\alpha_n + i\sin\alpha_n) = \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$$
$$+ i\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n). \qquad (17$$

Setzt man hier $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \alpha$, so wird die erste Seite zu $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$, so dass

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha. * \qquad (18)$$

Dieser Satz ist jedoch nur für ein positives ganzes n erwiesen.

§. 5.

Der binomische Satz.

I. Man findet durch unmittelbare Multiplikation leicht, dass folgende Gleichungen richtig sind:

$$(1+z)^2 = 1 + \frac{2}{1}z + \frac{2.1}{1.2}z^2,$$
$$(1+z)^3 = 1 + \frac{3}{1}z + \frac{3.2}{1.2}z^2 + \frac{3.2.1}{1.2.3}z^3,$$
$$(1+z)^4 = 1 + \frac{4}{1}z + \frac{4.3}{1.2}z^2 + \frac{4.3.2}{1.2.3}z^3 + \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}z^4.$$

In diesen Formeln ist auf der zweiten Seite ein Gesetz bereits so klar ausgesprochen, dass wir vermuthen, es werde auch

$$(1+z)^5 = 1 + \frac{5}{1}z + \frac{5.4}{1.2}z^2 + \frac{5.4.3}{1.2.3}z^3 + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}z^4 + \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}z^5$$

seyn. Um diess zu beweisen, wollen wir den Werth von $(1+z)^4$ mit $1+z$ multipliziren, wodurch wir jedenfalls $(1+z)^5$ erhalten müssen. Diese Multiplikation gibt:

$$1 + \frac{4}{1}z + \frac{4.3}{1.2}z^2 + \frac{4.3.2}{1.2.3}z^3 + \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}z^4$$
$$+ 1z + \frac{4}{1}z^2 \quad + \frac{4.3}{1.2}z^3 \quad + \frac{4.3.2}{1.2.3}z^4 \quad + \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}z^5.$$

Nun ist

$$\frac{4}{1} + 1 = \frac{4}{1} + \frac{1}{1} = \frac{5}{1}; \quad \frac{4.3}{1.2} + \frac{4}{1} = \frac{4.3}{1.2} + \frac{4.2}{1.2} = \frac{4(3+2)}{1.2} = \frac{4.5}{1.2} = \frac{5.4}{1.2};$$

---

* Dieser Satz folgt auch sofort aus (16). Für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ist nämlich $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$. Also $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^2(\cos\alpha + i\sin\alpha) = (\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Setzt man nun in (16) $\alpha_1 = 2\alpha$, $\alpha_2 = \alpha$, so ist $(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha$, so dass $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha$. Wie man hier weiter gehen kann, ist klar.

Digitized by Google

$$\frac{4.3.2}{1.2.3}+\frac{4.3}{1.2}=\frac{4.3.2}{1.2.3}+\frac{4.3.3}{1.2.3}=\frac{4.3(2+3)}{1.2.3}=\frac{4.3.5}{1.2.3}=\frac{5.4.3}{1.2.3};$$
$$\frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}+\frac{4.3.2}{1.2.3}=\frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}+\frac{4.3.2.4}{1.2.3.4}=\frac{4.3.2(1+4)}{1.2.3.4}=\frac{4.3.2.5}{1.2.3.4}=\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4};$$
$$\frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}=\frac{4.3.2.1.5}{1.2.3.4.5}=\frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5},$$
so dass wirklich der obige Werth von $(1+z)^5$ erscheint.

Bildet man durch Multiplikation mit $1+z$ daraus $(1+z)^6$, so ergibt sich ganz eben so:

$$(1+z)^6=1+\frac{6}{1}z+\frac{6.5}{1.2}z^2+\frac{6.5.4}{1.2.3}z^3+\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}z^4+\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}z^5+\frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6}z^6.$$

Ist man dabei auf die Bildungsweise aufmerksam, so ergibt sich sofort, dass allgemein:

$$(1+z)^n=1+\frac{n}{1}z+\frac{n(n-1)}{1.2}z^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}z^3+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots 1}{1.2\ldots n}z^n, \quad (19)$$

welcher Satz hiemit für ein positives ganzes n erwiesen ist, und wobei die Abkürzungen aus dem Vorhergehenden verständlich sind. *

II. Die Zahlen

$$1, \frac{n}{1}, \frac{n(n-1)}{1.2}, \ldots\ldots\ldots, \frac{n(n-1)\ldots 1}{1.2\ldots n}, \quad (20)$$

welche in (19) erscheinen, heissen die Binomialkoeffizienten für die Potenz n. Sie besitzen die Eigenschaft, dass die Reihe (20) rückwärts und vorwärts gelesen genau dieselbe ist.

So ist ersichtlich $\frac{n(n-1)\ldots 1}{1.2\ldots n}=1$, da Zähler und Nenner genau dieselben Faktoren haben; also sind die erste und letzte der Zahlen (20) gleich.

Die benachbarten sind

$$\frac{n}{1} \text{ und } \frac{n(n-1)\ldots 2}{1.2\ldots(n-1)}.$$

---

* Will man einen Beweis nach den Regeln, so verfährt man in folgender Weise. Angenommen, es sey der Satz (19) erwiesen für $n=2, 3, 4, \ldots, r$, so dass also

$$(1+z)^r=1+\frac{r}{1}z+\frac{r(r-1)}{1.2}z^2+\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}z^3+\ldots\ldots+\frac{r(r-1)\ldots 1}{1.2\ldots r}z^r.$$

Multiplizirt man beiderseitig mit $1+z$, so wird die erste Seite zu $(1+z)^{r+1}$, während die zweite, wenn man in der frühern Weise ordnet, wegen

$$\frac{r}{1}+1=\frac{r+1}{1}, \quad \frac{r(r-1)}{1.2}+\frac{r}{1}=\frac{(r+1)r}{1.2}, \quad \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}+\frac{r(r-1)}{1.2}=\frac{(r+1)r(r-1)}{1.2.3} \text{ u. s. w.}$$

gibt $1+\frac{r+1}{1}z+\frac{(r+1)r}{1.2}z^2+\ldots\ldots+\frac{(r+1)r\ldots 1}{1.2\ldots(r+1)}z^{r+1}$, so dass also auch

$$(1+z)^{r+1}=1+\frac{r+1}{1}z+\frac{(r+1)r}{1.2}z^2+\frac{(r+1)r(r-1)}{1.2.3}z^3+\ldots\ldots+\frac{(r+1)r\ldots 1}{1.2\ldots(r+1)}z^{r+1}.$$

Da diese Gleichung aus (19) folgt, wenn man für n setzt $r+1$, so ist hiernach die Gleichung (19) auch als richtig befunden für $n=r+1$, wenn sie nur für $n=r$ richtig war. Für $n=3$ kann man sie aber durch unmittelbare Multiplikation als richtig erkennen; somit ist sie nothwendig auch richtig für $n=4$. — Da sie also für $n=4$ richtig ist, so ist sie es, nach derselben Schlussweise, auch für $n=5$, u. s. w., für alle ganzen positiven n.

Digitized by Google

Der Zähler des letzten Bruches enthält alle ganzen Zahlen von 2 bis n, der Nenner die ganzen Zahlen von 1 bis $n-1$; lässt man also die Faktoren $2, 3, \ldots, n-1$, welche im Zähler und Nenner vorkommen, weg, so bleibt $\frac{n}{1}$, d. h. die zweite Zahl in (20). Eben so ist.

$$\frac{n(n-1)}{1.2}=\frac{n(n-1)\ldots 3}{1.2\ldots(n-2)},\quad \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}=\frac{n(n-1)\ldots 4}{1.2\ldots(n-3)} \text{ u. s. w.}$$

III. Setzt man in (19) $z=\frac{B}{A}$, so erhält man

$$(1+\frac{B}{A})^n=1+\frac{n}{1}\frac{B}{A}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{B^2}{A^2}+\ldots.+\frac{n(n-1)\ldots 1}{1.2\ldots n}\frac{B^n}{A^n}.$$

Multiplizirt man diese Gleichung beiderseitig mit A^n und beachtet, dass $A^n(1+\frac{B}{A})^n=[A(1+\frac{B}{A})]^n=(A+B)^n$, so ergibt sich

$$(A+B)^n=A^n+\frac{n}{1}A^{n-1}B+\frac{n(n-1)}{1.2}A^{n-2}B^2+\ldots..+\frac{n(n-1)..1}{1.2\ldots n}B^n. \quad (21)$$

Formeln für $\cos n\alpha$, $\sin n\alpha$.

IV. Wir wollen in (21) setzen $A=\cos\alpha$, $B=i\sin\alpha$, so ist $B^2=-\sin^2\alpha$, $B^3=-i\sin^3\alpha$, $B^4=\sin^4\alpha$, u. s. w., so dass

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos^n\alpha+i\frac{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-\frac{n(n-1)}{1.2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha-i\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\times$$
$$\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha+\ldots.,$$

d. h. wenn man den Satz (18) in §. 4 beachtet:

$$\cos n\alpha+i\sin n\alpha=\cos^n\alpha-\frac{n(n-1)}{1.2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha-\ldots$$
$$+i\left[\frac{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha+\ldots..\right],$$

worin die einzelnen Reihen nach dem in den ersten Gliedern ausgesprochenen Gesetze* fortgeführt werden, bis sie von selbst abbrechen, was immer geschehen wird, da die Faktoren abnehmen, also Null erreichen müssen.

Gemäss dem Satze (14) des §. 4 folgt hieraus sofort:

$$\left.\begin{aligned}\cos n\alpha&=\cos^n\alpha-\frac{n(n-1)}{1.2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha-\ldots,\\ \sin n\alpha&=\frac{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha+\ldots\ldots\end{aligned}\right\}(22)$$

Für $n=2, 3, 4$ ergibt sich hieraus:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\quad \cos 3\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha,\quad \cos 4\alpha=\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha,$$
$$\sin 2\alpha=2\cos\alpha\sin\alpha,\quad \sin 3\alpha=3\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha,\quad \sin 4\alpha=4\cos^3\alpha\sin\alpha-4\cos\alpha\sin^3\alpha.$$

§. 6.

Gränzwerthe.

I. Wir wollen in dem Bruche $\frac{1}{2+\alpha}$ die (positive oder negative) Zahl α als veränderlich betrachten und ihr Werthe beilegen, die nahe an Null liegen;

* Die Reihen schreiten mit wechselnden Zeichen fort, und ist immer ein Glied der binomischen Formel (21) übersprungen.

Digitized by Google

alsdann ist der Werth des Bruches nahe an $\frac{1}{2}$ und man kann α immer nahe genug an Null nehmen, damit der Bruch $\frac{1}{2+\alpha}$ von $\frac{1}{2}$ um weniger als die beliebig klein gewählte Grösse β verschieden sey.

Ist nämlich $\alpha > 0$, so ist $\frac{1}{2+\alpha} < \frac{1}{2}$; soll aber der Unterschied kleiner als die (positive) kleine Zahl β seyn, so muss

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2+\alpha} < \beta, \text{ d. h. } \frac{2+\alpha-2}{2(2+\alpha)} < \beta, \text{ d. h. } \frac{\alpha}{4+2\alpha} < \beta$$

seyn. Wählt man (das positive) α nun so, dass $\frac{\alpha}{4} < \beta$, so ist gewisss auch $\frac{\alpha}{4+2\alpha} < \beta$, und es genügt somit, $\alpha < 4\beta$ zu nehmen. Ist $\alpha < 0$, so setze man $\alpha = -\alpha'$ und hat $\alpha' > 0$; alsdann ist $\frac{1}{2+\alpha} = \frac{1}{2-\alpha'} > \frac{1}{2}$ (für kleine α'), und es wird also, damit die Differenz unter dem (positiven) kleinen β liege, seyn müssen:

$$\frac{1}{2-\alpha'} - \frac{1}{2} < \beta, \quad \frac{2-(2-\alpha')}{(2-\alpha')2} < \beta, \quad \frac{\alpha'}{4-2\alpha'} < \beta, \quad \alpha' < (4-2\alpha')\beta, \quad \alpha' < 4\beta - 2\alpha'\beta,$$

$$\alpha' + 2\alpha'\beta < 4\beta, \quad \alpha'(1+2\beta) < 4\beta, \quad \alpha' < \frac{4\beta}{1+2\beta}.$$

Sobald also $\alpha' < \frac{4\beta}{1+2\beta}$ ist $\frac{1}{2+\alpha}$ von $\frac{1}{2}$ um weniger als β verschieden.

Lässt man hiernach in dem Bruche $\frac{1}{2+\alpha}$ die (positive oder negative) Zahl α gegen Null hin gehen, d. h. der Null sich nähern, so geht der Bruch gegen $\frac{1}{2}$, d. h. nähert sich $\frac{1}{2}$.

Die Grösse $\frac{1}{2}$ nun, der $\frac{1}{2+\alpha}$ so nahe kommen kann, als man will, wenn α abnimmt (d. h. gegen Null geht), nennen wir die Gränze oder den Gränzwerth von $\frac{1}{2+\alpha}$ mit abnehmendem (d. h. gegen Null gehendem) α, und bezeichnen dieselbe durch Vorsetzen des Zeichens „*Gr*“, so dass

$$Gr \frac{1}{2+\alpha} = \frac{1}{2}.$$

Eben so ist, wenn α in derselben Lage sich befindet:

$$Gr \frac{1}{(x+\alpha)^2} = \frac{1}{x^2}, \quad Gr\, x^\alpha = 1, \quad Gr\, log \frac{x+\alpha}{x} = 0, \text{ u. s. w.}$$

Um etwa den letzten dieser Sätze förmlich zu erweisen, hätte man nur zu zeigen, dass $log \frac{x+\alpha}{x}$, wenn α sich Null nähert, der Grösse $log\, 1\ (=0)$ sich nähert. Damit aber

$$log \frac{x+\alpha}{x} - log\, 1 < \beta, \text{ muss } log \frac{x+\alpha}{1 \,.\, x} < \beta, \quad \frac{x+\alpha}{x} < 10^\beta, \quad \alpha + x < x \,.\, 10^\beta, \quad \alpha < x[10^\beta - 1]$$

seyn, wo wir α positiv gedacht haben, u. s. w. *

* Es bedarf jedoch dieser weitläufigen Untersuchung nicht. Weiss man, dass wenn α nahe an Null ist, für kleine Aenderungen von α auch $log \frac{x+\alpha}{x}$ sich nur wenig ändert, so erhält

Digitized by Google

Es kann sich auch ereignen, dass die sich ändernde Grösse mehr und mehr anwächst, oder, wie man alsdann sagt, unendlich gross wird. Auch in diesem Sinne lässt sich von einer Gränze sprechen, und man sollte allerdings ein etwas verändertes Zeichen brauchen. Da wir in der Regel nicht in diese Lage kommen werden, so wollen wir davon absehen und nur besonders daran erinnern, wenn der Fall eintritt. Für unendlich wachsende (positive oder negative) α wäre also

$$Gr\frac{1}{\alpha}=0,\ Gr\frac{\alpha+x}{\alpha}=1,\ Gr\frac{3\alpha+5x}{2\alpha}=\frac{3}{2}\ \text{u. s. w.}$$

Wir haben die Grösse α gegen 0 oder gegen ∞ gehen lassen. Diess ist jedoch begreiflicher Weise nicht unerlässlich, indem wir überhaupt unter dem Gränzwerth einer von α abhängigen Grösse A den Werth verstehen, dem dieselbe sich nähert, wenn α einer bestimmten Zahl a sich nähert. Diese Zahl ist freilich meistens 0, wenigstens werden wir in unsern Anwendungen diesen Fall als den gewöhnlichen vor uns haben.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich sofort die Bedingung, unter der man von dem Gränzwerthe einer Grösse sprechen kann. Sie heisst:

Ist A abhängig von der Zahl α, und man kann eine Zahl B angeben, von der A beliebig wenig verschieden ist, wenn α wenig von a verschieden ist, so heisst B der Gränzwerth, dem A sich nähert, wenn α gegen a geht (wobei α immer grösser als a, oder immer kleiner seyn kann). Für $a=0$ wird man also sagen:

B ist der Gränzwerth von A, wenn die Differenz $B-A$ für kleine (positive oder negative) α beliebig klein werden kann (kleiner werden kann, als eine noch so kleine Zahl). So ist 0 der Gränzwerth von $\sin\alpha$ (bei abnehmendem α), da sich geometrisch sofort ergibt, dass $\sin\alpha$ für kleine (positive oder negative) α der Null beliebig nahe gebracht werden kann. Eben so ist 1 der Gränzwerth von $\cos\alpha$. *

Summe der unendlichen geometrischen Reihe.

II. Man hat (§. 1)

$$a+aq+aq^2+\ldots\ldots+aq^{n-1}=\frac{aq^{n-1}q-a}{q-1}=\frac{a(q^n-1)}{q-1}. \qquad (23)$$

---

man $Gr\,log\frac{x+\alpha}{x}$ aus $log\frac{x+\alpha}{\alpha}$, wenn man kurzweg $\alpha=0$ setzt. Denn für Werthe von α, die sehr wenig von Null verschieden sind, ist $log\frac{x+\alpha}{x}$ sehr wenig von dem Werthe von $log\frac{x+0}{x}$, d. h. von $log\,1=0$ verschieden, und kann also der Unterschied beliebig klein werden. Jene Kenntniss werden wir aber im Folgenden erlangen.

* Wollte man eben so sagen, ∞ sey der Gränzwerth von $\frac{1}{\alpha}$, so hat diess desshalb keinen Sinn, weil ∞ keine bestimmte Zahl ist, was begreiflicher Weise bei den oben als Gränzwerthen bezeichneten Grössen der Fall seyn muss. — Desshalb ist auch eine Division mit 0 nie gestattet. — Wir machen hier darauf aufmerksam, weil mit dem Zeichen ∞, d. h. der Division mit 0, zuweilen Unfug getrieben wird.

Digitized by Google

Lassen wir hier die (ganze) Zahl n grösser werden, so vermehrt sich mit ihr die Anzahl der Glieder der geometrischen Reihe, und deren Summe, die mit von n abhängt, ändert sich natürlich ebenfalls. Denken wir uns nun, n wachse unbegränzt (werde unendlich gross, wie man sich auszudrücken pflegt), so verwandelt sich die Reihe in eine unendliche; geht die Grösse $\frac{a(q^n-1)}{q-1}$ alsdann gegen einen bestimmten, endlichen Werth hin, d. h. nähert sie sich mit unbegränzt wachsendem n einer Gränze, so nennen wir diesen Werth die Summe der unendlichen geometrischen Reihe. Dieser Grösse nähert man sich also desto mehr, je mehr Glieder der Reihe — von Anfang her — man zusammen nimmt. Um diese etwa bestehende Gränze zu finden, müssen wir aber zwei Fälle unterscheiden.

1) $q > 1$. In diesem Falle wird q^n wachsen mit wachsendem n, so dass die Summe immer grösser wird, je grösser n ist. Es kann also jetzt von keiner endlichen Gränze die Rede seyn, vielmehr wäre — wenn man von einer Summe sprechen wollte — dieselbe als ∞ zu bezeichnen. *

2) $q < 1$ aber positiv. Jetzt wird q^n abnehmen mit wachsendem n, und man kann n immer gross genug nehmen, damit q^n von Null so wenig verschieden sey, als man wolle. ** Daraus folgt, dass der Gränzwerth von q^n (mit wachsendem n) Null ist und mithin der von $\frac{a(q^n-1)}{q-1}$ gleich $\frac{-a}{q-1}=\frac{a}{1-q}$. Demnach ist

$$a+aq+aq^2+aq^3+\ldots\ldots\ldots=\frac{a}{1-q},\ q<1 \qquad (24)$$

---

* Es ist leicht zu zeigen, dass die Summe grösser werden kann, als die beliebig grosse Zahl A. Denn damit $\frac{a(q^n-1)}{q-1} > A$, muss $a(q^n-1) > (q-1)A$, $q^n > 1+\frac{A}{a}(q-1)$, $n\,log\,q > log\,[1+\frac{A}{a}(q-1)]$, $n > \frac{log\,[1+\frac{A}{a}(q-1)]}{log\,q}$ seyn, was immer thunlich ist, da n beliebig gross werden kann. a denken wir uns dabei positiv, A natürlich auch, so dass q sowohl als $1+\frac{A}{a}(q-1)$ positiv und grösser als 1, ihre Logarithmen also positiv sind.

** Soll $q^n < \alpha$ seyn, wo α beliebig klein (und positiv), so muss q natürlich ein (positiver) ächter Bruch, d. h. <1 seyn. Sey also $q=\frac{1}{p}$, so ist $p>1$, und zugleich $\alpha=\frac{1}{\beta}$, so ist β sehr gross, wenn α sehr klein seyn soll. Da $q^n=\frac{1}{p^n}$, so muss also $\frac{1}{p^n}<\frac{1}{\beta}$ seyn, wozu gehört, dass $p^n > \beta$ sey. Daraus folgt $n\,log\,p > log\,\beta$, $n>\frac{log\,\beta}{log\,p}$. Wählt man also n derart, so ist $q^n<\alpha$. Es lässt sich aber auch sofort zeigen, dass die Differenz $\frac{a}{1-q}-\frac{a(q^n-1)}{q-1}$ d. h. $\frac{a}{1-q}-\frac{a(1-q^n)}{1-q}$ beliebig klein werden kann. Denn dieselbe ist $\frac{a}{1-q}q^n$ und da q^n so klein werden kann, als man will, so ist auch $\frac{a}{1-q}q^n$ nothwendig in derselben Lage.

Digitized by Google

wo durch die Punkte, denen kein letztes Glied folgt, angedeutet ist, dass die Reihe unbegränzt fortgeführt wird.

Was den Fall $q = 1$, der zwischen beiden liegt, betrifft, so besteht für ihn keine eigentlich geometrische Reihe, da die Glieder alsdann sämmtlich $= a$ sind. Ins Unendliche fortgeführt wird keine endliche Summe erscheinen können.

Wir haben dabei a und q immer nur positiv gedacht. Für ein negatives a wechseln alle Glieder bloss das Zeichen und ebenso auch die Summe; die (24) besteht also immerhin. Für ein negatives $q = -q'$ kann man die Reihe in zwei zerlegen:

$$a + aq'^2 + aq'^4 + \ldots - (aq' + aq'^3 + aq'^5 + \ldots).$$

Aus (23), welche Formel unbedingt gilt, folgt sofort, dass für $q' > 1$ keine endliche Summe erscheint. Für $q' < 1$ (aber positiv) erhält man nach (24) da jetzt $a + aq'^2 + aq'^4 + \ldots = \frac{a}{1-q'^2}$, $aq' + aq'^3 + aq'^5 + \ldots = q'(a + aq'^2 + aq'^4 + \ldots) = q'\frac{a}{1-q'^2}$ als Summe:

$$\frac{a}{1-q'^2} - \frac{aq'}{1-q'^2} = \frac{a(1-q')}{1-q'^2} = \frac{a(1-q')}{(1-q')(1+q')} = \frac{a}{1+q'} = \frac{a}{1-q},$$

d. h. wieder die Formel (24), welche also gilt, wenn q zwischen -1 und $+1$ liegt.

Setzt man $a = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ in (24), so ergibt sich:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \ldots\ldots\ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Es lässt sich dieses Ergebniss in folgender Form aussprechen: Nimmt man von einer Länge die Hälfte, vom Rest wieder die Hälfte, von dem jetzt bleibenden Reste abermals die Hälfte, u. s. w., so beträgt die Summe aller so erhaltenen Theile, wenn man unbegränzt viele Male das Verfahren anwendet, die ursprüngliche Länge wieder. — In dieser Form zeigt es sich deutlich, wie man sich der ganzen Länge mehr und mehr nähert, je öfter man das Verfahren anwendet. Nach der n^{ten} Theilung ist der Rest noch $\frac{1}{2^n}$, welche Zahl immer kleiner wird, wenn n wächst.

Inhalt der dreiseitigen Pyramide.

III. Sey G der Inhalt der Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide, H deren Höhe. Man theile letztere in n gleiche Theile und lege durch die Theilungspunkte Ebenen, parallel der Grundfläche. Die Schnitte dieser Ebenen und der Pyramide sind Dreiecke, ähnlich der Grundfläche. Ihre Flächeninhalte seyen, von der Spitze angefangen, $g_1, g_2, \ldots, g_n$, wo also $g_n = G$ seyn wird; die Entfernung je zweier dieser Schnitte ist $\frac{H}{n}$; überdiess ist $g_1 < g_2 < g_3 < \ldots < g_n$. Zwischen den Ebenen, in denen die Dreiecke g_r und g_{r+1} liegen, wollen wir zwei Prismen beschreiben, von denen das eine auf g_r aufstehe und seine drei Seitenkanten parallel einer der Seitenkanten der Pyramide habe, das andere aber auf g_{r+1} aufsteht und seine Kanten parallel mit den vorigen sind. Das erste Prisma fällt nun nothwendig ganz in das Innere der Pyramide, ist also kleiner als das Pyramidenstück zwischen den beiden Ebenen; das andere Prisma ist eben so nothwendig grösser als das fragliche Pyramidenstück.

Digitized by Google

Das erste Prisma wird also füglich ein in die Pyramide eingeschriebenes, das zweite ein derselben umschriebenes genannt werden können. Das eingeschriebene ist kleiner, das umschriebene grösser als das Pyramidenstück.

Dieselbe Konstruktion soll nun zwischen allen Schnitten, die auf einander folgen, vollführt werden, und zu oberst zwischen der Spitze und dem ersten Schnitte ein Prisma umschrieben werden (das eingeschriebene wäre hier Null). Dadurch erhalten wir n umschriebene, und n — 1 eingeschriebene Prismen, von denen dasselbe gesagt werden kann, wie oben. Desshalb ist die Summe der umschriebenen Prismen grösser als die Summe der Pyramidenstücke, d. h. als der Inhalt der Pyramide, die Summe der eingeschriebenen aber kleiner. Nennen wir S die Summe der umschriebenen, s die der eingeschriebenen Prismen, P den Inhalt der Pyramide, so ist also

$$S > P > s, \text{ woraus } S - P < S - s.$$

Geht man von der Grundfläche aus, so ist aber je ein eingeschriebenes Prisma von gleichem Inhalt mit dem nächstfolgenden umgeschriebenen, da sie auf demselben Dreieck stehen und gleiche Höhe haben. Daraus folgt sofort, dass die Differenz $S - s$ gleich ist dem ersten umschriebenen Prisma, das auf der Grundfläche aufsteht und dessen Höhe $\frac{H}{n}$ ist. Lässt man nun n beliebig gross werden, so wird $\frac{H}{n}$ beliebig klein, und eben so der Inhalt dieses Prismas. Daraus folgt, dass man n immer gross genug nehmen kann, damit $S - s$ beliebig klein ausfalle, also von Null so wenig verschieden sey, als man will. Demnach ist der Gränzwerth von $S - s$ gleich 0. Nun ist $S - P$ zwar immer $< S - s$, wird aber nie negativ, da immer $S > P$, woraus folgt, dass mit wachsendem n auch $S - P$ gegen 0 gehen muss, so dass also, wenn *Gr* sich auf ein unendliches Wachsen von n bezieht,

$$Gr\,(S - P) = 0.$$

P, als der Inhalt der Pyramide, hängt von n nicht ab, ändert sich also auch nicht mit dieser Zahl, was nur bei S der Fall ist. Geht also $S - P$, wo P unveränderlich bleibt, gegen 0, so ist diess nur möglich, wenn S gegen P geht. Demnach ist

$$P = Gr\,S.$$

Sucht man also S als Funktion von n, und bestimmt den Gränzwerth dieser Grösse für ein unendlich wachsendes n, so hat man P ermittelt.

Nun ist aber

$$\frac{g_1}{G} = \frac{\left(\frac{H}{n}\right)^2}{H^2},\ \frac{g_2}{G} = \frac{\left(\frac{2H}{n}\right)^2}{H^2},\ \frac{g_3}{G} = \frac{\left(\frac{3H}{n}\right)^2}{H^2}, \ldots\ldots$$

woraus

$$g_1 = \frac{G}{n^2}1^2,\ g_2 = \frac{G}{n^2}2^2,\ g_3 = \frac{G}{n^2}3^2, \ldots\ldots\ .$$

Digitized by Google

Daher

$$S = g_1 \frac{H}{n} + g_2 \frac{H}{n} + \ldots + g_n \frac{H}{n} = \frac{GH}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)^* =$$

$$\frac{GH}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{GH}{6}\,\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \frac{GH}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right).$$

Hier hängt $\frac{GH}{6}$ von n nicht ab; mit unendlich wachsendem n aber geht $2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}$ gegen 2, da $\frac{3}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ gegen Null gehen (wie bereits oben gezeigt); demnach

$$Gr\,S = \frac{GH}{6}2 = \frac{GH}{3},\ \text{d. h. } P = \frac{GH}{3},$$

die bekannte Formel der Stereometrie.

Inhalt einer Kugelzone.

IV. Wir wollen in einer Halbkugel zwei Ebenen parallel der Grundfläche der Halbkugel (grösster Kreis) gelegt denken, deren Abstand h sey. Die Halbmesser der beiden Schnitte seyen r und ϱ, wo $r > \varrho$; ferner R der Halbmesser der Kugel, a der Abstand des ersten Schnitts (vom Halbmesser r) vom Mittelpunkt der Kugel. Man soll den Inhalt der Kugelzone zwischen beiden Schnitten ermitteln.

Ist x der Abstand irgend eines Schnitts vom Kugelmittelpunkt, y der Halbmesser desselben, so hat man immer $y^2 = R^2 - x^2$.

Wie in III. theilen wir nun h in n gleiche Theile und legen durch die Theilpunkte Ebenen parallel der Grundfläche. Die Schnitte derselben sind Kreise, und da die Abstände vom Mittelpunkte sind:

$$a,\ a+\frac{h}{n},\ a+\frac{2h}{n},\ \ldots\ldots,\ a+\frac{nh}{n},$$

---

* Um die Summe $1^2+2^2\ldots+n^2$ zu finden, setze man in der Formel $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$: $a = 1, 2, 3, \ldots, n$ während b immer 1 bleibe, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = (1-1)^3 = 1^3 - 3.1^2 + 3.1 - 1, \\ 1^3 = (2-1)^3 = 2^3 - 3.2^2 + 3.2 - 1, \\ 2^3 = (3-1)^3 = 3^3 - 3.3^2 + 3.3 - 1, \\ \vdots \\ (n-1)^3 = (n-1)^3 = n^3 - 3.n^2 + 3.n - 1, \end{array}\right\}$$

woraus durch Addition, mit Berücksichtigung der Gleichung $1+2+3+..+n = \frac{n(n+1)}{2}$ folgt:

$$1^3+2^3+..+(n-1)^3 = 1^3+2^3+\ldots+n^3 - 3(1^2+2^2+\ldots+n^2) + \frac{3n(n+1)}{2} - n,$$

d. h. wenn man $1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3$ beiderseitig weglässt:

$$0 = n^3 - 3(1^2+2^2+\ldots+n^2) + \frac{3n(n+1)}{2} - n,$$

$$3(1^2+2^2+\ldots+n^2) = n^3 - n + \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2},$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Natürlich dann auch $1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.

Digitized by Google

so sind die Quadrate der Halbmesser dieser Schnitte:

$$R^2-a^2,\ R^2-\left(a+\frac{h}{n}\right)^2,\ \ldots\ldots,\ R^2-\left(a+\frac{nh}{n}\right)^2.$$

Man errichte nun über jedem Schnitte zwei Zylinder, die an den nächsten Schnitten enden, und zwar den einen nach unten, den andern nach oben (mit Ausnahme des Schnitts vom Halbmesser r, wo bloss nach oben, und des Schnitts vom Halbmesser ϱ, wo bloss nach unten hin konstruirt wird.) Genau wie in III. ergibt sich, dass wenn S die Summe aller umschriebenen Zylinder ist, P der Inhalt der Kugelzone, s die Summe aller eingeschriebenen Zylinder: man habe:

$$S>P>s,\ S-P<S-s;\ Gr(S-s)=0,\ Gr(S-P)=0;\ P=Gr S.$$

Was S anbelangt, so ist, da die Höhe jedes Zylinders gleich $\frac{h}{n}$ ist:

$$S=(R^2-a^2)\pi\frac{h}{n}+\left[R^2-\left(a+\frac{h}{n}\right)^2\right]\pi\frac{h}{n}+\left[R^2-\left(a+\frac{2h}{n}\right)^2\right]\pi\frac{h}{n}+\ldots$$

$$\ldots+\left[R^2-\left(a+\frac{n-1}{n}h\right)^2\right]\pi\frac{h}{n}$$

$$=\frac{\pi h}{n}\Big[R^2-a^2+R^2-\left(a^2+\frac{2ah}{n}+\frac{h^2}{n^2}\right)+R^2-\left(a^2+2a\frac{2h}{n}+\frac{2^2h^2}{n^2}\right)+\ldots$$

$$\ldots+R^2-\left(a^2+2a\frac{n-1}{n}h+\frac{(n-1)^2}{n^2}h^2\right)\Big]$$

$$=\frac{\pi h}{n}\left[nR^2-na^2-\frac{2a}{n}h(1+2+3+\ldots\ldots+n-1)-\frac{h^2}{n^2}(1^2+2^2+\ldots+\overline{n-1}^2)\right]$$

$$=\pi h(R^2-a^2)-\frac{2a\pi h^2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}-\frac{\pi h^3}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$=\pi h(R^2-a^2)-a\pi h^2\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{\pi h^3}{6}\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right).$$

Daraus aber folgt

$$Gr\,S=\pi h(R^2-a^2)-a\pi h^2-\frac{\pi h^3}{3}=P.$$

Nun ist $r^2=R^2-a^2$, $\varrho^2=R^2-(a+h)^2$, woraus $3r^2+3\varrho^2+h^2=6R^2-$ $-6a^2-6ah-2h^2$, so dass auch

$$P=(3r^2+3\varrho^2+h^2)\frac{\pi h}{6},$$

welche Formel den gesuchten Inhalt gibt.

Für eine Kugelhaube ist $\varrho=0$, also ihr Inhalt $=\frac{\pi h}{6}(3r^2+h^2)$; für die Halbkugel ist $\varrho=0$, $r=R$, $h=R$, also der Inhalt $=\frac{\pi R}{6}(3R^2+R^2)=\frac{2}{3}\pi R^3$.

§. 7.

Allgemeiner Satz über Gränzwerthe.

I. Wir haben in den letzten Beispielen des §. 6 bereits von einem Satze Gebrauch gemacht, ohne ihn förmlich auszusprechen. Wir fanden nämlich, dass wenn $S>P>s$ und $Gr(S-s)=0$ auch $Gr(S-P)=0$ seyn müsse. Ist aber $Gr(S-s)=0$, so muss nothwendig $Gr\,S=Gr\,s$ seyn, so dass wir nicht nur $P=Gr\,S$, sondern auch $P=Gr\,s$ hätten setzen können. Der fragliche Satz kann in folgender Form ausgesprochen werden:

Digitized by Google

„Seyen P, Q, R drei Grössen, die sämmtlich von α abhängen, und die immer, oder doch für alle Werthe von α, die wenig von einer bestimmten Zahl a verschieden sind, der Bedingung genügen

$$P > Q > R; \qquad (25)$$

ist ferner, wenn α sich a unbegränzt nähert

$$Gr\,P = Gr\,R,^{*} \qquad (25')$$

so ist auch

$$Gr\,Q = Gr\,P = Gr\,R". \qquad (25'')$$

Die (25″) kann, ohne eigentlichen Beweis, sofort als einleuchtend angesehen werden. Da Q nach (25) immer zwischen P und R liegt, die letztern aber nach (25′) sich unbegränzt einander nähern, so muss das zwischen ihnen liegende sich ebenfalls diesen beiden nähern. — Will man einen förmlichen Beweis, so kann er so geführt werden:

Da $Q < P$, so sey $Q = P - \varrho$, wo ϱ positiv ist; da $Q > R$, so sey $Q = R + \varrho'$, wo ϱ' ebenfalls positiv. Demnach $P = Q + \varrho$, $R = Q - \varrho'$, $P - R = \varrho + \varrho'$. Da P und R sich unbegränzt nähern, nach (25′), so muss also $Gr\,(\varrho + \varrho') = 0$ seyn. Da aber ϱ und ϱ' immer positiv sind, so kann ihre Summe nur gegen Null gehen, wenn jede der beiden Grössen in derselben Lage ist, so dass also $Gr\,\varrho = Gr\,\varrho' = 0$. Da nun $Q = P - \varrho$, die Grösse ϱ aber gegen Null geht, so geht Q gegen P, d. h. $Gr\,Q = Gr\,P$; eben so folgt aus $Q = R + \varrho'$ auch $Gr\,Q = Gr\,R$, was dann die (25″) gibt.

Bestimmung des Gränzwerthes von $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$.

II. Lässt man in dem Bruche $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ den Bogen α gegen Null gehen, sieht ihn aber als positiv an, so ist

$$Gr\,\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1. \qquad (26)$$

Um diesen Satz zu beweisen, beachte man, dass für kleine α immer

$$\sin\alpha < \alpha, \quad tg\,\alpha > \alpha,$$

d. h.

$$tg\,\alpha > \alpha > \sin\alpha.$$

Da $tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, so ist also auch $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > \alpha$, $\sin\alpha > \alpha\cos\alpha$, $\frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha$, und da $\sin\alpha < \alpha$, $\frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1$, so ist

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha, \quad \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1 \text{ d. h. } 1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha.$$

---

* Die Bedingung $Gr\,(P - R) = 0$ ist im Allgemeinen wohl dieselbe mit $Gr\,P = Gr\,R$; in besondern Fällen könnte jedoch Anstand erhoben werden. Es kann sich nämlich ereignen, dass P und R unendlich werden, während ihre Differenz gegen Null geht. Es ist diess dann der Fall, wenn diejenigen Glieder, welche P und R unendlich machen, in beiden dieselben sind, sich in $P - R$ also aufheben. Gehen aber P und R gegen endliche Gränzen, so sind die Gleichungen $Gr\,(P - R) = 0$ und $Gr\,P = Gr\,R$ ein und dasselbe. Letzteres war in §. 6 der Fall.

Digitized by Google

In (25) ist also $P = 1$, $Q = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$, $R = \cos\alpha$, und da P unveränderlich, also $Gr\,P = P = 1$, ferner $Gr\,R = Gr\cos\alpha$ bekanntlich $= 1$ (§. 6, I.), so ist $Gr\,P = Gr\,R = 1$, mithin nach (25''):

$$Gr\frac{\sin\alpha}{\alpha} = Gr\,P = Gr\,R = 1,$$

wodurch die (26) erwiesen ist. (Vergleiche mein Handbuch der Trigonometrie, erste Abtheilung §. 15.)

Da $\frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$, so gilt die (26) auch, wenn das negative α gegen 0 geht.

Gränzwerth einer Summe $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$.

III. Seyen die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sämmtlich von der Grösse α abhängig und so beschaffen, dass wenn α sich 0 unbegränzt nähert, auch alle diese Grössen sich 0 nähern, so ist die Summe $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ in derselben Lage, wenn n eine positive ganze Zahl ist.

Denn ist α_g diejenigen der Grössen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ welche den grössten, α_k die, welche den kleinsten Werth hat, so ist ersichtlich

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n < n\,\alpha_g, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > n\,\alpha_k,$$

so dass

$$n\,\alpha_g > \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > n\,\alpha_k.$$

Da aber α_g, α_k, wie alle andern, gegen Null gehen, so sind $n\,\alpha_g$, $n\,\alpha_k$ in derselben Lage. Also ist in (25) $P = n\,\alpha_g$, $R = n\,\alpha_k$ und die (25') erfüllt, wobei $Gr\,P = 0$. Demnach gibt die (25''):

$$Gr\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = 0.$$

Hierbei ist allerdings n als bestimmte, endliche Zahl aufzufassen, und wenn die Dinge sich anders verhalten, ist der Satz nicht als erwiesen zuzulassen.

Gränzwerth der Grösse $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}$.

IV. Seyen die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, der Anzahl nach n, so beschaffen, dass sie sämmtlich gegen Null gehen, wenn die Grösse α, von der sie abhängen, gegen Null geht. Dabei vermehre sich aber ihre Zahl unbegränzt, so dass also n immer grösser wird, wenn α kleiner wird. Alsdann ist

$$Gr\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n} = 0. \tag{27}$$

Denn sey wieder α_g die grösste, α_k die kleinste der Grössen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, so ist, wie in III:

$$n\,\alpha_g > \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > n\,\alpha_k,$$

also auch bei beliebig grossem n:

$$\alpha_g > \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n} > \alpha_k.$$

Da nun α_g, α_k, wie überhaupt alle Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ gegen Null gehen, wenn α gegen Null geht, so folgt aus I. unmittelbar die Richtigkeit unserer Behauptung.

Digitized by Google

In der Regel wird hiebei $\alpha = \frac{k}{n}$ seyn, wo k eine endliche Zahl. Der Satz selbst ist aber von III natürlich verschieden, da jetzt nicht mehr behauptet werden kann, dass $n\,\alpha_z$, $n\,\alpha_k$ gegen Null gehen, indem mit abnehmendem α die Zahl n unbegränzt wächst. (Vergleiche §. 41, I).

Hilfssatz für die folgende Untersuchung.

V. Ist in der Reihe

$$a + \frac{b}{m} + \frac{c}{m^2} + \frac{d}{m^3} + \ldots\ldots, \tag{28}$$

welche endlich oder auch unendlich seyn kann, keiner der Koeffizienten a, b, c, ... unendlich, so kann man immer m gross genug nehmen, dass der Werth von a, ohne Rücksicht auf sein Zeichen, mehr betrage als die Summe aller übrigen Glieder.

Ist k der seinem Werthe nach, also ohne Rücksicht auf sein Vorzeichen, grösste der Koeffizienten b, c, d, ..., so genügt es zu zeigen, dass man haben könne

$$a > \frac{k}{m} + \frac{k}{m^2} + \frac{k}{m^3} + \ldots\ldots, \tag{28'}$$

wo a und k als positiv angesehen werden. Denn unter allen Bedingungen ist

$$\frac{k}{m} + \frac{k}{m^2} + \frac{k}{m^3} + \ldots\ldots > \frac{b}{m} + \frac{c}{m^2} + \frac{d}{m^3} + \ldots\ldots,$$

so dass, wenn (28′) erfüllt ist, gewiss auch

$$a > \frac{b}{m} + \frac{c}{m^2} + \frac{d}{m^3} + \ldots\ldots \tag{28''}$$

Ist aber $m > 1$, was hier offenbar der Fall seyn muss, so heisst die (28′) auch (§. 6):

$$a > \frac{\frac{k}{m}}{1 - \frac{1}{m}},\ \text{d. h. } a > \frac{k}{m-1},\ (m-1)\,a > k,\ m > 1 + \frac{k}{a}.$$

Da immer $m > 1 + \frac{k}{a}$ gewählt werden kann, so ist unsere Behauptung erwiesen.

Ist nun in (28) a positiv, so kann man also das positive m gross genug nehmen, damit die Summe der Reihe positiv und kleiner als 2a sey; ist aber a negativ, so kann man m so wählen, dass die Summe der Reihe negativ sey, aber zwischen 0 und 2a liege.

Da

$$\frac{a}{m^r} + \frac{b}{m^{r+1}} + \frac{c}{m^{r+2}} + \ldots\ldots = \frac{1}{m^r}\left(a + \frac{b}{m} + \frac{c}{m^2} + \ldots\ldots\right),$$

so kann man also auch hier m gross genug wählen, damit die Summe

$$\frac{a}{m^r} + \frac{b}{m^{r+1}} + \frac{c}{m^{r+2}} + \ldots\ldots \tag{29}$$

zwischen 0 und $\frac{2a}{m^r}$ falle, was nach dem Vorstehenden für positive und negative a gilt. — Wir werden für $r = 1$ von diesem Satze Gebrauch machen.

Digitized by Google

§. 8.

Ermittlung des Gränzwerthes von $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$.

I. Wir wollen annehmen, m sey eine positive ganze Zahl, welche unbegränzt wachse und den Werth zu bestimmen suchen, dem sich $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ unter dieser Voraussetzung nähert.

Aus der Formel (19) in §. 5 folgt, wenn man $z=\frac{1}{m}$ setzt, für ein positives ganzes m:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{m}{1}\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{m^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{1}{m^3}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots.1}{1.2\ldots\ldots m}\frac{1}{m^m}$$
$$=1+1+\frac{1}{1.2}\frac{m}{m}\frac{m-1}{m}+\frac{1}{1.2.3}\frac{m}{m}\frac{m-1}{m}\frac{m-2}{m}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots m}\frac{m}{m}\frac{m-1}{m}\ldots\frac{m-(m-1)}{m}$$
$$=2+\frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)+\ldots\ldots$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots m}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{m}\right).$$

Das n^{te} Glied dieser Reihe ist

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right),$$

wo natürlich n höchstens $= m$ ist. Da dieses n^{te} Glied jedenfalls kleiner als $\frac{1}{1.2..n}$ ist, indem das Produkt $\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)$ kleiner als 1, überdiess aber alle Glieder obiger Reihe für $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ positiv sind, so ist jedenfalls

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{1.2\ldots m}.$$

Die Grösse

$$2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots\ldots\ldots,$$

in der man die Zahl der Glieder beliebig (unendlich) gross nimmt, beträgt sicher mehr, als die zweite Seite dieser Ungleichung, die nur einen Theil der eben genannten Reihe enthält. Mithin ist

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots\ldots,$$

wo durch die beigefügten Punkte angedeutet ist, dass die Reihe unbegränzt fortzusetzen ist.

Bricht man diese Reihe mit dem Gliede $\frac{1}{1.2\ldots n}$ ab, wo n beliebig aber ganz, so sind die folgenden Glieder

Digitized by Google

$$\frac{1}{1.2\ldots(n+1)}+\frac{1}{1.2\ldots(n+2)}+\frac{1}{1.2\ldots(n+3)}+\ldots\ldots\ldots *$$
$$=\frac{1}{1.2\ldots(n+1)}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)\,(n+3)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}+\ldots\ldots.\right],$$

Setzen wir statt $n+3,\ n+4,\ \ldots.$ die (kleinere) Zahl $n+2$, so ist die eingeklammerte Grösse, die dann zu

$$1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+2)^3}+\ldots\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}=\frac{n+2}{n+1}\ (\S.\ 6,\ \text{II.})$$

wird, zu gross, so dass sicherlich auch

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots.+\frac{1}{1.2\ldots n}+\frac{1}{1.2\ldots(n+1)}\,\frac{n+2}{n+1} \qquad (30)$$

ist, wobei n willkürlich, also etwa auch $<m$ seyn kann.

Schliesst man die Reihe für $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ mit dem n^{ten} Gliede, wo $n<m$, so ist, da alle Glieder positiv sind:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m>2+\frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)+\ldots.$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots n}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right).$$

Multiplizirt man die Produkte $\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)$, $\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\times\left(1-\frac{3}{m}\right)$ u. s. w. aus, so ist jedes derselben von der Form $1-\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{m^2}+\ldots$, wo α jedenfalls positiv ist. Daraus folgt, dass man obige Beziehung auch schreiben kann:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m>2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2..n}-\frac{a}{m}+\frac{b}{m^2}+\ldots.+\frac{k}{m^{n-1}},$$

wo a, b, ..., k bestimmte endliche Zahlen sind, a aber jedenfalls positiv ist. ** Nach §. 7, V. kann man nun m immer gross genug nehmen, damit die Reihe $-\frac{a}{m}+\frac{b}{m^2}+\ldots$ negativ sey und ihre Summe zwischen 0 und $-\frac{2a}{m}$ liege. Schreibt man also $-\frac{2a}{m}$ für diese Reihe, so hat man zu viel abgezogen, so dass für ein gehörig grosses m:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m>2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots..+\frac{1}{1.2..n}-\frac{2a}{m}. \qquad (30')$$

---

* Durch 1.2...r bezeichnen wir das Produkt aller ganzen Zahlen von 1 bis r (vergl. §. 5).

** Der Werth von a ist $\frac{1}{1.2}+\frac{1+2}{1.2.3}+\frac{1+2+3}{1.2.3.4}+\ldots..+\frac{1+2+\ldots+(n-1)}{1.2\ldots.n}$
$=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{1.2.3}+\ldots..+\frac{1}{2}\,\frac{1}{1.2\ldots(n-2)}=\frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots..+\frac{1}{1.2\ldots.(n-2)}\right).$

Digitized by Google

Da die Beziehung (30) für jedes m gilt, also auch für dasselbe, wie so eben, so hat man also für grosse m die Grösse $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ zwischen zwei Gränzen eingeschlossen, von denen die eine m gar nicht enthält.

Lässt man m immer mehr wachsen, so nimmt $\frac{2a}{m}$ ab, so dass der Gränzwerth von $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ nothwendig zwischen

$$2+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n} \text{ und}$$

$$2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots.+\frac{1}{1.2..n}+\frac{1}{1.2\ldots(n+1)}\frac{n+2}{n+1} \qquad (31)$$

liegen wird. Der Unterschied dieser beiden Grössen ist $\frac{1}{1.2..(n+1)}\frac{n+2}{n+1}$, welche Zahl mit wachsendem n abnimmt. Da nun n nur $<$ m zu seyn braucht, m aber beliebig gross seyn kann, so ist n in derselben Lage, so dass die beiden Grössen (31) (mit wachsendem n) einander beliebig nahe gebracht werden können. Bezeichnet man den Gränzwerth von $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ mit e, so ist also mit ganzem, wachsendem m:

$$\left.\begin{aligned} Gr\left(1+\frac{1}{m}\right)^m &= e, \\ e &> 2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2..n}, \\ e &< 2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots..+\frac{1}{1.2\ldots n}+\frac{1}{1.2..n+1}\frac{n+2}{n+1}, \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

mittelst welcher Beziehungen e beliebig genau berechnet werden kann. Aus (32) folgt, dass wenn man setzt

$$e=2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots..+\frac{1}{1.2\ldots n}, \qquad (33)$$

der begangene Fehler kleiner als $\frac{1}{1.2\ldots(n+1)}\frac{n+2}{n+1}$ ist. So ist für $n=12$, der begangene Fehler kleiner als $\frac{1}{1.2\ldots 13}\frac{14}{13}$ d. h. $< 0{\cdot}000000001$. Entwickelt man also die Brüche in (33) auf 10 Dezimalen, so erhält man den Werth der Zahl mittelst dieser Reihe auf 8 Dezimalen sicher. * So hat man

* Da man bis auf 10 Dezimalen rechnet, so vernachlässigt man nirgends eine Einheit der zehnten Dezimale, also in den 12 Brüchen nicht 12 Einheiten der zehnten Stelle, d. h. nicht 2 Einheiten der neunten Stelle. Da wegen des ganzen Fehlers auch keine Einheit der neunten Stelle fehlt, so beträgt der wirkliche Fehler nicht 3 Einheiten der neunten Stelle. Dieselbe ist thatsächlich 7, darf also nicht 10 seyn, so dass 2 in der achten Dezimale richtig ist.

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
2 &= 2{\cdot}0000000000 \\
\frac{1}{1.2} &= 0{\cdot}5000000000 \\
\frac{1}{1.2.3} &= 0{\cdot}1666666666 \\
\frac{1}{1.2.3.4} &= 0{\cdot}0416666666 \\
\frac{1}{1\ldots5} &= 0{\cdot}0083333333 \\
\frac{1}{1\ldots6} &= 0{\cdot}0013888888 \\
\frac{1}{1\ldots7} &= 0{\cdot}0001984126 \\
\frac{1}{1\ldots8} &= 0{\cdot}0000248015 \\
\frac{1}{1\ldots9} &= 0{\cdot}0000027557 \\
\frac{1}{1\ldots10} &= 0{\cdot}0000002755 \\
\frac{1}{1\ldots11} &= 0{\cdot}0000000250 \\
\frac{1}{1\ldots12} &= 0{\cdot}0000000020 \\
\hline
& \ 2{\cdot}7182818276
\end{aligned}
$$

so dass $e = 2{\cdot}71828182$, auf alle Dezimalen genau.

II. Ist nun m nicht eine ganze Zahl, aber positiv, so sey $m = n + \alpha$, wo α ein positiver ächter Bruch, n eine positive ganze Zahl. Wird m unendlich, so wird es also auch n. Dann ist

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1+\frac{1}{n+\alpha}\right)^{n+\alpha}$$

und da $n + \alpha > n$ aber $< n + 1$, so ist $1 + \frac{1}{n+\alpha} < 1 + \frac{1}{n}$ aber $> 1 + \frac{1}{n+1}$, so dass

$$\left.\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}, \text{ d. h. } \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha, \\
&\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+\alpha}, \\
&\text{d. h. } \left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\alpha-1}.
\end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Was die letztern Grössen betrifft, so werden mit unendlichem n, also auch unendlichem $n + 1$, nach (32) die Grössen $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ beide zu e; die Grösse $\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha$ wird mit unendlichem n zu 1, wie sich sofort aus der Beziehung

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^1 > \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha > 1$$

Digitized by Google

nach §. 7, I. ergibt. Da $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\alpha-1} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{1-\alpha}}$ und der Nenner dieser Grösse für ein unendliches $n+1$ zu 1 wird, wie aus der Beziehung

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^1 > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{1-\alpha} > 1$$

folgt, so wird auch $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\alpha-1}$ zu 1. Demnach werden die zweiten Seiten der Beziehungen (34) einander gleich, jede e. Desshalb folgt nach §. 7, I., dass man aus jenen Formeln, d. h. aus

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\alpha-1}$$

zu folgern habe:

$$Gr\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e,$$

auch wenn m nicht ganz ist. Für einen positiven Werth von m ist also die Gleichung (32) erwiesen.

III. Ist endlich m negativ, gleich $-r$, so ist

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1-\frac{1}{r}\right)^{-r} = \left(\frac{r-1}{r}\right)^{-r} = \left(\frac{r}{r-1}\right)^r = \left(1+\frac{1}{r-1}\right)^r$$
$$= \left(1+\frac{1}{r-1}\right)^{r-1} \left(1+\frac{1}{r-1}\right).$$

Da hier r positiv ist, so wird mit unendlichem m, also auch unendlichem r, die Grösse $\left(1+\frac{1}{r-1}\right)^{r-1}$ nach II. zu e, die $1+\frac{1}{r-1}$ aber zu 1, so dass $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ wieder zu e wird.

Man hat also endgiltig, wie auch immer m gegen einen positiven oder negativen unendlichen Werth gehe:

$$Gr\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e. \tag{35}$$

Setzt man $m = \frac{1}{\alpha}$, so wird α gegen 0 gehen, wenn m unendlich wird, und zwar von der positiven Seite aus, wenn m positiv; von der negativen aus, wenn m negativ ist. Die Gleichung (35) heisst also auch

$$Gr(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e, \tag{35'}$$

wennn α gegen 0 (von der positiven oder negativen Seite aus) geht.

IV. Will man den Werth von

$$Gr(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}$$

erhalten, so setze man $\alpha x = \varepsilon$, $\alpha = \frac{\varepsilon}{x}$, so wird mit unbegränzt abnehmendem α auch ε unbegränzt abnehmen. Alsdann ist

$$Gr(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = Gr(1+\varepsilon)^{\frac{x}{\varepsilon}} = Gr\left((1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right)^x,$$

Digitized by Google

und da, nach dem Obigen $Gr(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e$ für jedes abnehmende ε (ob positiv oder negativ), so wird, da sich x nicht mit ε ändert:

$$Gr\,(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = e^x \tag{36}$$

seyn.

Natürliche Logarithmen.

V. Die Zahl e ist zur Grundzahl der **natürlichen Logarithmen** gemacht worden, die wir durch das Zeichen l bezeichnen wollen. Ist also

$$l(x) = z, \text{ so ist } x = e^z;$$

daraus folgt auch, wenn man die gewöhnlichen Logarithmen durch *log* bezeichnet:

$$\log x = z \log e, \text{ d. h. } z = \frac{\log x}{\log e}, \text{ oder } l(x) = \frac{\log x}{\log e}.$$

Umgekehrt ist auch, wenn $\log x = y : x = a^y$, also $l(x) = y\,l(a)$, d. h.

$$\log x = \frac{l(x)}{l(a)},$$

wenn a die Grundzahl der gewöhnlichen Logarithmen ist.

Die Grösse $\log e$ ist, wenn $a = 10$, gleich 0·4342945, also $\frac{1}{\log e} = 2{\cdot}3025851$, so dass man den gewöhnlichen Logarithmus einer Zahl mit 2·3025851 zu multipliziren hat, um den natürlichen zu erhalten.

Aus $\log x = \frac{l(x)}{l(a)}$, $\log x = l(x) \log e$, folgt übrigens sofort

$$\log e\; l(a) = 1,\; l(a) = \frac{1}{\log e},$$

so dass, wenn $a = 10$:

$$l(10) = 2{\cdot}3025851.$$

Begreiflich ist $l(e) = 1$.

Diess sind die wesentlichen Sätze, welche wir später benützen werden und womit der eigentliche Gegenstand dieses Abschnitts erschöpft wäre. Wir fügen jedoch noch einige Untersuchungen hinzu, die nicht unerlässlich, aber von Interesse sind, und mit dem Vorhergehenden zusammenhängen. Sie können jedoch vorläufig ganz wohl dahingestellt bleiben.

Eine allgemeine Formel zur Bestimmung von Gränzwerthen liefert der vierte Abschnitt.

§. 9.

Gränzwerth von $\left(1 + \frac{a+bi}{m}\right)^m$.

I. In der Gleichung (36) ist x wesentlich reell; für ein imaginäres $x = a + bi$ ist die Untersuchung anders zu führen.

Sey (§. 4) $1 + \frac{a+bi}{m} = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, so ist $r^2 = \left(1+\frac{a}{m}\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\right)^2$ $= 1 + \frac{2a}{m} + \frac{a^2+b^2}{m^2}$, $\cos\varphi = \frac{1+\frac{a}{m}}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{mr}$, so dass für grosse m jedenfalls $\sin\varphi$ klein, und $\varphi > 0$ wenn $b > 0$, $\varphi < 0$ wenn $b < 0$. Dann ist für ein ganzes m (§. 4)

Digitized by Google

$$\left(1+\frac{a+bi}{m}\right)^m=\left(1+\frac{2a}{m}+\frac{a^2+b^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}m}(\cos m\varphi+i\sin m\varphi).$$

Setzt man $a^2+b^2=c^2$, so ist

$$\left(1+\frac{2a}{m}+\frac{c^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}m}=\left(1+\frac{2a}{m}\right)^{\frac{1}{2}m}\left[1+\frac{c^2}{m^2\left(1+\frac{2a}{m}\right)}\right]^{\frac{1}{2}m}.$$

Aber nach §. 5:

$$\left[1+\frac{c^2}{m^2\left(1+\frac{2a}{m}\right)}\right]^m=1+\frac{m}{1}\frac{c^2}{m^2\left(1+\frac{2a}{m}\right)}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{c^4}{m^4\left(1+\frac{2a}{m}\right)^2}+\dots$$

$$=1+\frac{c^2}{m\left(1+\frac{2a}{m}\right)}+\frac{1}{2}\frac{m-1}{m}\cdot\frac{c^4}{m^2\left(1+\frac{2a}{m}\right)^2}+\dots$$

$$=1+\frac{c^2}{m+2a}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{c^4}{(m+2a)^2}+$$

$$+\frac{1}{2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{c^6}{(m+2a)^3}+\dots$$

Für ein grosses m ist immer $m+2a$ positiv und gross, so dass

$$\left[1+\frac{c^2}{m^2\left(1+\frac{2a}{m}\right)}\right]^m>1$$

$$<1+\frac{c^2}{m+2a}+\frac{1}{2}\frac{c^4}{(m+2a)^2}+\frac{1}{2.3}\frac{c^6}{(m+2a)^3}+\dots$$

Ist aber $\frac{m+2a}{c^2}=\mu$, so ist letztere Reihe gleich

$$1+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu^2}+\frac{1}{2.3}\frac{1}{\mu^3}+\dots$$

und also (§. 7, V) ihr Werth kleiner als $1+\frac{2}{\mu}$, wenn μ (d. h. m) sehr gross. Für grosse m ist also

$$1+\frac{2c^2}{m+2a}>\left[1+\frac{c^2}{m^2\left(1+\frac{2a}{m}\right)}\right]^m>1,$$

so dass (§. 7, I)

$$Gr\left[1+\frac{c^2}{m^2\left(1+\frac{2a}{m}\right)}\right]^m=1,\ \text{mithin}\ Gr\left[1+\frac{c^2}{m^2\left(1+\frac{2a}{m}\right)}\right]^{\frac{1}{2}m}=\sqrt{1}=1.$$

Da ferner nach §. 8, IV.: $Gr\left(1+\frac{2a}{m}\right)^{\frac{1}{2}m}=e^a$, so ist

$$Gr\left(1+\frac{2a}{m}+\frac{c^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}m}=e^a.$$

Für ein positives b ist $\varphi>0$ und klein, also

$$tg\,\varphi>\varphi>\sin\varphi,\ \text{d. h.}\ \frac{b}{m+a}>\varphi>\frac{b}{mr},\ \frac{mb}{m+a}>m\varphi>\frac{b}{r}.$$

Für ein unendliches m wird $\frac{mb}{m+a}=\frac{b}{1+\frac{a}{m}}$ zu b, r zu 1, also $\frac{b}{r}$ auch zu b, so dass

$$Gr\,m\varphi=b.$$

Digitized by Google

Für ein negatives b wechselt φ (wie b) sein Zeichen, so dass dieselbe Gleichung besteht. Mithin endlich

$$Gr\left(1+\frac{a+bi}{m}\right)^m = e^a\,(\cos b + i \sin b). \qquad (37)$$

Setzt man, ähnlich wie in (36)

$$Gr\left(1+\frac{a+bi}{m}\right)^m = e^{a+bi},$$

so hat man zur Erklärung des Zeichens:

$$e^{a+bi} = e^a\,(\cos b + i \sin b). \qquad (37')$$

Daraus für $a = o$:

$$e^{bi} = \cos b + i \sin b. \qquad (38)$$

Vieldeutigkeit von $\sqrt[n]{a+bi}$.

II. Seyen r und φ so bestimmt, dass (§. 4, III.)

$$a+bi = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

so ist auch, wenn m eine ganze (positive oder negative) Zahl:

$$a+bi = r[\cos(\varphi+2m\pi) + i \sin(\varphi+2m\pi)],$$

wie aus bekannten trigonometrischen Sätzen sofort folgt. Daraus nun folgt:

$$\sqrt[n]{(a+bi)} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\varphi+2m\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi+2m\pi}{n}\right]. \qquad (39)$$

Um diesen Satz zu beweisen, hat man nur zu zeigen, dass die n^{te} Potenz der zweiten Seite $= a+bi$ ist. Nach §. 4, III. ist diese n^{te} Potenz aber

$$r[\cos(\varphi+2m\pi) + i \sin(\varphi+2m\pi)] = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi) = a+bi,$$

womit der Satz erwiesen ist. *

In (39) ist m beliebig, so dass es scheint, es gebe jene Formel unendlich viele Werthe. Allein setzt man $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, so ist die Zahl aller wirklich verschiedenen Werthe erschöpft. Diess leuchtet zunächst dadurch ein, dass für $m = 0$ und $m = n$ die beiden Winkel sind:

$$\frac{\varphi}{n} \text{ und } \frac{\varphi+2n\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi,$$

sich also um 2π unterscheiden, mithin denselben Cosinus und Sinus haben. Daher

* Setzt man überhaupt $\sqrt[n]{a+bi} = R\,(\cos\psi + i \sin\psi)$, so muss $R^n\,(\cos n\psi + i \sin n\psi)$ $= a+bi = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ seyn. Dazu gehört (§. 4. II.) dass

$$R^n \cos n\psi = r \cos\varphi;\; R^n \sin n\psi = r \sin\varphi.$$

Quadrirt man diese Gleichungen und addirt sie, so ist

$$R^{2n} = r^2,\; R^n = r,\; R = r^{\frac{1}{n}}.$$

Dann

$$\cos n\psi = \cos\varphi,\; \sin n\psi = \sin\varphi,$$

so dass die Winkel $n\psi$ und φ nur um ein Vielfaches von 2π verschieden seyn können. Mithin $n\psi = \varphi + 2m\pi$, $\psi = \frac{\varphi+2m\pi}{n}$ und

$$\sqrt[n]{a+bi} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\varphi+2m\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi+2m\pi}{n}\right].$$

Digitized by Google

gibt (39) denselben Werth, wenn man man $m=0$ oder $m=n$ setzt. — Für $m=1$ und $m=n+1$ hat man eben so die Winkel $\frac{\varphi+2\pi}{n}$ und $\frac{\varphi+2(n+1)\pi}{n}=\frac{\varphi+2\pi}{n}+2\pi$, deren Unterschied wieder 2π beträgt u. s w. Man wird also dieselben Werthe erhalten für die in der folgenden Anordnung vertikal unter einander stehenden Werthe von m:

$$\left.\begin{array}{cccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & \ldots\ldots, & n-1, \\ n, & n+1, & n+2, & n+3, & \ldots\ldots, & 2n-1, \\ 2n, & 2n+1, & 2n+2, & 2n+3, & \ldots\ldots, & 3n-1, \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \end{array}\right\} \quad (40)$$

Es genügt somit, von den positiven Werthen von m nur $0, 1, \ldots, n-1$, der Zahl nach n, zu setzen. Diese liefern aber verschiedene Werthe in (39). Da nämlich in (39) nur dann die Werthe $\sqrt[n]{a+bi}$ gleich sind, wenn die Winkel um 2π verschieden sind, so müssten für zwei Werthe von m, welche der ersten Horizontalreihe (40) entnommen sind, die entsprechenden Werthe von $\frac{\varphi+2m\pi}{n}$ um 2π verschieden seyn. Sind μ, ν zwei solche Werthe ($\nu>\mu$), so müsste also $\frac{\varphi+2\nu\pi}{n}-\frac{\varphi+2\mu\pi}{n}=2\pi$ seyn können, d. h. $\frac{2(\nu-\mu)\pi}{n}=2\pi$, $\nu-\mu=n$, was unmöglich ist, da die höchste Differenz zweier Werthe von m aus der ersten Horizontalreihe in (40) nur $n-1$ ist.

Wollte man in (39) negative (ganze) Werthe von m setzen, so erhielte man keine neuen Werthe von $\sqrt[n]{a+bi}$. Denn setzt man $m=-\varrho$, so ist der zweite Faktor

$$\cos\frac{\varphi-2\varrho\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi-2\varrho\pi}{n}.$$

Da Cosinus und Sinus sich nicht ändern, wenn man dem Winkel Vielfache von 2π zufügt, so ist jener Faktor auch gleich

$$\cos\left[\frac{\varphi-2\varrho\pi}{n}+2p\pi\right]+i\sin\left[\frac{\varphi-2\varrho\pi}{n}+2p\pi\right]$$
$$=\cos\frac{\varphi+2(np-\varrho)\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2(np-\varrho)\pi}{n},$$

wo wir (das beliebige, positive und ganze) p so wählen wollen, dass $np-\varrho$ positiv ist. Demnach gibt (39) denselben Werth für $m=-\varrho$, wie für $m=np-\varrho$. Letzterer ist aber in (40) enthalten, so dass hiernach für negative m keine andern Werthe erscheinen, als die bereits für positive m erhaltenen.

Daraus ergibt sich:

$\sqrt[n]{a+bi}$ hat n von einander verschiedene Werthe, welche aus (39) folgen, wenn man $m=0, 1, 2, \ldots, n-1$ setzt.

III. Als besondern Fall wählen wir $b=0$, $a=1$, wo dann $r=1$, $\varphi=0$, so dass

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2m\pi}{n}+i\sin\frac{2m\pi}{n}. \qquad (41)$$

Für $m=0$ ist diess $=1$; bei ungeradem n wird sonst $\sin\frac{2m\pi}{n}$ nicht mehr 0, alle andern Werthe sind also imaginär. Bei geradem n ist für $m=\frac{n}{2}$ nochmals $\sin\frac{2m\pi}{n}=0$ und dann noch $\sqrt[n]{1}=\cos\pi=-1$. So hat man für

Digitized by Google

$\sqrt[3]{1}$ die drei Werthe: $1, \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}, \cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$;

$\sqrt[4]{1}$ „ vier „ : $1, \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}, \cos\pi+i\sin\pi, \cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$

d. h. $1, \quad i, \quad -1, \quad -i$

u. s. w.

Ist weiter $b=0$, $a=-1$, so ist $r=1$, $\varphi=\pi$, also

$$\sqrt[n]{-1}=\cos\frac{\pi+2m\pi}{n}+i\sin\frac{\pi+2m\pi}{n}. \tag{42}$$

So

$\sqrt[2]{-1}$ gibt die 2 Werthe: $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}, \cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$

d. h. $i, \quad -i$;

$\sqrt[3]{-1}$ „ „ 3 „ $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}, \cos\frac{3\pi}{3}+i\sin\frac{3\pi}{3}, \cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$

d. h. $\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}, \quad -1, \quad \frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}$ u. s. w.

Vieldeutigkeit des natürlichen Logarithmus.

IV. Setzt man

$$l(a+bi)=\alpha+\beta i, \quad a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

so ist

$$a+bi=e^{\alpha+\beta i}=e^{\alpha}(\cos\beta+i\sin\beta) \quad \text{[Formel (38)]}$$

Also (§. 4, II):

$$e^{\alpha}\cos\beta=a=r\cos\varphi, \quad e^{\alpha}\sin\beta=b=r\sin\varphi; \quad e^{2\alpha}=a^2+b^2=r^2, \quad \alpha=\tfrac{1}{2}l(a^2+b^2)$$
$$=\tfrac{1}{2}l(r^2)=l(r), \quad \cos\beta=\cos\varphi, \quad \sin\beta=\sin\varphi; \quad \beta=\varphi+2m\pi,$$

so dass

$$l(a+bi)=\tfrac{1}{2}l(a^2+b^2)+(\varphi+2m\pi)i, \tag{43}$$

wo $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Da m nur eine ganze Zahl zu seyn braucht, so ist $l(a+bi)$ unendlich vieldeutig. Hieraus

$$l(1)=2m\pi i, \quad l(-1)=(\pi+2m\pi)i. \tag{44}$$

Es ist leicht, diese Formeln weiter zu verfolgen, was wir jedoch hier unterlassen, indem wir uns vorbehalten, gelegentlich wieder darauf zurückzukommen.

Einige Sätze über Gränzwerthe mögen noch beigefügt werden.

V. Seyen P, Q, R, . . . Funktionen von α, und es sey für ein unendlich abnehmendes (d. h. gegen Null gehendes) α:

$$Gr\,P=p, \quad Gr\,Q=q, \quad Gr\,R=r, \ldots,$$

ferner seyen a, b, . . . Grössen, die sich nicht mit α ändern, so ist

$$Gr(P+a)=p+a, \quad Gr(bP+a)=bp+a, \quad Gr(aP+bQ+cR+\ldots)=ap+bq$$
$$+cr\ldots, \quad Gr(PQ)=pq, \quad Gr\left(\frac{P}{Q}\right)=\frac{p}{q}, \quad Gr\,l(P)=l(p), \quad Gr\,P^q=p^q, \text{ u. s. w.}$$

Der Beweis dieser Sätze ist ein sehr einfacher. Da $Gr\,P=p$, so folgt daraus, dass wenn α nahe an 0 ist, auch P nahe an p ist, man also setzen kann $P=p+\varrho$, wo ϱ eine Grösse ist, die immer näher an 0 kommt, je näher α selbst gegen Null geht. Eben so $Q=q+\varrho'$, $R=r+\varrho''$, . . .,

Digitized by Google

wo ϱ', ϱ'', ... ebenfalls mehr und mehr sich der Null nähern, je mehr α sich Null nähert. Daraus folgt:

$$P+a=p+a+\varrho,\ bP+a=bp+a+b\varrho,\ aP+bQ+cR+....=ap+bq+cr+...$$
$$+a\varrho+b\varrho'+c\varrho''+...,\ PQ=(p+\varrho)(q+\varrho')=pq+p\varrho'+q\varrho+\varrho\varrho',\ \frac{P}{Q}=\frac{p+\varrho}{q+\varrho'},$$
$$l(P)=l(p+\varrho),\ P^Q=(p+\varrho)^{q+\varrho'}=(p+\varrho)^q(p+\varrho)^{\varrho'},.....$$

Lässt man nun hier α gegen Null gehen, also ϱ, ϱ', ϱ'' ebenfalls gegen Null, so wird $p+a+\varrho$ gegen $p+a$ gehen (wo natürlich p nicht mehr von α abhieng); $bp+a+b\varrho$ gegen $bp+a$, indem sicher auch $b\varrho$ zu 0 werden wird; $ap+bq+cr+...+a\varrho+b\varrho'+...$ gegen $ap+bq+cr+...$; $pq+p\varrho'+q\varrho+\varrho\varrho'$ ferner gegen pq, indem $p\varrho'$, $q\varrho$, $\varrho\varrho'$ zu Null werden; $\frac{p+\varrho}{q+\varrho'}=\frac{p}{q}+\frac{q\varrho-p\varrho'}{q(q+\varrho')}$ wird zu $\frac{p}{q}$ werden und eben so $l(p+\varrho)=l(p)+l\left(1+\frac{\varrho}{p}\right)$ zu $l(p)$; $(p+\varrho)^q$ wird, da p und q sich nicht ändern, nothwendig zu p^q, und $(p+\varrho)^{\varrho'}$ zu $p^0=1$ werden, also $(p+\varrho)^q(p+\varrho)^{\varrho'}$ zu $p^q.1=p^q$, ..., woraus nun ganz unmittelbar alle behaupteten Sätze fliessen.

Zweiter Abschnitt.

Differentialquotient für Funktionen einer einzigen unabhängig Veränderlichen.

§. 10.

Wiederholung und weitere Ausführung des Begriffs einer Funktion. Stetigkeit.

I. Unter Funktion einer Grösse x versteht man in der Mathematik jede Grösse, deren Werth abhängt vom Werthe eben jener Grösse x, so dass also der Werth der zweiten Grösse erst gefunden werden kann, wenn man den der ersten kennt. So ist x^5 eine Funktion von x, indem zunächst x bekannt seyn muss und erst dann x^5 gefunden werden kann; *log* a ist dessgleichen eine Funktion von a u. s. w. Die Grösse, welche bekannt seyn muss, damit der Werth der von ihr abhängenden gefunden werden kann, ist in der Regel willkürlich, d. h. man kann ihr ganz beliebige Werthe beilegen; sie heisst desshalb gewöhnlich die unabhängig Veränderliche, und zwar das Letztere, weil man sich ihren Zustand als veränderlich denkt, oder, was dasselbe ist, annimmt, dass sie beliebig viele verschiedene Werthe annehmen kann. Man könnte sie eben so wohl auch Urgrösse oder Stammgrösse u. s. w. nennen, da diese Namen dieselbe Sache bezeichnen würden. Die Funktion selbst heisst, im Gegensatz hiezu, die abhängig Veränderliche. So ist, wenn $y=\sin x$, x die unabhängig Veränderliche, y (d. h. $\sin x$) die abhängig Veränderliche; $5x^4-3x^2+7$ ist abhängig veränderlich, x dabei

Digitized by Google

unabhängig. Es ist wohl leicht begreiflich, dass die Bezeichnung eine unwesentliche Sache ist. So ist z^8 eine Funktion von z, wobei eben z die unabhängig Veränderliche ist; $5 \sin v - 9 \cos v + 3 \log v$ eine Funktion der (unabhängig gedachten) Veränderlichen v, u. s. w.

Es ist aber auch wohl denkbar, dass diejenige Grösse, von der der Werth einer andern abhängt, selbst wieder abhängig ist vom Werthe einer dritten Grösse. So ist $\log \sin x$ zunächst eine Funktion von $\sin x$, welch' letztere Grösse selbst wieder von x abhängt. Ist allgemein y eine Funktion von x, so ist z. B. $19 y^4 - 7 y^3 + 8 y$ eine Funktion von y, die also mittelbar von x abhängt. Solche Funktionen pflegt man Funktionen von Funktionen zu nennen. Eine beliebige Funktion von x bezeichnet man mit f(x), F (x), φ (x), ψ (x) u. s. f., so dass also f (y) eine Funktion von y, F (z) eine solche von z, ... bezeichnet. Ist nun $y = \varphi(x)$, $z = f(y)$, so ist z eine Funktion von einer Funktion von x, die man auch mit $f[\varphi(x)]$ bezeichnen könnte. Wie man hier weiter gehen kann, ist klar. Eben so ist klar, dass wenn zwischen den Grössen y und x die Beziehung $y = f(x)$ obwaltet, man nicht nur y als Funktion von x ansehen kann, sondern auch wohl berechtigt ist, x als Funktion von y anzusehen. So folgt aus $y = x^4$ auch $x = \sqrt[4]{y}$ und es ist jetzt x als Funktion von y angesehen, während zuerst y als Funktion von x musste betrachtet werden. Folgt aus $y = f(x)$ die Gleichung $x = F(y)$, so sagt man, F (y) sey die umgekehrte Funktion von f (x), und es muss $F[f(x)]$ geradezu x geben.

Zwei Funktionen haben dieselbe Form, wenn die unabhängig Veränderlichen je in derselben Weise in dieselben eintreten. So haben $\sin x$ und $\sin y$ dieselbe Form; eben so $\frac{x^5 - 7x^3 + 2}{x^8 - 9x + 6}$ und $\frac{z^5 - 7z^3 + 2}{z^8 - 9z + 6}$; f (x) und f(y) u. s. w. Man bezeichnet natürlich dieselbe Form auch durch dasselbe Funktionszeichen, so dass φ (x) und φ (z) zwei Funktionen derselben Form bedeuten müssen.

Das Zeichen f (a) meint, man solle in f (x) an die Stelle von x setzen a; also f (0) bedeutet, dass in f(x) zu setzen ist $x = 0$; eben so bezeichnet $f(a + x)$ den Werth, den man erhält, wenn man in f(x) für x setzt $a + x$. Ist etwa $f(x) = l(x)$, so ist $f(a + x) = l(a + x)$ u. s. w.

Stetige Funktionen.

II. Die Mathematik hat es in der Regel nur mit stetigen Funktionen zu thun, und sie versteht darunter diejenigen Funktionen, die sich nur um verschwindend kleine Grössen ändern, wenn der Werth der Urgrösse sich auch nur um eine solche Grösse ändert. Die gewöhnlichen Funktionen der niedern Analysis sind alle in diesem Falle und nur für spezielle Werthe der Urgrösse machen sie davon eine Ausnahme. Man kann das eben Gesagte auch in folgender Weise darstellen. Ist f(x) eine Funktion von x, und man ändert den Werth von x, lässt ihn also in $x + \Delta x$ übergehen, wo Δx den (ganz

Digitized by Google

beliebigen) Zuwachs von x bedeutet *, so wird f(x) in f(x + Δx) übergehen, wo also f(x + Δx) den Werth der Funktion f(x) bedeutet, den man erhält, wenn man x + Δx an die Stelle von x setzt. Die Aenderung, welche f(x) hiedurch erleidet, ist f(x + Δx) — f(x) und wenn nun diese mit unbeschränkt kleiner werdendem Δx ebenfalls fortwährend kleiner wird, oder besser gesagt, für Werthe von Δx, die der Null beliebig nahe kommen, ebenfalls Werthe erhält, die der Null beliebig nahe kommen, so ist f(x), für den betrachteten Werth von x, stetig. So ist x^3 für jeden Werth von x stetig. Denn es ist

$$(x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Lässt man hier Δx der Null nahe genug kommen, so wird die Grösse zweiter Seite ebenfalls Null nahe kommen, was unsern Satz beweist. $\frac{1}{x^3}$ ist stetig für alle Werthe von x, ausser für x = o; *tg* x ist stetig, ausser wenn $x = \frac{\pi}{2}$ u. s. w., in welchen Fällen $\frac{1}{x^3}$, *tg* x unendlich gross werden, d. h. jede Grössenschranke überschreiten. Unstetig heissen wir nun eine Funktion, wenn sie nicht stetig ist, d. h. also, wenn die Differenz f(x + Δx) — f(x) mit unendlich abnehmendem Δx sich nicht Null beliebig nähert. In dieser Lage ist z. B. $\frac{1}{x}$ für x = 0. Denn es ist $\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x^2 + x\Delta x}$ $= \frac{-1}{\frac{x^2}{\Delta x} + x}$. Da aber x = o, so wird, für ein beliebiges Δx, diese Grösse nicht angebbar, oder, wie man sich ausdrückt, unendlich gross (∞), und es ist daher unmöglich, von ihr zu sagen, sie nähere sich mit abnehmendem Δx der Null.

III. Betrachten wir den Quotienten

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

und lassen in demselben (das beliebig gedachte) Δx mehr und mehr gegen 0 gehen, so wird, im Falle dieser Quotient (1) sich dann mehr und mehr einer bestimmten endlichen Grösse annähert, nothwendig f(x) stetig seyn (für diesen Werth von x). Denn würde f(x + Δx) — f(x) mit unbegränzt abnehmendem Δx nicht selbst unbegränzt abnehmen, sich vielmehr einer endlichen (oder gar unendlichen) Grösse nähern, so müsste nothwendig, bei sehr

* Durch das Vorsetzen des Zeichens Δ bezeichnen wir immer eine Aenderung. Ist also x zuerst a, so sagen wir, um anzudeuten es habe x sich geändert, diese Grösse sey nachher a + Δx, wo Δx eben diese Aenderung ausdrückt. Dass man auch ein anderes Zeichen, z. B. h, für diese Aenderung von x setzen kann, ist natürlich. — Wenn wir sagen, x werde zu x + Δx, so meinen wir, der ursprüngliche Werth der unabhängig Veränderlichen, den wir kurzweg mit x bezeichnen und uns darunter eine gewisse Zahl denken, habe um Δx zugenommen (wobei Δx positiv oder negativ seyn kann). Aus *sin* x wird eben dann *sin*(x + Δx), aus e^x wird $e^{x+\Delta x}$ u. s. w. — Die Bezeichnung stammt aus der Differenzenrechnung her, ist aber auch hier von grosser Bequemlichkeit; nur muss man sich hüten, zwischen x und Δx irgend eine Abhängigkeit sich zu denken. (Man vergleiche etwa meine „Grundzüge der algebraischen Analysis" Karlsruhe, 1851, S. 78 ff.)

Digitized by Google

kleinen Werthen von Δx, der Bruch (1), dessen Zähler endlich wäre, sehr gross seyn, so dass mit unendlich abnehmendem Δx er sich nothwendig einem unendlich grossen Werthe annähern müsste. Ist also unsere Voraussetzung, (1) nähere sich einem endlichen Werthe, wenn Δx sich 0 nähert, richtig, so kann f(x) nur stetig seyn. Umgekehrt ist der Satz nicht immer richtig. So ist z. B. $\sqrt{x}$ für $x=0$ noch stetig, da $\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$ für $x=0$ zu $\sqrt{\Delta x}$ wird, und mit unendlich abnehmendem Δx auch unendlich abnimmt; dagegen ist $\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$ für $x=0$ gleich $\frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$ und wird mit unendlich abnehmendem Δx immer grösser werden. Trotzdem nun, dass der ausgesprochene Satz nicht umgekehrt werden kann, bleibt er dennoch von grosser Wichtigkeit, da der unmittelbare Satz selbst in den meisten Fällen genügt.

Wir sind dabei auf den Begriff des Gränzwerthes gelangt, den wir in §. 6 aufstellten. Bezieht sich das Zeichen *Gr* auf ein gegen 0 gehendes Δx, so kann man hiernach sagen:

Ist

$$Gr\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{2}$$

endlich, so ist f(x) stetig.

Wir werden inskünftig fast ausschliesslich nur stetige Funktionen betrachten.

§. 11.

Differentialquotient. Beispiele.

Der bereits in §. 10 betrachtete Werth

$$Gr\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{2}$$

(für ein gegen Null gehendes, übrigens positives oder negatives Δx) heisst der Differentialquotient von f(x). Er ist der Gränzwerth des Differenzenquotienten $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, und wird durch die Zeichen

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial x}f(x),\quad f'(x) \tag{3}$$

bezeichnet, wovon das letztere von Lagrange herrührt. Ist $y=f(x)$, so wird die Differenz $f(x+\Delta x)-f(x)$ durch Δy bezeichnet werden,* und man hat auch

$$\frac{\partial y}{\partial x}=Gr\frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{4}$$

* Man wird also sagen: Ist y eine Funktion von x und wird x zu $x+\Delta x$, so wird y zu $y+\Delta y$, wo mithin Δy die Aenderung ist, welche y erleidet, wenn x sich um Δx ändert. $f(x+\Delta x)$ und $y+\Delta y$ haben hiernach dieselbe Bedeutung. Wir nennen f(x) oder y den frühern, $f(x+\Delta x)$ oder $y+\Delta y$ den neuen Zustand der Funktion. Der Zähler in (2) oder (4) ist der Unterschied beider Zustände.

Digitized by Google

als Erklärung des Differentialquotienten von y nach x. Das Zeichen $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$ darf nicht als ein Bruch angesehen werden, dessen Zähler etwa ∂y, und dessen Nenner ∂x wäre; es bedeutet blos den Differentialquotienten (∂) von y, wenn x die unabhändige Veränderliche ist, wesshalb das ∂x unten beigefügt ist.

Nur so lange der Differentialquotient endlich ist, können wir von demselben handeln, da unendliche Werthe in der Rechnnng unzulässig sind. Alsdann ist aber, nach §. 10, f(x) oder y jedenfalls stetig. Bei solchen Funktionen ist natürlich die Aenderung Δy verschwindend klein, wenn die Aenderung der unabhängig Veränderlichen, d. h. Δx, es ist.

Die Bedeutung der Grösse $\frac{\partial y}{\partial x}$ tritt auch klar hervor, wenn wir ihre geometrische Darstellung in's Auge fassen. Sey (Fig. 1) FG eine krumme Linie, OA und OB die rechtwinkligen Koordinatenaxen, so wird die Ordinate $MD = y$ eine Funktion der Abszisse $OD = x$ seyn. Sey nun $DE = \Delta x$, also $EN = y + \Delta y$ der neue Werth der Ordinate [d. h. wenn $y = f(x)$, so ist $y + \Delta y$ oder $EN = f(x + \Delta x)$], und man ziehe durch die Punkte M und N eine Gerade MN, so wird dieselbe mit der Abszissenaxe OA, oder vielmehr mit der mit OA parallelen MQ einen Winkel NMQ machen, für den (wegen $NQ = EN - MD = y + \Delta y - y = \Delta y$)

Fig. 1.

$$tg\, NMQ = \frac{NQ}{MQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Lässt man Δx abnehmen, d. h. E gegen D rücken, so rückt N gegen M und die Gerade MN nähert sich mehr und mehr einer bestimmten Lage MS, welch' letztere zum Vorschein kommt, wenn N an M angerückt ist Der Winkel SMQ ist dann gegeben durch die Gleichung

$$tg\, SMQ = Gr \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x},$$

so dass letztere Grösse eine vollkommen klare geometrische Bedeutung hat. Die Gerade MS heisst in der Geometrie die berührende Gerade oder Tangente.

Man pflegt zuweilen das Gesagte auch in etwas anderer Form auszusprechen. Versteht man nämlich unter unendlich kleiner Grösse eine Grösse, deren Werth kleiner ist, als jede auch noch so kleine Grösse, so kann man sagen, dass $\frac{\partial y}{\partial x}$ der Werth von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sey, wenn Δx (also auch Δy) unendlich klein ist, oder dass $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ der Werth des Bruches $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ für ein unendlich kleines Δx sey. Eben so wäre dann in Fig. 1 MS diejenige Gerade, die durch zwei unendlich nahe Punkte der krummen Linie FG gelegt würde. Man sieht leicht, dass die eben angegebene Fassung nur der Form nach verschieden ist von der früheren, im Wesen aber mit derselben übereinkommt. Will man sich derselben bedienen, so ist die Ableitung gleich scharf und man muss nur beachten, dass eben „unendlich kleine" Grössen die „Gränze" aller Grössen sind, aber nicht geradezu Null gesetzt werden können, da Null gar keine Grösse mehr ist. Die Gränze einer Fläche ist zwar wohl nicht mehr angebbar, sie gehört aber doch zur Fläche und ist eben desshalb nicht als gar Nichts = Null anzusehen; so ist es

Digitized by Google

mit den unendlich kleinen Grössen. Diese liegen unsern Anschauungen und Begriffen des Stetigen und Ausgedehnten wesentlich zu Grunde. Die Zeit verfliesst in unendlich kleinen Momenten; ein bewegter Punkt geht von Lage zu Lage durch unendlich kleine Zwischenstufen über u. s. w. Von dieser Anschauung rührt auch der Begriff des Differentials her. Da nämlich $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x$, und für unendlich kleine Δx: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x}$, so wird, wenn man das unendlich kleine Δx mit dx, das ebenfalls unendlich kleine Δy (indem y eine stetige Funktion von x ist, §. 10) mit dy bezeichnet, aus dieser Gleichung folgen:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx,$$

wo nun dy das Differential, d. h. die unendlich kleine Zunahme von y, bezeichnet. Wir werden von diesen Bezeichnungen in der Regel keinen Gebrauch machen und wollen uns dabei also auch nicht weiter aufhalten.

Der Werth (2) oder (4) lässt sich bei einigen Funktionen leicht angeben, wie wir diess nun betrachten wollen.

Differentialquotienten von x, l(x), sin x, cos x.

I. Sey zuerst $y = x$, so ist der geänderte Zustand von y, wenn x in $x + \Delta x$ übergeht, den wir durch $y + \Delta y$ zu bezeichnen haben, natürlich einfach $x + \Delta x$, so dass $y + \Delta y = x + \Delta x$, d. h. $\Delta y = \Delta x$ und

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Da nun diese Grössse sich nicht mehr ändern kann, d. h. konstant ist, so ist gewiss auch $Gr \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, d. h.

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1.$$

II. Sey $y = l(x)$, also $y + \Delta y = l(x + \Delta x)$, $\Delta y = l(x + \Delta x) - l(x)$ $= l\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = l\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$, mithin $\frac{\partial y}{\partial x} = Gr \frac{l\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$ $= Gr\, l\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$ *. Aber nach §. 8, Formel (36) ist, wenn dort $\alpha = \Delta x$

---

* Indem $l(a)^n = n\,l(a)$, also $l\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \frac{1}{\Delta x}\, l\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{l\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$.

Man kann übrigens auch setzen: $f(x) = l(x)$, also $f(x + \Delta x) = l(x + \Delta x)$ und folglich in (2): $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{l(x + \Delta x) - l(x)}{\Delta x}$, so dass

$$\frac{\partial\, l(x)}{\partial x} = Gr \frac{l(x + \Delta x) - l(x)}{\Delta x} = Gr \frac{l\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} \text{ u. s. w.}$$

Den Bruch $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ sprechen wir aus: „Neuer Werth der Funktion minus dem frühern, dividirt durch die Aenderung der unabhängig Veränderlichen", und erklären also:

Der Differentialquotient einer Funktion ist der Gränzwerth eines Bruchs, dessen Zähler erhalten wird, wenn man von dem neuen Werthe

Digitized by Google

und $\frac{1}{x}$ für x gesetzt wird: $Gr\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = e^{\frac{1}{x}}$, wobei es gleichgiltig bleibt, ob Δx positiv oder negativ gedacht ist; also (§. 9, V:) $Gr\, l\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$ $= l\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x}$, indem l (e) = 1. Man hat also

$$\frac{\partial\, l(x)}{\partial x} = \frac{1}{x}.$$

III. Sey $y = sin\, x$, also $y + \Delta y = sin(x + \Delta x)$, $\Delta y = sin(x + \Delta x) - sin\, x = 2\, cos(x + \tfrac{1}{2}\Delta x)\, sin\tfrac{1}{2}\Delta x$.* Demgemäss: $\frac{\partial y}{\partial x} = Gr\frac{\Delta y}{\Delta x} = Gr\frac{2\, cos(x + \frac{1}{2}\Delta x).\ sin\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x} = Gr\, cos\,(x + \tfrac{1}{2}\Delta x)\, \frac{sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}$. Da aber $Gr\, cos\,(x + \frac{1}{2}\Delta x) = cos\, x$, $Gr\frac{sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} = 1$ (§. 7, II.), so folgt hieraus (nach §. 9, V.): $Gr\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = cos\, x$,

d. h.

$$\frac{\partial\, sin\, x}{\partial x} = cos\, x.$$

IV. Sey $y = cos\, x$, so ist $y + \Delta y = cos(x + \Delta x)$, $\Delta y = cos(x + \Delta x) - cos\, x = -2\, sin\,(x + \tfrac{1}{2}\Delta x)\, sin\tfrac{1}{2}\Delta x$, also $\frac{\partial y}{\partial x} = Gr\frac{-2\, sin\,(x + \frac{1}{2}\Delta x)\, sin\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}$ $= Gr - sin\,(x + \tfrac{1}{2}\Delta x)\, \frac{sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}$, woraus ganz in derselben Weise, wie so eben, folgt:

$$\frac{\partial\, cos\, x}{\partial x} = - sin\, x.$$

Will man von der oben berührten Bezeichnung der Differentiale Gebrauch machen, so wäre also

$$d\, l(x) = \frac{dx}{x},\quad d\, sin\, x = cos\, x\, dx,\quad d\, cos\, x = - sin\, x\, dx,$$

---

der Funktion den frühern abzieht; dessen Nenner aber gleich der Aenderung der unabhängig Veränderlichen ist.

Diese Aenderung kann positiv oder negativ seyn, und es muss diess im Endergebniss vollkommen gleichgiltig seyn.

* Vergleiche mein Handbuch der Trigonometrie, §. 14, Formeln (25). — Nach der so eben berührten Regel hat man:

Neuer Werth der Funktion $= sin\,(x + \Delta x)$; davon abgezogen der frühere Werth sin x, gibt $sin\,(x + \Delta x) - sin\, x$ als Zähler; Δx ist die Aenderung der unabhängig Veränderlichen, so dass

$$\frac{\partial\, sin\, x}{\partial x} = Gr\frac{sin\,(x + \Delta x) - sin\, x}{\Delta x} = Gr\frac{2\, cos\,(x + \frac{1}{2}\Delta x)\, sin\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}$$
$$= Gr\, cos\,(x + \tfrac{1}{2}\Delta x)\, \frac{sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}.$$

Der Gränzwerth des ersten Faktors ist cos x, der des zweiten 1 (§. 7, II.) und zwar, ob Δx positiv oder negativ sey, so dass

$$\frac{\partial\, sin\, x}{\partial x} = cos\, x.$$

Digitized by Google

Bezeichnungen, die noch sehr häufig im Gebrauche sind, aber natürlich nichts Anderes bedeuten, als die Gleichungen

$$\frac{\partial\, l(x)}{\partial x}=\frac{1}{x},\quad \frac{\partial \sin x}{\partial x}=\cos x,\quad \frac{\partial \cos x}{\partial x}=-\sin x.$$

Wir bemerken auch hier gleich noch, dass der Differentialquotient einer Funktion derselbe seyn muss, ob man Δx von der positiven oder negativen Seite gegen Null gehen lässt. Dass diess in obigen Beispielen der Fall ist, haben wir je beibemerkt, und man wird sich überzeugen, dass diess künftig auch immer der Fall ist.

§. 12.

Sätze über die Differentialquotienten.

Wir wollen nun zunächst einige allgemeine Sätze nachweisen, die uns bei der Differenzirung der Funktionen die wichtigsten Dienste leisten werden.

I. Sey C eine Grösse, deren Werth unabhängig ist vom Werthe von x, d. h. eine Konstante nach x, so ist

$$\frac{\partial C}{\partial x}=0.$$

Denn will man jetzt setzen $f(x)=C$, so ist auch $f(x+\Delta x)=C$, da C sich ja nicht ändert mit x, demnach ist $f(x+\Delta x)-f(x)=0$, d. h. $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0$, also auch $Gr\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0$, woraus der behauptete Satz folgt.

II. Ist y eine beliebige Funktion von x, so ist

$$\frac{\partial (y+C)}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Denn ist $f(x)=y+C$, so ist $f(x+\Delta x)=y+\Delta y+C$, also $f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y$, woraus

$$\frac{\partial (y+C)}{\partial x}=Gr\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=Gr\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\partial y}{\partial x}.$$

So ist

$$\frac{\partial (\sin x+12)}{\partial x}=\cos x,\quad \frac{\partial[-3+l(x)]}{\partial x}=\frac{1}{x},\quad \frac{\partial\, l(5x)}{\partial x}=\frac{\partial[l(5)+l(x)]}{\partial x}=\frac{1}{x}.$$

III. Dessgleichen ist

$$\frac{\partial (Cy)}{\partial x}=C\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Denn wenn $f(x)=Cy$, so ist $f(x+\Delta x)=C(y+\Delta y)$, $f(x+\Delta x)-f(x)=C\Delta y$, also

$$\frac{\partial (Cy)}{\partial x}=Gr\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=Gr\frac{C\Delta y}{\Delta x}=Gr\, C\frac{\Delta y}{\Delta x}=C\frac{\partial y}{\partial x}.$$

So wäre

$$\frac{\partial (15\cos x)}{\partial x}=-15\sin x,\quad \frac{\partial[5\, l(x)]}{\partial x}=\frac{5}{x},\quad \frac{\partial\, l(x^4)}{\partial x}=\frac{\partial[4\, l(x)]}{\partial x}=\frac{4}{x},\quad \frac{\partial(-13x)}{\partial x}=-13.$$

Daraus ergibt sich auch der Differentialquotient von $\log x$, wenn a die Grundzahl des Systems. Denn nach §. 8, V. ist

Digitized by Google

$$log\, x = log\, e\, l(x), \text{ also } \frac{\partial\, log\, x}{\partial x} = log\, e \cdot \frac{1}{x} = \frac{log\, e}{x},$$

oder auch da $l(a) \cdot log\, e = 1$:

$$\frac{\partial\, log\, x}{\partial x} = \frac{1}{x\, l(a)}.$$

Differentialquotient der Summen.

IV. Sind y und z Funktionen von x, so ist

$$\frac{\partial (y+z)}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial (y-z)}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Denn wenn x übergeht in $x + \Delta x$, so werden y und z zu $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, so dass $y + z$ zu $y + \Delta y + z + \Delta z$ wird. Demnach ist

$$\frac{\partial (y+z)}{\partial x} = Gr\, \frac{y + \Delta y + z + \Delta z - (y+z)}{\Delta x} = Gr\, \frac{\Delta y + \Delta z}{\Delta x} = Gr\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta z}{\Delta x}\right),$$

und da die Gränzwerthe von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ sind $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ (§. 11), so ist der Gränzwerth von $\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta z}{\Delta x}$ nothwendig $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x}$ (vergl. §. 9, V), wodurch der eine der obigen Sätze erwiesen ist. Der andere ergibt sich eben so.

Eine Verbindung der Sätze III und IV führt leicht zu Folgendem:

Sind y, z, u, ... beliebige Funktionen von x; a, b, c, ... beliebige Konstanten, so ist

$$\frac{\partial (a y + b z + c u + ..)}{\partial x} = a \frac{\partial y}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \dots$$

So ist

$$\frac{\partial (8\, sin\, x + 7\, cos\, x)}{\partial x} = 8 \frac{\partial\, sin\, x}{\partial x} + 7 \frac{\partial\, cos\, x}{\partial x} = 8\, cos\, x - 7\, sin\, x.$$

$$\frac{\partial [-11 x + 3\, l(x)]}{\partial x} = -11 + \frac{3}{x}, \quad \frac{\partial [9\, sin\, x - 2\, l(x^3)]}{\partial x} = 9\, cos\, x - \frac{6}{x}.$$

Differentialquotient eines Produkts.

V. Seyen wieder y und z Funktionen von x, so ist

$$\frac{\partial (y z)}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial y}{\partial x}.\text{*}$$

Denn sey $f(x) = y z$, so ist $f(x + \Delta x) = (y + \Delta y)(z + \Delta z) = y z + y \Delta z + z \Delta y + \Delta y \Delta z$, $f(x + \Delta x) - f(x) = y \Delta z + z \Delta y + \Delta y \Delta z$, mithin $\frac{\partial (y z)}{\partial x} = Gr\, \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = Gr\, \frac{y \Delta z + z \Delta y + \Delta y \Delta z}{\Delta x}$ $= Gr\left(y \frac{\Delta z}{\Delta x} + z \frac{\Delta y}{\Delta x} + \Delta y \frac{\Delta z}{\Delta x}\right) = y \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial y}{\partial x}$, indem in $y \frac{\Delta z}{\Delta x}$ die Grösse y sich mit Δx nicht ändert, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ aber gegen $\frac{\partial z}{\partial x}$, mithin $y \frac{\Delta z}{\Delta x}$ gegen $y \frac{\partial z}{\partial x}$ geht; eben so $z \frac{\Delta y}{\Delta x}$ gegen $z \frac{\partial y}{\partial x}$; Δy geht, da y als stetige Funktion angesehen wird,

* D. h. Differentialquotient eines Produkts zweier Faktoren = Differentialquotient des zweiten Faktors, multiplizirt mit dem ersten, + Differentialquotient des ersten Faktors, multiplizirt mit dem zweiten.

Digitized by Google

gegen 0 (§. 10), also geht das Produkt $\Delta y \frac{\Delta z}{\Delta x}$ gegen $0 \frac{\partial z}{\partial x} = 0$. Daraus folgt aber die Behauptung.

So ist nun:

$$\frac{\partial (x^2)}{\partial x} = \frac{\partial (xx)}{\partial x} = x \frac{\partial x}{\partial x} + x \frac{\partial x}{\partial x} = x + x = 2x,$$

$$\frac{\partial x^3}{\partial x} = \frac{\partial (x^2 x)}{\partial x} = x^2 \frac{\partial x}{\partial x} + x \frac{\partial x^2}{\partial x} = x^2 + x \cdot 2x = 3x^2,$$

$$\frac{\partial x^4}{\partial x} = \frac{\partial (x^3 x)}{\partial x} = x^3 \frac{\partial x}{\partial x} + x \frac{\partial x^3}{\partial x} = x^3 + x \cdot 3x^2 = 4x^3,$$ u. s. w. allgemein:

$$\frac{\partial x^m}{\partial x} = m x^{m-1},$$ m positiv und ganz.

$$\frac{\partial (\sin x \cos x)}{\partial x} = \sin x \frac{\partial \cos x}{\partial x} + \cos x \frac{\partial \sin x}{\partial x} = -\sin^2 x + \cos^2 x,$$

$$\partial l(x^x) = \frac{\partial [x\, l(x)]}{\partial x} = x \frac{\partial l(x)}{\partial x} + l(x) \frac{\partial x}{\partial x} = x \cdot \frac{1}{x} + l(x) = 1 + l(x),$$

$$\frac{\partial [5 \sin x \cdot l(x^4)]}{\partial x} = \frac{\partial [20 \sin x \cdot l(x)]}{\partial x} = 20 \frac{\partial [\sin x \cdot l(x)]}{\partial x} = 20 \left[\sin x \frac{\partial l(x)}{\partial x} + l(x) \frac{\partial \sin x}{\partial x}\right]$$

$$= 20 \left[\sin x \cdot \frac{1}{x} + l(x) \cdot \cos x\right] = \frac{20 \sin x}{x} + 20\, l(x) \cos x.$$

Man kann obiges Resultat leicht verallgemeinern. So ist

$$\frac{\partial (yzu)}{\partial x} = yz \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial (yz)}{\partial x} = yz \frac{\partial u}{\partial x} + uy \frac{\partial z}{\partial x} + uz \frac{\partial y}{\partial x},$$ u. s. w. (§. 16.)

Differentialquotient eines Bruchs.

VI. Man hat eben so

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{z}\right) = \frac{z \frac{\partial y}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial x}}{z^2}.\ *$$

Sey nämlich $f(x) = \frac{y}{z}$, so ist $f(x + \Delta x) = \frac{y + \Delta y}{z + \Delta z}$, $f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{y + \Delta y}{z + \Delta z} - \frac{y}{z} = \frac{(y + \Delta y) z - y (z + \Delta z)}{z (z + \Delta z)} = \frac{z \Delta y - y \Delta z}{z^2 + z \Delta z}$, $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$$= \frac{z \Delta y - y \Delta z}{(z^2 + z \Delta z) \Delta x} = \frac{z \frac{\Delta y}{\Delta x} - y \frac{\Delta z}{\Delta x}}{z^2 + z \Delta z},$$ mithin

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{z}\right) = Gr \frac{z \frac{\Delta y}{\Delta x} - y \frac{\Delta z}{\Delta x}}{z^2 + z \Delta z} = \frac{z \frac{\partial y}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial x}}{z^2},$$

da $Gr\, z \frac{\Delta y}{\Delta x} = z \frac{\partial y}{\partial x}$, $Gr\, y \frac{\Delta z}{\Delta x} = y \frac{\partial z}{\partial x}$, $Gr\, z \Delta z = z \cdot 0 = 0$ ist (§. 9, V).

Daraus folgt:

---

* Differentialquotient eines Bruchs = Differentialquotient des Zählers, multiplizirt mit dem Nenner, minus Differentialquotient des Nenners, mal dem Zähler, dividirt Alles durch das Quadrat des Nenners.

Digitized by Google

$$\frac{\partial\, tg\, x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \frac{\partial \sin x}{\partial x} - \sin x \frac{\partial \cos x}{\partial x}}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\frac{\partial\, cotg\, x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{\sin x \frac{\partial \cos x}{\partial x} - \cos x \frac{\partial \sin x}{\partial x}}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x},$$

$$\frac{\partial x^{-m}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^m}\right) = \frac{x^m \frac{\partial 1}{\partial x} - 1 \frac{\partial x^m}{\partial x}}{x^{2m}} = \frac{0 - m x^{m-1}}{x^{2m}} = -\frac{m x^{m-1}}{x^{2m}} = -\frac{m}{x^{m+1}},$$ wenn m positiv und ganz,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin x}{x^3}\right) = \frac{x^3 \frac{\partial \sin x}{\partial x} - \sin x \frac{\partial x^3}{\partial x}}{x^6} = \frac{x^3 \cos x - 3x^2 \sin x}{x^6} = \frac{x \cos x - 3 \sin x}{x^4}.$$

VII. Sind f(x), F(x) zwei Funktionen von x, so beschaffen, dass, was auch x sey:

$$f(x) = F(x) + C,$$

wo C eine Konstante, so ist nothwendig

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial F(x)}{\partial x}.$$

Denn, da obige Gleichung für alle Werthe von x besteht, so ist auch

$$f(x + \Delta x) = F(x + \Delta x) + C, \quad f(x + \Delta x) - f(x) = F(x + \Delta x) - F(x),$$

also auch

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}, \quad Gr \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = Gr \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Ist $C = 0$, so sind beide Funktionen einander gleich, und der Satz ist natürlich auch richtig.

Wäre also z. B.

$$x^2 y = 5x^3 + 4,$$

so ist

$$\frac{\partial (x^2 y)}{\partial x} = \frac{\partial (5x^3 + 4)}{\partial x}, \text{ d. h. } x^2 \frac{\partial y}{\partial x} + y \frac{\partial x^2}{\partial x} = 5 \frac{\partial x^3}{\partial x}, \quad x^2 \frac{\partial y}{\partial x} + 2xy = 15x^2.$$

§. 13.

Differenzirung der Funktion einer Funktion.

Wir wollen annehmen y sey eine Funktion von x, und dann f(y) eine Funktion von y und es soll sich um die Bestimmung von $\frac{\partial f(y)}{\partial x}$ handeln. Man hat wie immer

$$\frac{\partial f(y)}{\partial x} = Gr \frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta x} = Gr \left(\frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right).$$

Nun ist, nach unsern Fundamental-Erklärungen: $Gr \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x}$; was $Gr \frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta y}$ anbelangt, so wird natürlich auch Δy zur Gränze Null gehen, wenn Δx in dieser Lage ist, da wir immer y als stetige Funktion von

Digitized by Google

x voraussetzen (§. 10); die Grösse $Gr \frac{f(y+\Delta y)-f(y)}{\Delta y}$ ist alsdann, gemäss §. 11, der Differentialquotient von f (y) nach y, d. h. so bestimmt, als wenn y die unabhängig Veränderliche wäre, welchen Werth wir mit $\frac{\partial f(y)}{\partial y}$ * zu bezeichnen haben. Demnach ist (§. 9, V):

$$\frac{\partial f(y)}{\partial x}=\frac{\partial f(y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}. \tag{5}$$

Man nennt diesen höchst wichtigen Satz den der Differenzirung der Funktionen von Funktionen. Ist $f(y)=z$, so ist also

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Ist eben so w eine Funktion von v, v von u, u von y, y von x, so folgt aus der identischen Gleichung

$$\frac{\Delta w}{\Delta x}=\frac{\Delta w}{\Delta v}\frac{\Delta v}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

offenbar (§. 9, V): $\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$ u. s. w.

So ist

$\frac{\partial \sin(x+a)}{\partial x}=\frac{\partial \sin y}{\partial x}$ (wenn $x+a=y$) $=\frac{\partial \sin y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=\cos y\frac{\partial(x+a)}{\partial x}=\cos y=$ $=\cos(x+a)$, $\frac{\partial l(\sin x)}{\partial x}$ (wenn $y=\sin x$) $=\frac{\partial l(y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{\sin x}\frac{\partial \sin x}{\partial x}$ $=\frac{1}{\sin x}\cos x=cotg\, x$, $\frac{\partial \sin^4 x}{\partial x}=\frac{\partial y^4}{\partial x}$ (wenn $y=\sin x$) $=\frac{\partial y^4}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=4y^3\frac{\partial y}{\partial x}$ $=4\sin^3 x\frac{\partial \sin x}{\partial x}=4\sin^3 x\cos x$.

Ehe wir jedoch weitere Beispiele hinzufügen, wollen wir die Differentialquotienten der noch rückständigen einfachen Funktionen bestimmen.

Differentialquotienten der einfachen Funktionen.

I. Sey $y=x^m$, m ganz beliebig (konstant). Hieraus folgt $l(y)=m\,l(x)$, also (§. 12, VII, III, §. 11, II):

$$\frac{\partial l(y)}{\partial x}=\frac{\partial[m\,l(x)]}{\partial x},\quad \frac{\partial l(y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=m\frac{\partial l(x)}{\partial x},\quad \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{m}{x},$$

woraus: $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{my}{x}$, d. h. da $y=x^m$: $\frac{\partial x^m}{\partial x}=\frac{mx^m}{x}$, oder

$$\frac{\partial . x^m}{\partial x}=mx^{m-1},\quad dx^m=mx^{m-1}dx,$$

welcher Satz nun für ein ganz beliebiges m gilt. (Man vergl. §. 12, V, VI.)

---

* Kennt man $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$, so wird man $\frac{\partial f(y)}{\partial y}$ einfach dadurch erhalten, dass man y für x setzt. So ist $\frac{\partial \cos y}{\partial y}=-\sin y$, $\frac{\partial l(y)}{\partial y}=\frac{1}{y}$, $\frac{\partial y^4}{\partial y}=4y^3$, $\frac{\partial tg\, y}{\partial y}=\frac{1}{\cos^2 y}$ u. s. w.

Digitized by Google

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial x^6}{\partial x} = 6x^5, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-1}\right) = -1x^{-2} = \frac{-1}{x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-3}\right)$$

$$= -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-n}\right) = -n x^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}, \quad \frac{\partial \sqrt{x}}{\partial x} = \frac{\partial x^{\frac{1}{2}}}{\partial x}$$

$$= \tfrac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad \frac{\partial \sqrt[n]{x}}{\partial x} = \frac{\partial x^{\frac{1}{n}}}{\partial x} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{-(n-1)}{n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}},$$

$$\frac{\partial \sqrt[4]{x^3}}{\partial x} = \frac{\partial x^{\frac{3}{4}}}{\partial x} = \tfrac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) = -\tfrac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-\frac{1}{n}}\right) = -\frac{1}{n} x^{-\frac{1}{n}-1} = -\frac{1}{n} x^{\frac{-(n+1)}{n}} = -\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n+1}}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^8}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-\frac{8}{5}}\right) = -\frac{8}{5} x^{-\frac{13}{5}} = -\frac{8}{5\sqrt[5]{x^{13}}} \text{ u. s. w.}$$

II. Sey $y = e^x$, also $l(y) = x$, so ist ganz eben so:

$$\frac{\partial l(y)}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x}, \quad \frac{\partial l(y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 1, \quad \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = y,$$

d. h. da $y = e^x$:
$$\frac{\partial e^x}{\partial x} = e^x, \quad d e^x = e^x\, dx.$$

III. Sey $y = a^x$, a beliebig aber konstant. Man hat $l(y) = x\, l(a)$, also indem man differenzirt (§. 12, VII, III, §. 11, I)

$$\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x} = l(a), \quad \frac{\partial y}{\partial x} = y\, l(a),$$

d. h.
$$\frac{\partial a^x}{\partial x} = a^x\, l(a), \quad d a^x = a^x\, l(a)\, dx.$$

IV. Sey $y = arc(sin = x)$, also $sin\, y = x$, so ist (§. 12, VII, §. 11, III, I):

$$\frac{\partial\, sin\, y}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x}, \quad \frac{\partial\, sin\, y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 1, \quad cos\, y\, \frac{\partial y}{\partial x} = 1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{cos\, y}.$$

Nun ist aber, da y zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt (§. 3), also cos y positiv ist:

$$cos\, y = \sqrt{1 - sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

also endlich:

$$\frac{\partial\,.\, arc(sin = x)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Da immer
$$arc\,(cos = x) = \frac{\pi}{2} - arc\,(sin = x), \quad [§. 3, (12)]$$

so ist (§. 12, II., III.):
$$\frac{\partial\, arc\,(cos = x)}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

V. Sey $y = arc\,(tg = x)$, also $tg\, y = x$, so ist, wie so eben:

$$\frac{1}{cos^2 y}\frac{\partial y}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = cos^2 y = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

d. h.
$$\frac{\partial\, arc\, tg = x)}{\partial x} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Digitized by Google

Da immer $arc\,(cotg = x) = \frac{\pi}{2} - arc\,(tg = x)$, [§. 3, (12)]

so ist $\frac{\partial\, arc\,(cotg = x)}{\partial x} = -\frac{1}{1+x^2}$, $d\, arc\, cotg = x) = -\frac{dx}{1+x^2}$.

Stellen wir nunmehr diejenigen Differentialquotienten zusammen, die man sich zu merken hat, um mittelst der allgemeinen Sätze beliebige Funktionen differenziren zu können, so mögen es die folgenden seyn:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial x^m}{\partial x} = m x^{m-1},\ \frac{\partial l(x)}{\partial x} = \frac{1}{x},\ \frac{\partial e^x}{dx} = e^x,\ \frac{\partial \sin x}{\partial x} = \cos x,\ \frac{\partial \cos x}{\partial x} = -\sin x, \\
\frac{\partial\, arc\,(sin = x)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \frac{\partial\, arc\,(tg = x)}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}; \\
\frac{\partial . a^x}{\partial x} = a^x\, l(a),\ \frac{\partial\, tg\, x}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2 x},\ \frac{\partial\, \mathrm{cotg}\, x}{\partial x} = -\frac{1}{\sin^2 x},\ \frac{\partial\, arc\,(cos = x)}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\
\frac{\partial\, arc\,(cotg = x)}{\partial x} = -\frac{1}{1+x^2}.
\end{array}\right\} \quad (6)$$

Vermittelst des wichtigen Satzes (5) kann man mit Hülfe früherer Sätze bereits schon sehr zusammengesetzte Funktionen differenziren, wie wir nun an einigen Beispielen zeigen wollen.

§. 14.

Uebungsbeispiele.

I. Sey zu differenziren $ax - bx^m + c\sqrt[n]{x} - \frac{1}{x^p}$. Da letztere Grösse $= ax - bx^m + cx^{\frac{1}{n}} - x^{-p}$, so erhält man, nach §. 12, III., IV. und §. 13, I:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(ax - bx^m + c\sqrt[n]{x} - \frac{1}{x^p}\right) = a - mbx^{m-1} + \frac{1}{n}cx^{\frac{1}{n}-1} + px^{-p-1}$$

$$= a - mbx^{m-1} + \frac{c}{n}x^{-\left(\frac{n-1}{n}\right)} + px^{-(p+1)} = a - mbx^{m-1} + \frac{c}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} + \frac{p}{x^{p+1}}.$$

II. Man soll $(ax + bx^3)^m - \sqrt{a + bx + cx^2}$ differenziren. Setzt man $ax + bx^3 = y$, $a + bx + cx^2 = z$, so hat man $\frac{\partial}{\partial x}(y^m - z^{\frac{1}{2}})$ zu bestimmen. Diese Grösse ist zunächst (§. 12, IV.) gleich $\frac{\partial}{\partial x}y^m - \frac{\partial}{\partial x}z^{\frac{1}{2}}$ also, nach §. 13 (5) gleich $\frac{\partial . y^m}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial . z^{\frac{1}{2}}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = m y^{m-1}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial z}{\partial x}$, und da $\frac{\partial y}{\partial x} = a + 3bx^2$, $\frac{\partial z}{\partial x} = b + 2cx$, so ist, wenn man für y und z wieder ihre Werthe setzt:

$$\frac{\partial}{\partial x}[(ax + bx^3)^m - \sqrt{a + bx + cx^2}] = m(ax + bx^3)^{m-1}(a + 3bx^2) - \frac{1}{2}\frac{b + 2cx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}.$$

III. Will man $\frac{\partial}{\partial x} l\,[arc\,(sin = x)]$ erhalten, so setze man $arc\,(sin = x) = y$, und hat (§. 13): $\frac{\partial}{\partial x} l\,[arc\,(sin = x)] = \frac{\partial}{\partial x} l(y) = \frac{\partial l(y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x}$,

d. h. da $y = arc\,(sin = x)$; $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (§. 13, IV.), so ist endlich:

Digitized by Google

$$\frac{\partial}{\partial x} l\,[arc\,(sin = x)] = \frac{1}{arc\,(sin = x)\,\sqrt{1-x^2}}.$$

IV. Soll $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)$ bestimmt werden, so setze man $1+x=y$, $\frac{\partial y}{\partial x}=1$, $1-x=z$, $\frac{\partial z}{\partial x}=-1$, und hat zunächst (§. 12, VI):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}-z^{\frac{1}{2}}}\right)=\frac{(y^{\frac{1}{2}}-z^{\frac{1}{2}})\frac{\partial}{\partial x}(y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}})-(y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}})\frac{\partial}{\partial x}(y^{\frac{1}{2}}-z^{\frac{1}{2}})}{(y^{\frac{1}{2}}-z^{\frac{1}{2}})^2}.$$

Aber $\frac{\partial}{\partial x}(y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}})=\frac{\partial y^{\frac{1}{2}}}{\partial x}+\frac{\partial z^{\frac{1}{2}}}{\partial x}$ (§. 12, IV.) $=\frac{\partial . y^{\frac{1}{2}}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial . z^{\frac{1}{2}}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}$ $=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(y^{\frac{1}{2}}-z^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$,
also die gesuchte Grösse =

$$\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{y}-\sqrt{z})\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{z}}\right)-\frac{1}{2}(\sqrt{y}+\sqrt{z})\left(\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)}{(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2}$$

$$=\frac{\frac{(\sqrt{y}-\sqrt{z})\,(\sqrt{z}-\sqrt{y})}{2\sqrt{yz}}-\frac{(\sqrt{y}+\sqrt{z})\,(\sqrt{z}+\sqrt{y})}{2\sqrt{yz}}}{(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2}=\frac{-(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2-(\sqrt{y}+\sqrt{z})^2}{2\sqrt{yz}\,(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2}$$

$$=-\frac{(y+z)}{\sqrt{yz}\,(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2}=-\frac{(y+z)}{\sqrt{yz}\,\,(y+z-2\sqrt{yz})}=-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}\,(2-2\sqrt{1-x^2})}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\,(1-\sqrt{1-x^2})}.$$

V. Will man $\frac{\partial}{\partial x} arc\,(tg=\sqrt{5+4x+3x^2})$ bestimmen, so setze man $5+4x+3x^2=y$, $\sqrt{y}=z$, und hat $\frac{\partial}{\partial x} arc\,(tg=\sqrt{5+4x+3x^2})=\frac{\partial}{\partial x}$ $arc\,(tg=z)=\frac{\partial}{\partial z} arc\,(tg=z).\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial x}$ (§. 13) $=\frac{\partial\, arc\,(tg=z)}{\partial z}\frac{\partial y^{\frac{1}{2}}}{\partial y}\frac{\partial\,(5+4x+3x^2)}{\partial x}$

$$=\frac{1}{1+z^2}.\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}(4+6x)=\frac{1}{1+y}.\frac{1}{2\sqrt{y}}.(4+6x)=\frac{4+6x}{(1+5+4x+3x^2)\,2\sqrt{5+4x+3x^2}}$$

$$=\frac{2+3x}{(6+4x+3x^2)\,\,\sqrt{5+4x+3x^2}}.$$

VI. Um $\frac{\partial}{\partial x} l\,(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2})$ zu erhalten, setze man $a+bx^2=y$ (also $\frac{\partial y}{\partial x}=2bx$), $x\sqrt{b}+\sqrt{y}=z$, und erhält

$$\frac{\partial}{\partial x} l(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2})=\frac{\partial}{\partial x} l(z)=\frac{\partial l(z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{z}.\frac{\partial(x\sqrt{b}+\sqrt{y})}{\partial x}=\frac{1}{z}\left(\sqrt{b}+\frac{\partial\sqrt{y}}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{1}{z}\left(\sqrt{b}+\frac{\partial y^{\frac{1}{2}}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\frac{1}{z}(\sqrt{b}+\tfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}.2bx)=\frac{1}{z}\left(\sqrt{b}+\frac{bx}{\sqrt{y}}\right)=\frac{1}{x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}}$$

$$\left(\sqrt{b}+\frac{bx}{\sqrt{a+bx^2}}\right)=\frac{1}{x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}}\left(\frac{\sqrt{b}\sqrt{a+bx^2}+bx}{\sqrt{a+bx^2}}\right)=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+bx^2}}.$$

Digitized by Google

VII. $\frac{\partial}{\partial x} sin(a+bx+cx^3) = \frac{\partial}{\partial x} sin\, y = \frac{\partial\, sin\, y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = cos\, y.(b+3cx^2) = (b+3cx^2)$ $cos(a+bx+cx^3)$; $\frac{\partial}{\partial x} arc\left(sin = \frac{b}{a}x\right) = \frac{\partial}{\partial x} arc(sin=y) = \frac{\partial}{\partial y} arc(sin=y)\frac{\partial y}{\partial x}$ $= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}x^2}}.\frac{b}{a} = \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}(a>0)$; $\frac{\partial}{\partial x} l[l(x)] = \frac{\partial}{\partial x} l(y)$ $= \frac{\partial\, l(y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{y}.\frac{1}{x} = \frac{1}{x\, l(x)}$; $\frac{\partial}{\partial x} e^{x^2} = \frac{\partial}{\partial x} e^y = \frac{\partial e^y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = e^y\frac{\partial x^2}{\partial x} = e^y.2x$ $= 2xe^{x^2}$; $\frac{\partial}{\partial x} a^{nx^r} = \frac{\partial}{\partial x} a^y = \frac{\partial a^y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = a^y l(a)\frac{\partial(nx^r)}{\partial x} = a^y l(a).nrx^{r-1} = nr\,l(a)x^{r-1}a^{nx^r}$; $\frac{\partial}{\partial x}(e^{x^2} tg\, ax) = tg\, ax\frac{\partial e^{x^2}}{\partial x} + e^{x^2}\frac{\partial\, tg\, ax}{\partial x} = 2xe^{x^2} tg\, ax + e^{x^2}\frac{\partial\, tg\, y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 2xe^{x^2} tg\, ax$ $+ \frac{e^{x^2}a}{cos^2 ax}$; $\frac{\partial}{\partial x} arc[tg = a\, tg(bx)] = \frac{\partial}{\partial x} arc(tg = a\, tg\, y) = \frac{\partial}{\partial x} arc(tg=z) =$ $\frac{\partial\, arc(tg=z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{1+z^2}\frac{\partial(a\, tg\, y)}{\partial y}\frac{\partial(bx)}{\partial x} = \frac{1}{1+z^2}.\frac{a}{cos^2 y}.b = \frac{ab}{(1+a^2 tg^2 y)\, cos^2 y}$ $= \frac{ab}{cos^2 y + a^2 sin^2 y} = \frac{ab}{cos^2(bx)+a^2 sin^2(bx)}$.

Als Beispiele zur Uebung legen wir noch vor:

$\frac{\partial}{\partial x}(ax+b)^m = am(ax+b)^{m-1}$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3-1}{x^4-7x^2}\right) = \frac{-x^6-7x^4+4x^3-14x}{(x^4-7x^2)^2}$, $\frac{\partial}{\partial x}\sqrt[3]{\frac{ax^2-b}{x^5}} = \frac{(-3ax^2+5b)\sqrt[3]{x}}{3x^3\sqrt[3]{(ax^2-b)^2}}$, $\frac{\partial}{\partial x} l(\sqrt{1-x^2}) = -\frac{x}{1-x^2}$, $\frac{\partial}{\partial x} l(x+\sqrt{1+x^2})$ $= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\frac{\partial}{\partial x} sin(a+bx) = b\, cos(a+bx)$, $\frac{\partial}{\partial x} tg[l(x)] = \frac{1}{x}.\frac{1}{cos^2[l(x)]}$, $\frac{\partial}{\partial x} l\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{\partial}{\partial x} arc(tg = \sqrt{x}) = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$, $\frac{\partial}{\partial x} l(tg\, x) = \frac{2}{sin\, 2x}$, $\frac{\partial}{\partial x} l(sin\, x) = cotg\, x$, $\frac{\partial}{\partial x}[(2x+3)^2(5x+4)^4] = (2x+3)(5x+4)^3$ $(60x+76)$, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{(4+5x^2)^3}{(2+3x^2)^4} = -\frac{6x(6+5x^2)(4+5x^2)^2}{(2+3x^2)^5}$, $\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{\frac{2+5x^2}{3+4x^2}}$ $= \frac{7x}{\sqrt{(2+5x^2)(3+4x^2)^3}}$, $\frac{\partial}{\partial x}\sqrt[3]{\frac{5x}{3+2x}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{x^2(3+2x)^4}}$, $\frac{\partial}{\partial x} l\left(\frac{4+3x^2}{2+7x}\right)$ $= \frac{-28+12x+21x^2}{(2+7x)(4+3x^2)}$.

§. 15.

Differentialquotient einer Funktion mehrerer Funktionen.

I. Nach der Erklärung in §. 11 nähert sich der Werth des Bruches

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

mehr und mehr derjenigen Grösse, welche wir durch $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ bezeichnen. Daraus aber folgt, dass wenn wir setzen:

Digitized by Google

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\partial f(x)}{\partial x}+\alpha \qquad (7)$$

die Grösse α abhängen wird sowohl von dem Werthe von x, als auch von dem Werthe, den man Δx beilegt, dass aber diese Grösse mit abnehmendem Δx selbst gegen 0 gehen muss, d. h. dass $Gr\,\alpha=0$ sey, da sonst nicht $Gr\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ wäre. Demnach ist

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x}+\alpha\right]\Delta x,\quad Gr\,\alpha=0. \qquad (8)$$

Dass eben so

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\left[\frac{\partial F(z)}{\partial z}+\alpha\right]\Delta z,\quad Gr\,\alpha=0, \qquad (8')$$

ist natürlich. Dabei bezieht sich das Zeichen Gr auf gegen Null gehende Δz.

Funktion zweier Funktionen.

II. Seyen y, z zwei Funktionen von x, und $f(y, z)$ eine Funktion dieser beiden,* deren Differentialquotienten $\frac{\partial f(y,z)}{\partial x}$ man suchen soll.

Geht x in $x+\Delta x$ über, so werden die (stetigen) Funktionen y und z zu $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, also $f(y,z)$ zu $f(y+\Delta y,\ z+\Delta z)$, wo letztere Grösse aus der ersten erhalten wird, wenn man an die Stelle von y setzt $y+\Delta y$, an die Stelle von z aber $z+\Delta z$. Demnach ist

$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial x}=Gr\,\frac{f(y+\Delta y,\ z+\Delta z)-f(y,z)}{\Delta x}.$$

Es ist aber identisch:

$$\frac{f(y+\Delta y,\ z+\Delta z)-f(y,z)}{\Delta x}=\frac{f(y+\Delta y,z+\Delta z)-f(y+\Delta y,z)+f(y+\Delta y,z)-f(y,z)}{\Delta x}$$

$$=\frac{f(y+\Delta y,z+\Delta z)-f(y+\Delta y,z)}{\Delta z}\,\frac{\Delta z}{\Delta x}+\frac{f(y+\Delta y,\ z)-f(y,z)}{\Delta y}\,\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

wo $f(y+\Delta y, z)$ aus $f(y, z)$ erhalten wird, wenn man bloss für y setzt $y+\Delta y$.

Was nun die Grösse $f(y+\Delta y, z+\Delta z)-f(y+\Delta y, z)$ betrifft, so geht $f(y+\Delta y,\ z+\Delta z)$ aus $f(y+\Delta y, z)$ hervor, wenn man für z setzt $z+\Delta z$,

---

* Sey z. B. $y=\sin x$, $z=e^x$, so ist $e^x\sin^2 x+e^{3x}\sin x+5\,e^{4x}-7\sin^2 x = z y^2+z^3 y+5 z^4-7 y^2$ eine Funktion von y und z, d. h. von $\sin x$ und e^x. — Eine solche Funktion ist also ein in beliebiger Weise aus y und z zusammengesetzter Ausdruck, wie etwa y^z, $\frac{z^2-y^2+2}{7zy+5}$, $l(az+by)$ u. s. w. Die Bezeichnungsweise ist die angegebene. Dabei aber müssen wir auf einige Besonderheiten der Bezeichnung aufmerksam machen. $f(z+y)$ bedeutet allerdings auch eine Funktion von z und y, in der aber $z+y$ immer ungetrennt zusammenstehen muss, wie etwa in $(z+y)^3-l(z+y)+\frac{1}{z+y}$; $f(z\,y)$ ist eine Funktion, in der das Produkt z y ungetrennt zusammensteht, wie in $z^2y^3+5^{zy}$; $f\left(\frac{z}{y}\right)$ verlangt, dass $\frac{z}{y}$ ungetrennt sey, u. s. w. — Diese Formen sind allerdings unter der allgemeinen: $f(z, y)$ mit inbegriffen, und was für letztere gilt, hat für jene ebenfalls Geltung. Doch werden besondere Regeln für dieselben aufgestellt werden können, die im allgemeinen Falle nicht gelten.



Digitized by Google

während $f(y+\varDelta y, z)$ selbst erhalten wird, wenn man in $f(y,z)$ setzt $y+\varDelta y$ statt y.

Betrachten wir aber die Differenz $f(y, z+\varDelta z)-f(y,z)$, so geht die vorhin genannte aus derselben einfach dadurch hervor, dass man überall für y setzt $y+\varDelta y$. Die Differenz $f(y, z+\varDelta z)-f(y,z)$ kann aber verglichen werden mit der in (8′) betrachteten, da die Grösse y in ihren beiden Gliedern dieselbe ist, also wie eine Konstante behandelt wurde. Ist mithin der Differentialquotient von $f(y,z)$ nach z, wobei y wie eine Konstante angesehen wird, gleich $\varphi(y,z)$, d. h. hat man

$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial z}=\varphi(y,z),$$

so ist

$$f(y, z+\varDelta z)-f(y,z)=[\varphi(y,z)+\alpha]\varDelta z,\quad Gr\,\alpha=0,$$

also nothwendig

$$f(y+\varDelta y, z+\varDelta z)-f(y+\varDelta y, z)=[\varphi(y+\varDelta y, z)+\alpha_1]\varDelta z,$$

wo α_1 aus α hervorgeht, wenn man für y setzt $y+\varDelta y$, wobei aber, da für alle $y: Gr\,\alpha=0$, auch $Gr\,\alpha_1=0$ seyn wird. Daraus folgt

$$\frac{f(y+\varDelta y, z+\varDelta z)-f(y+\varDelta y, z)}{\varDelta z}=\varphi(y+\varDelta y, z)+\alpha_1.$$

Ist eben so

$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial y}=\psi(y,z),$$

wo $\frac{\partial f(y,z)}{\partial y}$ den Differentialquotienten von $f(y,z)$ nach y bezeichnet, wobei z wie konstant angesehen wird,* so ist

$$\frac{f(y+\varDelta y, z)-f(y,z)}{\varDelta y}=\psi(y,z)+\beta,$$

wo β mit $\varDelta y$ zu Null wird. Demnach endlich ist

$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial x}=Gr\left\{[\varphi(y+\varDelta y, z)+\alpha_1]\frac{\varDelta z}{\varDelta x}+[\psi(y,z)+\beta]\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right\},$$

worin α_1 mit $\varDelta z$, β mit $\varDelta y$ zu Null wird. Da $\varDelta y$, $\varDelta z$ mit $\varDelta x$ gegen Null gehen, so ist also, wenn man $\varDelta x$, mithin auch $\varDelta y$, $\varDelta z$, α_1, β gegen Null gehen lässt, wegen $Gr\frac{\varDelta z}{\varDelta x}=\frac{\partial z}{\partial x}$, $Gr\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\frac{\partial y}{\partial x}$:

$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial x}=\varphi(y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+\psi(y,z)\frac{\partial y}{\partial x},$$

d. h.

$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial x}=\frac{\partial f(y,z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f(y,z)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}. \tag{9}$$

In dieser Gleichung bedeutet nun $\frac{\partial f(y,z)}{\partial z}$ den partiellen Differentialquotienten von $f(y,z)$ nach z, den man also erhält, wenn man $f(y,z)$

---

* So ist also $\frac{\partial}{\partial y}\left[zy^3+\frac{5y}{z}+l(y)+\sin z\right]=3zy^2+\frac{5}{z}+\frac{1}{y}$; $\frac{\partial}{\partial z}\left[zy^3+\frac{5y}{z}+l(y)+\sin z\right]=y^3-\frac{5y}{z^2}+\cos z$.

Digitized by Google

nach z differenzirt und dabei y wie eine Konstante behandelt. Eben so ist $\frac{\partial f(y,z)}{\partial y}$ der partielle Differentialquotient von f(y, z) nach y, wobei z wie konstant behandelt ist.

Man schreibt zur Abkürzung auch

$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Dabei kann z ganz wohl auch geradezu x seyn, man also f(y,x) nach x differenziren. Dann ist $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$ (§. 11).

Sey z. B. zu suchen $\frac{\partial}{\partial x}\left[a^x + 5\cos^2 x - \frac{9a^{2x}}{\cos x} + \frac{7\cos^4 x}{a^x}\right]$.

Man setze $a^x = y$; $\cos x = z$, so hat man zu suchen

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[y + 5z^2 - 9y^2z^{-1} + 7y^{-1}z^4\right].$$

Aber es ist $\frac{\partial(y + 5z^2 - 9y^2z^{-1} + 7y^{-1}z^4)}{\partial y} = 1 - 18yz^{-1} - 7y^{-2}z^4$,

$$\frac{\partial(y + 5z^2 - 9y^2z^{-1} + 7y^{-1}z^4)}{\partial z} = 10z + 9y^2z^{-2} + 28y^{-1}z^3,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a^x\,l(a),\quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\sin x,$$

also $\frac{\partial}{\partial x}\left[a^x + 5\cos^2 x - \frac{9a^{2x}}{\cos x} + \frac{7\cos^4 x}{a^x}\right] = \left[1 - \frac{18y}{z} - \frac{7z^4}{y^2}\right]a^x l(a) - \left[10z + \frac{9y^2}{z^2} + \frac{28z^3}{y}\right]\sin x = \left[1 - \frac{18a^x}{\cos x} - \frac{7\cos^4 x}{a^{2x}}\right]a^x l(a) - \left[10\cos x + \frac{9a^{2x}}{\cos^2 x} + \frac{28\cos^3 x}{a^x}\right] \times \sin x$.

Hat man ferner $\frac{\partial}{\partial x}\left[4x^2 + 5x\,tg\,x - 7\,tg^4 x + 18\right]$ zu bestimmen, so sey $tg\,x = y$, also die gegebene Grösse $4x^2 + 5xy - 7y^4 + 18$, und es ist (da jetzt $z = x$):

$$\frac{\partial(4x^2 + 5xy - 7y^4 + 18)}{\partial x} = 8x + 5y,\quad \frac{\partial(4x^2 + 5xy - 7y^4 + 18)}{\partial y} = 5x - 28y^3,$$

also da $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2 x}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[4x^2 + 5x\,tg\,x - 7\,tg^4 x + 18\right] = 8x + 5\,tg\,x + (5x - 28\,tg^3 x)\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Eben so ist

$$\frac{\partial y^z}{\partial y} = z y^{z-1},\quad \frac{\partial y^z}{\partial z} = y^z\,l(y)\ (\text{§. 13, I, III}),$$

also nach (9):

$$\frac{\partial}{\partial x}(y^z) = z y^{z-1}\frac{\partial y}{\partial x} + y^z\,l(y)\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Für $y = z = x$ z. B.

$$\frac{\partial}{\partial x}x^x = x x^{x-1} + x^x l(x) = x^x + x^x l(x) = x^x[1 + l(x)].$$

Ferner

$$\frac{\partial}{\partial x}x^{2x} = 2x x^{2x-1} + x^{2x} l(x)\,2 = 2x^{2x}[1 + l(x)].$$

Digitized by Google

Bezeichnungen.

III. Setzt man in der Formel (9) $y = x$, so gibt sie wegen $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$ (§. 11, I):

$$\frac{\partial f(x, z)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, z)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \tag{10}$$

und kann in dieser Form zu Missverständnissen führen. Die erste Seite dieser Gleichung bezeichnet den seitherigen Differentialquotienten, in dem x und z als veränderlich angesehen werden; wir wollen ihn den vollständigen (totalen) Differentialquotienten von $f(x, z)$ nach x nennen; das erste Glied der zweiten Seite bezeichnet dagegen den partiellen Differentialquotienten von $f(x, z)$ nach x, wobei z wie konstant behandelt wird. Man kann aber offenbar diese beiden Grössen nicht mehr mit demselben Zeichen bezeichnen und wir müssen uns entweder zur Einführung eines weitern Zeichens entschliessen, oder aber je mit Worten auf den Unterschied in der Bedeutung aufmerksam machen.

Von diesen beiden Wegen entspricht nur der erstere dem Geiste der mathematischen Formenlehre und wir wollen künftig, wenn es sich darum handelt, vollständige Differentialquotienten zu bezeichnen, statt des gebogenen ∂ das aufgerichtete d wählen. Die Gleichung (10) ist also hiernach zu schreiben:

$$\frac{df(x, z)}{dx} = \frac{\partial f(x, z)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}. \tag{11}$$

Die früher betrachteten Differentialquotienten sind allerdings auch vollständige, und man kann also eben so wohl für sie das aufgerichtete d verlangen; allein vollständig und partiell sind für jene Differentialquotienten dasselbe. So ist es ganz gleichgiltig, ob man vom vollständigen oder vom partiellen Differentialquotienten von x^m noch x spricht. Es ist

$$\frac{dx^m}{dx} = \frac{\partial x^m}{\partial x} = m x^{m-1}.$$

Wir werden desshalb das gebogene ∂ beibehalten, da dieses Zeichen in keiner andern Weise weiter verwendet wird, und nur dann, wenn Missverständnisse zu befürchten wären von d Gebrauch machen. Ist aber eine Zweideutigkeit möglich, so soll das gebogene ∂ immer nur partielle Differentialquotienten bezeichnen. So wird $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ immer nur den partiellen Differentialquotienten von $f(x, y)$ nach x bezeichnen und nie den totalen; $\frac{\partial f(y, z)}{\partial x}$ aber muss den totalen Differentialquotienten von $f(y, z)$ nach x bezeichnen, da von einem partiellen hier nicht die Rede seyn kann. Natürlich sind jetzt $\frac{df(y, z)}{dx}$ und $\frac{\partial f(y, z)}{\partial x}$ dasselbe. Man kann also schreiben:

$$\frac{\partial f(y, z)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},$$

oder

$$\frac{df(y, z)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Digitized by Google

oder
$$\frac{df(y,z)}{dx}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}.$$

Dagegen nur
$$\frac{df(x,y)}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x},$$
oder
$$\frac{df(x,y)}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.\,*$$

So ist
$$\frac{d}{dx}\left(xy^4+7x+8y^3-\frac{1}{xy}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(xy^4+7x+8y^3-\frac{1}{xy}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(xy^4+7x+8y^3-\frac{1}{xy}\right)\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$=y^4+7+\frac{1}{x^2y}+\left(4xy^3+24y^2+\frac{1}{xy^2}\right)\frac{\partial y}{\partial x},$$
oder nach einer andern Bezeichnungsweise (§. 11):
$$d\left(xy^4+7x+8y^3-\frac{1}{xy}\right)=\left(y^4+7+\frac{1}{x^2y}\right)dx+\left(4xy^3+24y^2+\frac{1}{xy^2}\right)dy.$$

§. 16.

Funktion dreier und mehr Veränderlichen.

Seyen y, z, u Funktionen von x und f (y, z, u) eine Funktion dieser drei Grössen, von der man den (vollständigen) Differentialquotienten bestimmen soll.

Nach der Erklärung des §. 11 ist
$$\frac{df(y,z,u)}{dx}=Gr\frac{f(y+\Delta y,\ z+\Delta z,\ u+\Delta u)-f(y,z,u)}{\Delta x}$$
$$=Gr\left[\frac{f(y+\Delta y,\ z+\Delta z,\ u+\Delta u)-f(y,\ z+\Delta z,\ u+\Delta u)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right.$$
$$\left.+\frac{f(y,z+\Delta z,\ u+\Delta u)-f(y,z,u+\Delta u)}{\Delta z}\frac{\Delta z}{\Delta x}+\frac{f(y,z,u+\Delta u)-f(y,z,u)}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right],$$
wie man sich leicht überzeugen wird, wenn man nur die Multiplikationen ausführt und dann zusammenzieht. Setzt man nun, wie in §. 15, II:
$$\frac{\partial f(y,z,u)}{\partial y}=f_1(y,z,u),\quad \frac{\partial f(y,z,u)}{\partial z}=f_2(y,z,u),\quad \frac{\partial f(y,z,u)}{\partial u}=f_3(y,z,u),$$
so ist, wie §. 15, II:

---

* Es herrscht in Bezug auf die Bezeichnungsweise grosse Verschiedenheit. Jacobi bezeichnete die vollständigen Differentialquotienten mit d, die partiellen mit ∂; Euler die vollständigen mit ∂, die partiellen dadurch, dass er sie in Klammern schloss, also $\frac{\partial f}{\partial y}$ schrieb $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$; Andere setzen x, u. s. w. als Zeiger an, schreiben also für $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$: $\partial_x f(x,y)$; die vollständigen werden zuweilen durch D bezeichnet, also $\frac{df(x,y)}{dx}$ durch $D_x f(x,y)$; auch wurde vorgeschlagen, zu schreiben $\frac{df(x,y)}{dx}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ u. s. w. Bei den meisten Franzosen wird Alles durch d bezeichnet, ohne Rücksicht auf vollständige oder partielle Differentialquotienten.

Digitized by Google

$$\frac{d\,f(y, z, u)}{dx} = Gr\left\{[f_1(y, z+\Delta z, u+\Delta u)+\alpha]\frac{\Delta y}{\Delta x} + [f_2(y, z, u+\Delta u)+\beta]\frac{\Delta z}{\Delta x} + [f_3(y, z, u)+\gamma]\frac{\Delta u}{\Delta x}\right\},$$

wo α mit Δy, β mit Δz, γ mit Δu gegen Null geht. Da nun mit Δx auch Δy, Δz, Δu gegen Null gehen, indem wie immer y, z, u stetige Funktionen sind, so ist

$$\frac{d\,f(y, z, u)}{dx} = f_1(y, z, u)\frac{\partial y}{\partial x} + f_2(y, z, u)\frac{\partial z}{\partial x} + f_3(y, z, u)\frac{\partial u}{\partial x},$$

d. h.
$$\frac{d\,f(y, z, u)}{dx} = \frac{\partial f(y, z, u)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f(y, z, u)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f(y, z, u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (12)$$

in welcher Gleichung die partiellen Differentialquotienten ganz dieselbe Bedeutung haben, wie bereits angegeben.

Es ist wohl aus dem Angegebenen leicht zu ersehen, in welcher Weise man sich hier zu benehmen hat, um zum Ziele zu gelangen, * und man sieht, dass allgemein:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(y, z, u, v, ..) = \frac{\partial f(y, z, u, v, ..)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f(y, z, u, v, ..)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f(y, z, u, v, ..)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\\ + \frac{\partial f(y, z, u, v, ..)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots\ldots,\end{aligned}\right\} (13)$$

wenn y, z, u. v, ... Funktionen von x sind. Die Formel (13) ist nun die allgemeinste Formel für Differenzirung. Man erhält hiernach:

$$\frac{d(y z u v ..)}{dx} = \frac{\partial}{\partial x}(y z u v \ldots) = z u v \ldots \frac{\partial y}{\partial x} + y u v \ldots \frac{\partial z}{\partial x} + y z v \ldots \frac{\partial u}{\partial x} + y z u \ldots \frac{\partial v}{\partial x} + \ldots$$

welche Formel die Verallgemeinerung von §. 12, V ist.

Sey etwa zu bestimmen:

$$\frac{d}{dx}\left[arc\,(tg = \sqrt{1-x^2}) + a^x\,arc\,(tg = \sqrt{1-x^2}) + 7\,a^{2x} - 3\,a^x\,l(x)\right].$$

Man setze $arc\,(tg = \sqrt{1-x^2}) = y$, $a^x = z$, $l(x) = u$, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}arc\,(tg = \sqrt{1-x^2}),\quad \frac{\partial z}{\partial x} = a^x\,l(a),\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x}.$$

Um $\frac{\partial y}{\partial x}$ zu erhalten, setze man (§. 13) $1 - x^2 = v$, $\sqrt{v} = w$, und hat

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}arc\,(tg = w) = \frac{\partial\,arc\,(tg = w)}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{1+w^2}\cdot\frac{\partial v^{\frac{1}{2}}}{\partial v}\frac{\partial(1-x^2)}{\partial x} = \frac{1}{1+w^2}\cdot\frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)$$

$$= -\frac{x}{(1+w^2)\sqrt{v}} = -\frac{x}{(1+v)\sqrt{v}} = -\frac{x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}};$$

dann $\frac{\partial}{\partial x}\left[arc\,(tg = \sqrt{1-x^2})\,a^x\,arc\,(tg = \sqrt{1=x^2}) + 7\,a^{2x} - 3\,a^x\,l(x)\right] =$

* Man fügt jeweils Grössen zu und subtrahirt die nämlichen Grössen, so dass Differenzen zum Vorschein kommen, bei denen blos y, oder blos z, u. s. w. sich geändert hat. Statt dann die erste durch Δx zu dividiren, dividirt man durch Δy, und multiplizirt mit $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ u. s. w., wie sich diess aus der Darstellung im Texte von selbst ergibt.

Digitized by Google

$$\frac{\partial}{\partial x}[y+zy+7z^2-3zu]=\frac{\partial[y+..-3zu]}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial[y+..-3zu]}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial[y+..-3zu]}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$=[1+z]\left(\frac{-x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}\right)+[y+14z-3u]a^x\, l(a)-3z.\frac{1}{x}=-\frac{(1+a^x)x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$
$$+[arc(tg=\sqrt{1-x^2})+14a^x-3\,l(x)]\,a^x\,l(a)-\frac{3a^x}{x}.$$

Zur Uebung legen wir vor:

$$\frac{\partial}{\partial x}l\left(\frac{1-\cos nx}{1+\cos nx}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{n}{\sin nx};\quad \frac{\partial}{\partial x}a^{b^x}=l(a)\,l(b)\,a^{b^x}\,b^x;\quad \frac{\partial}{\partial x}arc\left(\sin=\sqrt{\frac{a}{a+x}}\right)$$
$$=-\frac{1}{2(a+x)}\sqrt{\frac{a}{x}};\ \frac{\partial}{\partial x}arc\left(tg=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,tg\frac{1}{2}x\right)=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x};\ \frac{\partial}{\partial x}x^{\frac{1}{x}}=x^{\frac{1}{x}}\frac{1-l(x)}{x^2};$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(\cos x)^{\sin x}=(\cos x)^{\sin x}\left[\cos x\,l(\cos x)-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right];\quad \frac{\partial}{\partial x}\left[(x+a)^m(x+b)^n(x+c)^r\ldots\right]$$
$$=\frac{mz}{x+a}+\frac{nz}{x+b}+\frac{rz}{x+c}+\ldots \text{ wo } z=(x+a)^m(x+b)^n(x+c)^r\ldots;\ \frac{\partial}{\partial x}arc\left(\cos=\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x};\quad \frac{\partial}{\partial x}\sin\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}=\frac{a}{\sqrt{(1-a^2x^2)^3}}\cos\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}};\quad \frac{\partial}{\partial x}arc\left(\sin=\frac{y}{z}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{z^2-y^2}}\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{y}{z\sqrt{z^2-y^2}}\frac{\partial z}{\partial x}\ (z>0).$$

Man pflegt zuweilen die Gleichung (13) abkürzungsweise auch so zu schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial x}f(y,z,u,v,..)=\frac{d\,f(y,z,u,v,..)}{dx}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\ldots.$$

Ferner ist klar, dass man für jeden einzelnen Fall auch die früheren Sätze anwenden kann und meistens gleich schnell zum Ziele gelangt. So sey etwa zu bestimmen:

$$\frac{d}{dx}[4x^3a^x+2x^2a^{2x}+3x\,l(x)-5\sin x].$$

Statt nun $a^x=y$, $l(x)=z$, $\sin x=u$ zu setzen, verfährt man geradezu nach den Regeln des §. 12 und hat für die gesuchte Grösse:

$$4\left[x^3\frac{\partial a^x}{\partial x}+a^x\frac{\partial x^3}{\partial x}\right]+2\left[x^2\frac{\partial a^{2x}}{\partial x}+a^{2x}\frac{\partial x^2}{\partial x}\right]+3\left[x\frac{\partial l(x)}{\partial x}+l(x)\frac{\partial x}{\partial x}\right]-5\frac{\partial \sin x}{\partial x}.$$

Da aber $\frac{\partial a^x}{\partial x}=a^x\,l(a)$ (§. 13, III), $\frac{\partial a^{2x}}{\partial x}=\frac{\partial a^y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=a^{2x}\,l(a)\,2=2a^{2x}l(a)$, $\frac{\partial l(x)}{\partial x}=\frac{1}{x}$ u. s. w., so erhält man

$$4x^3a^x\,l(a)+12a^x x^2+4x^2a^{2x}l(a)+4xa^{2x}+3+3\,l(x)-5\cos x$$

als gesuchten Werth, den man in der früheren Weise gleichfalls erhalten hätte.

Eben so kann man sich manchmal durch Umformungen helfen. Ist z. B. $\frac{\partial}{\partial x}x^x$ (§. 15, II) zu bestimmen, so setze man $x^x=y$ und hat $l(y)=x\,l(x)$, also (§. 11) $\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x}=1+l(x)$, $\frac{\partial y}{\partial x}=y[1+l(x)]$, d. h. $\frac{\partial}{\partial x}x^x=x^x[1+l(x)]$.

Man übersieht leicht, dass mittelst der gegebenen Regeln es möglich ist, alle, auch die zusammengesetztesten Funktionen von x zu differenziren. Hiebei ist es wohl unnöthig, zu bemerken, dass wenn nicht x die unabhängig Veränderliche ist, sondern etwa s, und p, q, r.... Funktionen von s sind, man eben so hat:

$$\frac{d}{ds}f(p,q,r\ldots)=\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial s}+\ldots$$



Digitized by Google

Wollte man endlich die bereits in der Anmerkung zu §. 11 berührte Bezeichnung der Differentiale einführen, so wäre

$$\frac{d}{dx} f(y, z, u, v, ..)\, dx = df(y, z, u, v, ...),\ \frac{\partial y}{\partial x} dx = dy,\ \frac{\partial z}{\partial x} dx = dz,\ \frac{\partial u}{\partial x} dx = du, ...$$

so dass also: $d.f(y, z, u, v, ..) = \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + ...,$

und es wäre wieder $d.f(y, z, u, v, ..)$ die unendlich kleine Zunahme, welche $f(y, z, u, v, ..)$ erleidet, wenn $y, z, ...$ um die unendlich kleinen Grössen dy, $dz, ...$ zunehmen, und zwar in Folge dessen, dass x um die unendlich kleine Grösse dx sich ändert.

§. 17.

Differenzirung unentwickelt gegebener Funktionen.

I. Im Seitherigen haben wir vorausgesetzt, die zu differenzirenden Funktionen seyen geradezu, oder, wie man sagt, entwickelt gegeben. Es kann sich aber ereignen, dass man eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen hat, die im Allgemeinen durch

$$f(x, y) = 0 \tag{14}$$

dargestellt werden kann. Ist in (14) der Werth von x z. B. gegeben, so folgt daraus der Werth von y, d. h. vermöge (14) ist y eine Funktion von x, die durch eben diese Gleichung unentwickelt gegeben ist. Es ist klar, dass man eben so gut sagen könnte, x sey eine Funktion von y. Aus der Gleichung

$$5x^2y + 3x \sin y - 12 \sin y + 8 = 0$$

folgt also, dass y eine Funktion von x ist, die in einzelnen Fällen wohl entwickelt werden kann, meistens aber eine Entwicklung nicht zulässt, wie gerade im vorliegenden Beispiele. Soll man nun dennoch $\frac{\partial y}{\partial x}$ bestimmen, so wird man beachten, dass nach (14) die zusammengehörigen Werthe von x und y immer so beschaffen sind, dass $f(x, y)$ Null, mithin konstant wird. Daraus folgt, dass $\frac{df(x,y)}{dx} = \frac{d.0}{dx} = 0$ (§. 11, I), d. h. [§. 15, Gl. (12)]:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \tag{14'}$$

aus welcher Gleichung nun $\frac{\partial y}{\partial x}$ gefunden wird.

Aus $$y^3 + x^3 - 3axy = 0$$

folgt $$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3ay,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3ax,$$

also $$3x^2 - 3ay + (3y^2 - 3ax)\frac{\partial y}{\partial x} = 0,\ \ \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

Eben so aus: $$y^4 + 2x^2y^2 + x^4 - 8axy^2 = 0:\ \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2ay^2 - xy^2 - x^3}{y^3 + x^2y - 4axy};$$

$$y^x - x^y = 0:\ \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y^2 - xy\,l(y)}{x^2 - xy\,l(x)},$$

$$\sin 2x - l(x + y) + y^2x^3 = 0:\ \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1 - (3x^2y^2 + 2\cos 2x)(x + y)}{-1 + 2x^3y\,(x + y)}.$$

Digitized by Google

Es versteht sich von selbst, dass man, statt die Gleichung (14') in der hier vorgeschriebenen Form zu bilden, ganz direkt nach den früheren Regeln die Gleichung (14) differenziren könnte. So erhielte man aus $\sin 2x + y^2 x^3 - l(x+y) = 0$:

$$2\cos 2x + 2yx^3 \frac{\partial y}{\partial x} + 3y^2 x^2 - \frac{1}{x+y}\left(1 + \frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0,$$

d. h.
$$\left(2yx^3 - \frac{1}{x+y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} = -2\cos 2x - 3y^2x^2 + \frac{1}{x+y},$$

woraus derselbe Werth wie oben folgt.

Eben so kann die Gleichung (14') nach den ursprünglichen Regeln abgeleitet werden. Geht nämlich x in $x + \Delta x$ über, so muss y in $y + \Delta y$ übergehen und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ müssen nothwendig wieder der Gleichung (14) genügen, d. h. man muss haben:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0.$$

Aus dieser Gleichung und (14) folgt durch Subtraktion und Division mit Δx:

$$\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta x} = 0,$$

also auch
$$Gr\,\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta x} = 0,$$

d. h.
$$Gr\left[\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} + \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right] = 0$$

oder (§. 15)
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

II. Gesetzt man habe zwischen den drei Veränderlichen x, y, z die zwei Gleichungen

$$f(x, y, z) = 0;\quad F(x, y, z) = 0, \tag{15}$$

so folgt daraus, dass zwei dieser Veränderlichen Funktionen der dritten sind, z. B. y und z Funktionen von x, indem, wenn eine der drei Grössen bekannt ist, die zwei andern mittelst der Gleichungen (15) bestimmt werden können. Um dann $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ zu erhalten, wird man gemäss §. 16, Gl. (13) und §. 11, I aus (15) ziehen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \tag{15'}$$

aus welchen zwei Gleichungen die Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ leicht gefunden werden.

Man sieht leicht, dass wenn überhaupt zwischen n Veränderlichen x, y, z, u, ..., $n-1$ Gleichungen gegeben sind, $n-1$ der Veränderlichen als Funktionen der n^{ten} (z. B. x) zu betrachten sind, und dass man durch Differenzirung der $n-1$ Gleichungen nach den Regeln des §. 16 die zur Bestimmung der Differentialquotienten dieser abhängigen Veränderlichen hinreichenden Gleichungen erhalten wird.

Auch hier versteht es sich ganz von selbst, dass statt die durch (15') gegebene Form der zur Bestimmung von $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ nöthigen Formeln anzuwenden, man durch unmittelbare Differenzirung nach den früheren Regeln Gleichungen erhalten könnte, die zu demselben Zwecke verwendet werden können.

III. Die Gleichung (14'), in der x, y, $\frac{\partial y}{\partial x}$ vorkommen, bildet eine Differentialgleichung von (14). Man kann oft aber durch Verbindung von

Digitized by Google

(14) und (14′) noch eine weitere Differentialgleichung herstellen. Kommt nämlich in (14) eine gewisse Konstante vor, die auch noch in (14′) enthalten ist, so kann man dieselbe zwischen beiden Gleichungen eliminiren und erhält dann eine Gleichung zwischen x, y, $\frac{\partial y}{\partial x}$, die aus (14) folgt, aber jene Konstante nicht enthält. Die Gleichung (14) heisst die Integralgleichung oder ursprüngliche Gleichung von (14′) sowohl, als der wie eben angegeben erhaltenen. Es folgt hieraus offenbar, dass man sich zu letzterer eine ursprüngliche Gleichung gehörend denken könne, die eine Konstante, die in der Differentialgleichung nicht vorkommt, enthält. (Vergl. §. 90).

Sey z. B. die ursprüngliche Gleichung:

$$y^2 + ax^2 + 3x + 5 = 0,$$

so folgt daraus zunächst:

$$2y\frac{\partial y}{\partial x} + 2ax + 3 = 0,$$

und wenn man a zwischen beiden Gleichungen eliminirt:

$$2y^2 - 2xy\frac{\partial y}{\partial x} + 3x + 10 = 0,$$

eine Differentialgleichung, die ebenfalls zur angegebenen Gleichung gehört, die Konstante a aber nicht mehr enthält.

Dritter Abschnitt.

Differentialquotienten höherer Ordnung. Bedeutung gewisser Differentialquotienten. Vertauschung der unabhängig Veränderlichen.

§. 18.

Höhere Differentialquotienten.

I. Im zweiten Abschnitt wurde gezeigt, wie man in allen Fällen den Differentialquotienten irgend einer Funktion zu bestimmen im Stande ist. Derselbe ist dabei im Allgemeinen wieder als Funktion der unabhängig Veränderlichen erschienen, so dass man abermals nach dem Differentialquotienten dieser neuen Funktion fragen kann. Bildet man denselben, so sagt man, man habe den zweiten Differentialquotienten der ursprünglichen Funktion bestimmt. Dieser ist selbst wieder eine Funktion der unabhängig Veränderlichen, deren Differentialquotient dann den dritten Differentialquotienten der ursprünglichen Funktion bildet. Wie man hier weiter gehen kann, ist klar, und man erhält so die Differentialquotienten höherer Ordnung, während man den früher kurzweg „Differentialquotient" geheissenen, nunmehr ersten Differentialquotient nennen kann. Was die Bezeichnung anbelangt, so sind für f(x):

Digitized by Google

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3}, \ldots\ldots, \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}$$

der erste, zweite, ..., n^te Differentialquotient, die man zuweilen auch durch

$$f'(x), \; f''(x), \; f^3(x), \ldots\ldots, f^n(x),$$

oder, wenn man vollständige Differentialquotienten bezeichnen will (§. 15) durch

$$\frac{d f(x)}{dx}, \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \quad \frac{d^3 f(x)}{dx^3}, \ldots, \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

bezeichnet. Eben so sind $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \ldots\ldots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ oder $\frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n}$ der erste, zweite, ..., n^te Differentialquotient von y.

II. Es ist nun leicht, die höheren Differentialquotienten zu bilden, da man eben bloss nach den früheren Regeln zu differenziren hat. So ist $\frac{\partial x^m}{\partial x} = m x^{m-1}$ (§. 13, I), $\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^2} = m \frac{\partial x^{m-1}}{\partial x} = m(m-1) x^{m-2}$ (§. 12, III), $\frac{\partial^3 x^m}{\partial x^3} =$

$$m(m-1)(m-2) x^{m-3}, \ldots\ldots$$

allgemein offenbar $\frac{\partial^n x^m}{\partial x^n} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1) x^{m-n}$.

Ist dabei $m = n$ (also m eine ganze positive Zahl), so ist $\frac{\partial^n x^n}{\partial x^n} = n(n-1) \ldots 1$; ist m positiv und ganz, aber $< n$, so ist $\frac{\partial^n x^m}{\partial x^n} = 0$.

$$\frac{\partial\, l(x)}{\partial x} = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad \frac{\partial^2 l(x)}{\partial x^2} = -1 x^{-2} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial^3 l(x)}{\partial x^3} = 2 x^{-3} = \frac{2}{x^3}, \quad \frac{\partial^4 l(x)}{\partial x^4} = -2.3 x^{-4}$$

$$= -\frac{2.3}{x^4}, \ldots\ldots, \frac{\partial^n l(x)}{\partial x^n} = \pm \frac{2.3.4..(n-1)}{x^n},$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn n ungerade, das untere, wenn n gerade ist.

$$\frac{\partial e^x}{\partial x} = e^x \quad \frac{\partial^2 e^x}{\partial x^2} = e^x, \ldots\ldots\ldots, \frac{\partial^n e^x}{\partial x^n} = e^x;$$

$$\frac{\partial a^x}{\partial x} = a^x\, l(a), \quad \frac{\partial^2 a^x}{\partial x^2} = a^x\, [l(a)]^2, \quad \frac{\partial^3 a^x}{\partial x^3} = a^x\, [l(a)]^3, \ldots\ldots, \frac{\partial^n a^x}{\partial x^n} = a^x\, [l(a)]^n.$$

Es ist ferner $\frac{\partial \sin x}{\partial x} = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, also da immer (§. 13) $\frac{\partial \sin(x+a)}{\partial x} = \cos(x+a) = \sin\left(x + a + \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\frac{\partial \sin x}{\partial x} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{\partial^2 \sin x}{\partial x^2} = \frac{\partial \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\partial x} = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right), \quad \frac{\partial^3 \sin x}{\partial x^3} = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\ldots\ldots, \frac{\partial^n \sin x}{\partial x^n} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

welch letztere Grösse $= \sin x$ ist, wenn sich n durch 4 dividiren lässt; $= \cos x$, wenn bei der Division durch 4 noch 1 als Rest bleibt; $= -\sin x$, wenn 2 als Rest bleibt; $= -\cos x$, wenn 3 als Rest bleibt. Ganz eben so

$$\frac{\partial \cos x}{\partial x} = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{\partial^2 \cos x}{\partial x^2} = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right), \ldots\ldots, \frac{\partial^n \cos x}{\partial x^n} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Digitized by Google

Sey $y = arc(tg = x)$, so ist $\frac{\partial y}{\partial x} = cos^2 y$ (§. 13, V); demnach $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial cos^2 y}{\partial x}$ $= \frac{\partial cos^2 y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = -2 cos\, y\, sin\, y \frac{\partial y}{\partial x} = -2 sin\, y\, cos\, y\, cos^2 y = -sin\, 2y\, cos^2 y$ $= sin\left(2y + \frac{2\pi}{2}\right) cos^2 y$.

Dann ist $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -\frac{\partial (sin 2y\, cos^2 y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = -[2 cos\, 2y\, cos^2 y - 2 sin\, 2y\, cos\, y\, sin\, y]\, cos^2 y = -2 [cos\, 2y\, cos\, y - sin\, 2y\, sin\, y]\, cos^3 y = -2 cos\, 3y\, cos^3 y = 2\, sin\left(3y + \frac{3\pi}{2}\right) cos^3 y$.

Man vermuthet daraus, dass allgemein für $y = arc(tg = x)$:

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = 2.3 \ldots (n-1)\, sin\left(ny + \frac{n\pi}{2}\right) cos^n y. \qquad (a)$$

Der **Beweis** dieser Behauptung wird durch diejenige Beweisform geführt, die man den „Schluss von n auf n + 1" nennt, welche wir bereits in der Note zu §. 5, I. angewendet haben. Sie wird immer gebraucht, wenn man ein **thatsächlich** gefundenes und als richtig vermuthetes Gesetz genau erweisen will. Wir nehmen also an, die eben angegebene Gleichung gelte für $n = 2, 3, \ldots, r$ und zeigen, **dass sie dann auch nothwendig** für $n = r + 1$ **gelten muss.**

Sey also

$$\frac{\partial^r y}{\partial x^r} = 2.3 \ldots (r-1)\, sin\left(ry + \frac{r\pi}{2}\right) cos^r y, \qquad (b)$$

so erhält man hieraus durch Differentiation:

$$\frac{\partial^{r+1} y}{\partial x^{r+1}} = 2.3 \ldots (r-1) \frac{\partial}{\partial x}\left[sin\left(ry + \frac{r\pi}{2}\right) cos^r y\right]$$

$$= 2.3 \ldots (r-1) \frac{\partial}{\partial y}\left[sin\left(ry + \frac{r\pi}{2}\right) cos^r y\right] \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$= 2.3 \ldots (r-1)\left[r\, cos\left(ry + \frac{r\pi}{2}\right) cos^r y - r\, sin\left(ry + \frac{r\pi}{2}\right) cos^{r-1} y\, sin\, y\right] cos^2 y$$

$$= 2.3 \ldots r\left[cos\left(ry + \frac{r\pi}{2}\right) cos\, y - sin\left(ry + \frac{r\pi}{2}\right) sin\, y\right] cos^{r+1} y$$

$$= 2.3 \ldots r\, cos\left(ry + y + \frac{r\pi}{2}\right) cos^{r+1} y = 2.3 \ldots r\, sin\left[(r+1)y + \frac{(r+1)\pi}{2}\right] cos^{r+1} y.$$

Da aber diese Formel, welche richtig ist, wenn die Formel (b) es ist, aus (a) hervorgeht, wenn man für n setzt $r + 1$, so folgt daraus, dass wenn die Formel (a) richtig ist für $n = r$, sie nothwendig auch richtig seyn muss für $n = r + 1$. Für $n = 2, 3$ haben wir die Richtigkeit von (a) unmittelbar erkannt, so dass (a) auch gilt für $n = 4$; mithin nun auch für $n = 5$ u. s. w. — d. h. (a) gilt für jedes n.

III. Man wird nun auch leicht folgende allgemeine Sätze für richtig erkennen: $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ ist der n^{te} Differentialquotient von y, der $n - 1^{te}$ von $\frac{\partial y}{\partial x}$, der $n - 2^{te}$ von $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, ..., der erste von $\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}$.

$$\frac{\partial^n (y \pm z \pm u \ldots)}{\partial x^n} = \frac{\partial^n y}{\partial x^n} \pm \frac{\partial^n z}{\partial x^n} \pm \frac{\partial^n u}{\partial x^n}, \ldots \quad \frac{\partial^n (y + C)}{\partial x^n} = \frac{\partial^n y}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial^n (Cy)}{\partial x^n} = C \frac{\partial^n y}{\partial x^n}.$$

Digitized by Google

§. 18'.

Die höhern Differentialquotienten des Produkts y z.

Wir stellen uns die Aufgabe, den Werth von $\frac{d^n (yz)}{dx^n}$, wenn y und z Funktionen von x sind, zu ermitteln. Nach §. 15, III kann man diesen Werth übrigens eben so wohl auch durch $\frac{\partial^n (yz)}{\partial x^n}$ bezeichnen, da ein „partieller Differentialquotient nach x" hier keinen Sinn hätte.

Nach §. 12, V ist

$$\frac{d(yz)}{dx} = y\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Differenzirt man nochmals, so erhält man:

$$\frac{d^2(yz)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(y\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{d}{dx}\left(z\frac{\partial y}{\partial x}\right) = y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$= y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}z.$$

Eben so ergibt sich:

$$\frac{d^3(yz)}{dx^3} = y\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}z.$$

Daraus schliesst man, dass allgemein:

$$\frac{d^n(yz)}{dx^n} = y\frac{\partial^n z}{\partial x^n} + \frac{n}{1}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}} + \ldots\ldots + \frac{\partial^n y}{\partial x^n}z \quad (16)$$

sey, worin die Koeffizienten die Binomialkoeffizienten für die Potenz n (§. 5) sind. Der Beweis der Richtigkeit wird durch den Schluss von n auf n + 1 geführt (§. 5 Note, §. 18, II).

Wir wollen nun von dem Satze (16) einige Anwendungen machen.

I. Da $\frac{\partial e^{ax}}{\partial x} = a e^{ax}$, $\frac{\partial^2 e^{ax}}{\partial x^2} = a^2 e^{ax}, \ldots\ldots, \frac{\partial^n e^{ax}}{\partial x^n} = a^n e^{ax}$, so sey in (16) $y = e^{bx}$, $z = e^{ax}$, also $yz = e^{(a+b)x}$, $\frac{\partial^n (yz)}{\partial x^n} = (a+b)^n e^{(a+b)x}$, und man hat:

$$(a+b)^n e^{(a+b)x} = e^{bx} a^n e^{ax} + \frac{n}{1} b e^{bx} a^{n-1} e^{ax} + \frac{n(n-1)}{1.2} b^2 e^{bx} a^{n-2} e^{ax} + \ldots + b^n e^{bx} e^{ax}.$$

Da der Faktor $e^{(a+b)x} = e^{bx} e^{ax}$ beiderseitig vorhanden ist, so kann man durch ihn dividiren und hat:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 + \ldots\ldots\ldots + b^n, \quad (17)$$

was auch immer a und b seyen. Diess ist der **binomische** Satz für ein ganzes positives n (§. 5).

II. Man setze $y = x^a$, $z = x^b$ und beachte, dass $\frac{\partial^n x^m}{\partial x^n} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$, so folgt aus (16), indem $yz = x^a x^b = x^{a+b}$, $\frac{\partial^n x^{a+b}}{\partial x^n} = (a+b)(a+b-1)\ldots\ldots (a+b-n+1)x^{a+b-n}$:

$$(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-n+1)x^{a+b-n} = x^a . b(b-1)\ldots(b-n+1)x^{b-n}$$
$$+ \frac{n}{1} a x^{a-1} b(b-1)\ldots(b-n+2)x^{b-n+1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a(a-1)x^{a-2} b(b-1)\ldots$$
$$\ldots(b-n+3)x^{b-n+2} + \ldots\ldots + a(a-1)\ldots(a-n+1)x^{a-n} x^b.$$

Digitized by Google

Man sieht leicht, dass x^{a+b-n} beiderseitig Faktor ist; lässt man ihn weg, so ist

$$(a+b)(a+b-1)..(a+b-n+1)=b(b-1)...(b-n+1)+\frac{n}{1}ab(b-1)..(b-n+2)$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}a(a-1)b(b-1)..(b-n+3)+.....+a(a-1)...(a-n+1).$$

Dividirt man endlich beiderseitig durch $1.2....n$, so findet sich leicht:

$$\frac{(a+b)(a+b-1)...(a+b-n+1)}{1.2...........n}=\frac{b(b-1)...(b-n+1)}{1.2......n}+\frac{a}{1}.\frac{b(b-1)..(b-n+2)}{1.2....(n-1)}$$
$$+\frac{a(a-1)}{1.2}.\frac{b(b-1)...(b-n+3)}{1.2.....(n-2)}+.......+\frac{a(a-1)...(a-n+1)}{1.2........n}, \quad (18)$$

a und b mögen seyn, was sie wollen.

III. Man soll den Werth von

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}[(x-a)^m\varphi(x)]$$

für $x=a$ ermitteln, wenn m eine positive ganze Zahl ist, wobei vorausgesetzt ist, dass $\varphi(x)$, $\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}$, ..., $\frac{\partial^n\varphi(x)}{\partial x^n}$ für $x=a$ nicht unendlich gross werden.

Man hat aus (16):

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}[(x-a)^m\varphi(x)]=(x-a)^m\varphi^n(x)+\frac{n\,m}{1}(x-a)^{m-1}\varphi^{n-1}(x)+\frac{n(n-1)}{1.2}m(m-1)$$
$$(x-a)^{m-2}\varphi^{n-2}(x)+....+m(m-1).....(m-n+1)(x-a)^{m-n}\varphi(x),$$

wenn man die Differentialquotienten von $\varphi(x)$ mit $\varphi'(x),...,\varphi^n(x)$ bezeichnet.

Die eben angegebene Gleichung setzt stillschweigend voraus, dass $m>n$ sey, da sonst die letzten Glieder bereits weggefallen wären; ist nämlich $m<n$, so ist $\frac{\partial^m(x-a)^m}{\partial x^m}=(m-1)\,...1$, $\frac{\partial^{m+1}(x-a)^m}{\partial x^{m+1}}=0$ u. s. w., also schliesst dann die Reihe mit dem $m+1^{\text{ten}}$ Gliede, d. h. mit $\frac{n(n-1)...(n-m+1)}{1.2......m}$ $m(m-1)...1\,\varphi^{n-m}(x)=n(n-1)...(n-m+1)\varphi^{n-m}(x)$.

Bezeichnen wir nun durch $\varphi^r(a)$ den Werth von $\varphi^r(x)$ für $x=a$, so folgt offenbar aus obiger Gleichung: Es ist für $x=a$

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}[(x-a)^m\varphi(x)]=\begin{cases}0, \text{ wenn } m>n,\\ m(m-1)...1\,\varphi(a), \text{ wenn } m=n.\\ n(n-1)...(n-m+1)\varphi^{n-m}(a), \text{ wenn } m<n.\end{cases} \quad (19)$$

IV. Setzt man in (19) $\varphi(x)=\frac{\psi(x)^n}{\psi(x)^m}=\psi(x)^{n-m}$, wobei wir $\psi(a)$ nicht $=0$ voraussetzen wollen, so ist:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[\left(\frac{x-a}{\psi(x)}\right)^m\psi(x)^n\right]_{x=a}=\begin{cases}0, \text{ wenn } m>n,\\ m(m-1)...1, \text{ wenn } m=n,\\ n(n-1)...(n-m+1)\frac{\partial^{n-m}}{\partial x^{n-m}}\left[\psi(x)^{n-m}\right]_{x=a}, \; m<n\end{cases} \quad (20)$$

wobei die Anhängung von $x=a$ bedeutet, man solle nach vollzogener Differenzirung $x=a$ setzen und beachtet wird, dass für $n=m$: $\frac{\psi(a)^n}{\psi(a)^m}=1$ ist. Dabei haben wir $\psi(a)$ nicht Null vorausgesetzt, um im zweiten und dritten Falle keinen Schwierigkeiten zu begegnen.

Setzt man in (19) $n-1$ statt n, so hat man

Digitized by Google

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[(x-a)^m \varphi(x)\right]_{x=a} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } m > n-1, \\ m(m-1)\ldots 1\,\varphi(a), \text{ wenn } m = n-1, \\ (n-1)(n-2)\ldots(n-m)\,\varphi^{n-m-1}(a), \text{ wenn } m < n-1. \end{cases}$$

Setzt man nunmehr in dieser Gleichung $\varphi(x) = \frac{1}{\psi(x)^m}\frac{\partial}{\partial x}[\psi(x)^n] = n\,\psi(x)^{n-m-1}\psi'(x)$, wobei wir wieder $\psi(a)$ nicht Null voraussetzen wollen, so ist

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[\left(\frac{x-a}{\psi(x)}\right)^m \frac{\partial}{\partial x}.\psi(x)^n\right]_{x=a}$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ wenn } m > n-1, \\ m(m-1)\ldots 1.n\,\psi(a)^{n-m-1}\psi'(a), \text{ wenn } m = n-1, \\ (n-1)(n-2)\ldots(n-m)\frac{\partial^{n-m-1}}{\partial x^{n-m-1}}\left[n\,\psi(x)^{n-m-1}\psi'(x)\right]_{x=a}, \text{ wenn } m < n-1. \end{cases}$$

Für $m = n-1$ ist aber $n-m-1 = 0$, also $\psi(a)^{n-m-1} = 1$, da nicht $\psi(a) = 0$; ferner dann $m(m-1)\ldots 1.n = n(n-1)\ldots 1$.

Eben so ist $(n-1)(n-2)\ldots(n-m)\frac{\partial^{n-m-1}}{\partial x^{n-m-1}}[n\,\psi(x)^{n-m-1}\psi'(x)]$

$$= n(n-1)\ldots(n-m)\frac{\partial^{n-m-1}}{\partial x^{n-m-1}}\left[\frac{1}{n-m}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)^{n-m}\right]$$

$$= n(n-1)\ldots(n-m+1)\frac{\partial^{n-m}}{\partial x^{n-m}}[\psi(x)^{n-m}],$$

so dass

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[\left(\frac{x-a}{\psi(x)}\right)^m \frac{\partial}{\partial x}.\psi(x)^n\right]_{x=a}$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ wenn } m > n-1, \\ n(n-1)\ldots.1\,\psi'(a), \text{ wenn } m = n-1, \\ n(n-1)\ldots..(n-m+1)\frac{\partial^{n-m}}{\partial x^{n-m}}\left[\psi(x)^{n-m}\right]_{x=a}, \text{ wenn } m < n-1. \end{cases} \quad (21)$$

Wir werden von diesen Sätzen später Gebrauch machen (§. 59).

V. Sey $y = arc(sin = x)$, also $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$ $(-2x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, so ist offenbar $(1-x^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = x\frac{\partial y}{\partial x}$.

Daraus folgt: $\frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}\left[(1-x^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}\left[x\frac{\partial y}{\partial x}\right]$.

Nun ist $\frac{\partial}{\partial x}(1-x^2) = -2x$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(1-x^2) = -2$, alle höheren Differentialquotienten davon $= 0$, mithin hat man:

$$(1-x^2)\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + \frac{n-2}{1}\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}(-2x) + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}}(-2) = x\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \frac{n-2}{1}\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}},$$

woraus folgt: $\quad (1-x^2)\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = (2n-3)x\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + (n-2)^2\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}}$,

eine Formel, die $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ aus $\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}$, $\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}}$ finden lehrt. Sie gibt:

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = x\frac{\partial y}{\partial x},$$

$$(1-x^2)\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 3x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x},$$

$$(1-x^2)\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 5x\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \text{ u. s. w.}$$



Digitized by Google

VI. Sey $y = arc(tg = x)$, also $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -(1+x^2)^{-2}(2x)$ $= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, so ist $(1+x^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -2x\frac{\partial y}{\partial x}$, woraus ganz wie oben folgt:

$$(1+x^2)\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + \frac{n-2}{1} 2x \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} 2 \frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} = -2x\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} - \frac{n-2}{1} 2 \frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}},$$

d. h.
$$(1+x^2)\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = -2(n-1)x\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} - (n-2)(n-1)\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}},$$

welche Formel ganz eben so benützt werden kann, wie die entsprechende in V.

§. 19.

Höhere Differentialquotienten von Funktionen mehrerer Funktionen.

I. Seyen y, z (stetige) Funktionen von x, $f(y, z)$ eine Funktion beider Grössen, so ist (§. 15, II):

$$\frac{d}{dx} f(y, z) = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Demnach (§. 12, IV, V):

$$\frac{d^2 f(y,z)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Nun sind $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ im Allgemeinen wieder Funktionen von y und z, so dass (§. 15, II):

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z}\frac{\partial z}{\partial x},$$

wo nun $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ bedeutet, man solle $f(y, z)$ zweimal bloss nach y differenziren, wobei also z wie konstant angesehen wird; $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z}$ bedeutet, man solle $f(y,z)$ zuerst partiell nach y, dann das Ergebniss partiell nach z differenziren. Eben so ist

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

II. Was nun die hier vorkommenden Grössen betrifft, so ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y}, \tag{22}$$

d. h. es ist gleichgiltig, ob man zuerst nach y und dann nach z differenzirt, oder ob man in umgekehrter Ordnung verfährt.

Um diesen Satz zu erweisen, beachten wir, dass $\frac{\partial f}{\partial y}$ der Gränzwerth von $\frac{f(y+\Delta y, z) - f(y, z)}{\Delta y}$ (für ein unendlich abnehmendes Δy) ist, so dass man setzen kann (§. 15, I):

$$f(y+\Delta y, z) - f(y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \alpha\right)\Delta y, \tag{a}$$

wo α mit Δy gegen Null geht. Dabei hängt natürlich α von y und z ab. Ist $\frac{\partial f}{\partial y}=\varphi(y,z)$, so hat man also

$$f(y+\Delta y,\ z)-f(y,z)=[\varphi(y,z)+\alpha]\,\Delta y. \qquad (a')$$

Setzt man in dieser Gleichung $z+\Delta z$ an die Stelle von z, so wird dieselbe zu

$$f(y+\Delta y,\ z+\Delta z)-f(y,z+\Delta z)=[\varphi(y,z+\Delta z)+\alpha']\,\Delta y, \qquad (b)$$

wo α' der Werth von α ist, wenn man $z+\Delta z$ statt z in letztern einsetzt. Da α von y und z abhängt, so ist also nach §. 15, I auch

$$\alpha'-\alpha=\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}+\alpha_1\right)\Delta z, \qquad (c)$$

wo α_1 mit Δz gegen Null geht. Die Grösse α' geht (wie α) nothwendig gegen 0, wenn Δy gegen Null, wie sich diess aus der Gleichung (b) auch unmittelbar ergeben würde. * Demnach geht, was auch Δz sey, die Differenz $\alpha'-\alpha$ (mit Δy) gegen Null, so dass, nach (c), die Grösse $\frac{\partial\alpha}{\partial z}+\alpha_1$ mit Δy gegen Null gehen muss.

Aus (a'), (b) und (c) folgt:

$$\frac{f(y+\Delta y,z+\Delta z)-f(y,z+\Delta z)}{\Delta y\,\Delta z}-\frac{f(y+\Delta y,z)-f(y,z)}{\Delta y\,\Delta z}$$
$$=\frac{\varphi(y,z+\Delta z)-\varphi(y,z)}{\Delta z}+\frac{\partial\alpha}{\partial z}+\alpha_1. \qquad (d)$$

Lässt man hier die Grössen Δy, Δz gegen Null gehen, so ist der Gränzwerth der ersten Seite dem der zweiten gleich. Letzterer ist aber (§. 15) gleich

$$\frac{\partial}{\partial z}\varphi(y,z)=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}.$$

Ist eben so $\frac{\partial f}{\partial z}=\psi(y,z)$, so hat man

$$f(y,z+\Delta z)-f(y,z)=[\psi(y,z)+\beta]\,\Delta z,$$
$$f(y+\Delta y,z+\Delta z)-f(y+\Delta y,z)=[\psi(y+\Delta y,z)+\beta']\,\Delta z,$$
$$\beta'-\beta=\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}+\beta_1\right)\Delta y,$$

wo β und β' mit Δz zu Null werden, β_1 mit Δy und $\frac{\partial\beta}{\partial y}+\beta_1$ mit Δz.

Daraus folgt

$$\frac{f(y+\Delta y,z+\Delta z)-f(y+\Delta y,z)}{\Delta y\,\Delta z}-\frac{f(y,z+\Delta z)-f(y,z)}{\Delta y\,\Delta z}$$
$$=\frac{\psi(y+\Delta y,z)-\psi(y,z)}{\Delta y}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\beta_1. \qquad (e)$$

Der Gränzwerth der zweiten Seite mit abnehmenden Δy, Δz ist

$$\frac{\partial}{\partial y}\psi(y,z)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y},$$

und eben diese Grösse ist also auch der Gränzwerth der ersten Seite. Da aber die ersten Seiten in (d) und (e) identisch sind, also gleiche Gränzwerthe

* Alle Grössen α in (a) gehen gegen Null mit Δy, was auch z sey, mithin auch wenn $z+\Delta z$ an die Stelle von z tritt.

Digitized by Google

haben, so müssen auch die zweiten Seiten solche Gränzwerthe besitzen, woraus die (22) folgt.

III. Demnach ist

$$\frac{d^2}{dx^2}f(y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Es ist leicht zu übersehen, wie man hier weiter gehen kann und dass, um $\frac{d^3 f(y,z)}{dx^3}$ zu bilden, man beachten muss, dass $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$, ..., $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ (§. 13), ...

So erhält man:

$$\frac{d^3 f(y,z)}{dx^3}=\left[\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right]\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+2\left[\frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial z\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right]\times$$
$$\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\left[\frac{\partial^3 f}{\partial z^2\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}\frac{\partial z}{\partial x}\right]\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$
$$+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}.$$

Da nun, dem Obigen gemäss, bei zwei Differenzirungen, die auf einander folgen, die Ordnung der Differenzirung gleichgiltig ist, so ist auch

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial z\,\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\,\partial z},\quad \frac{\partial^3 f}{\partial z^2\,\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial z\,\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial z^2},\ \text{u. s. w.,}$$

so dass

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}f(y,z)=\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\,\partial z}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\frac{\partial z}{\partial x}+3\frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial z^2}\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^3$$
$$+3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial x}+3\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}.$$

Wie man hier weiter gehen kann, ist wohl klar; ebenso, wie man sich zu benehmen hat, wenn man eine Funktion von mehr als zwei Funktionen von x hat.

Die direkte Rechnung nach den früheren Regeln führt gemeiniglich rascher zum Ziele.

So z. B. um $\frac{d^2}{dx^2}\left[x^2 y\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2\right]$ zu finden, hat man (§§. 12, 13):

$$\frac{d}{dx}\left[x^2 y\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2\right]=2xy\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+x^2\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+2x^2 y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3};$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[x^2 y\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2\right]=2y\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+2x\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+4xy\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+2x\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2$$
$$+x^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^3+2x^2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+4xy\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+2x^2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+2x^2 y\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)^2$$
$$+2x^2 y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=2y\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+4x\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+8xy\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+x^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^3+4x^2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$
$$+2x^2 y\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)^2+2x^2 y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}.$$

Digitized by Google

Höhere Differentialquotienten bei unentwickelten Funktionen.

IV. Ist eine Gleichung $f(x, y) = 0$ gegeben und man soll $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \ldots$ daraus bestimmen, so hat man, indem man diese Gleichung nach einander mehrmals differenzirt (§. 17, I):

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$$

d. h. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \text{ u. s. w.},$$

woraus $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots$ folgen, indem man zuerst $\frac{\partial y}{\partial x}$ aus der ersten Gleichung bestimmt, und dann diesen Werth in die zweite einsetzt, u. s. w. Im besondern Falle wird man durch direkte Differenzirung den Zweck eben so leicht erreichen.

Hat man z. B. die Gleichung

$$x e^y + 3x \sin y - 22 = 0,$$

so folgt daraus $$e^y + x e^y \frac{\partial y}{\partial x} + 3 \sin y + 3x \cos y \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

$$e^y \frac{\partial y}{\partial x} + e^y \frac{\partial y}{\partial x} + x e^y \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + x e^y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 3 \cos y \frac{\partial y}{\partial x} + 3 \cos y \frac{\partial y}{\partial x} - 3x \sin y \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$
$$+ 3x \cos y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$$

oder $$2 e^y \frac{\partial y}{\partial x} + x e^y \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 6 \cos y \frac{\partial y}{\partial x} - 3x \sin y \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + x e^y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 3x \cos y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \text{ etc.}$$

V. Aus dem bisher Dargestellten geht wohl zur Genüge hervor, dass mit Hilfe der Regeln, die im ersten Abschnitt gegeben wurden, die Bildung eines jeden Differentialquotienten möglich ist und einem Anstande wohl nicht unterliegt. Gewöhnlich ist die direkte Differenzirung der nach §. 19 vollzogenen vorzuziehen, da sie natürlich dasselbe Resultat gibt und gewiss leichter im Gedächtniss zu behalten ist. Zur Uebung wollen wir nun noch einige Differentialquotienten vorlegen.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^5 = 5\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = 2\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3};$$

$$\frac{d}{dx}\left[2x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x\frac{\partial y}{\partial x}\right] = 5x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x} + 2x^2 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3};$$

$$\frac{d}{dx}\,\frac{3xy\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = 3\,\frac{y\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + xy\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^3}\right)^2 - xy\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2};$$

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{x} = \frac{x\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 + x\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{x^2};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\, l\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = \frac{\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}; \quad \frac{\partial}{\partial x}\, arc\left(tg = \frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}.$$



Digitized by Google

§. 20.

Bereits in §. 11 haben wir auf die geometrische Bedeutung der Grösse $\frac{\partial y}{\partial x}$ aufmerksam gemacht. Wir wollen hier nun noch einige verwandte Untersuchungen über Bedeutung von Differentialquotienten zufügen.

Wachsen und Abnehmen einer Funktion.

I. Sey y eine stetige Funktion von x, und es nehme x um das positive Δx zu, werde also zu $x+\Delta x$, so wird y zu $y+\Delta y$ werden, und wenn nun Δy positiv ist, so hat y zugenommen; ist dagegen Δy negativ, so hat y abgenommen. Da wir Δx positiv voraussetzen, so werden wir offenb[illegible] auch sagen können: Wenn $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ positiv ist, so hat y zugenommen; dagegen abgenommen, wenn dieser Bruch negativ ist. Denken wir uns nun Δx sehr klein, so wird natürlich das Gesagte ganz eben so gelten, und immer wahr seyn, wie klein auch Δx seyn mag. Da aber (§. 15, I) *

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\partial y}{\partial x}+\alpha,$$

und α sehr klein ist, wenn Δx es ist, so wird für ein Δx, das klein genug ist, die Grösse $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dasselbe Zeichen haben, wie $\frac{\partial y}{\partial x}$, indem letztere Grösse einen bestimmten endlichen Werth hat, also schliesslich immer gegen α überwiegen wird, wenn nicht etwa für den speziellen Fall $\frac{\partial y}{\partial x}=0$ wäre, was wir nicht voraussetzen. Hieraus folgt der Satz:

Ist (für einen bestimmten Werth von x) $\frac{\partial y}{\partial x}$ positiv, so wächst y mit wachsendem x und nimmt also auch ab mit abnehmendem x; ist dagegen $\frac{\partial y}{\partial x}$ negativ, so nimmt y ab mit wachsendem x, nimmt also zu mit abnehmendem x (für kleine Aenderungen des betrachteten Werthes von x). Da auch

$$\Delta y=\frac{\partial y}{\partial x}\Delta x+\alpha\Delta x.$$

und für ein sehr kleines Δx auch α schon sehr klein ist, so schliesst man hieraus leicht noch, dass y (für kleine Aenderungen von x) um so bedeutender sich ändern wird, je grösser der Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ ist.

Natürlich wird man eben so auch sagen können, dass $\frac{\partial y}{\partial x}$ mit wachsendem x zu- oder abnehme, wenn $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ positiv oder negativ ist; dessgleichen $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ mit solchem x zu- oder abnehme, wenn $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ positiv oder negativ ist, u. s. w.

---

* Ist $y=f(x)$, so ist $f(x+\Delta x)=y+\Delta y$, also $f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y$, so dass die Gleichung (8) in §. 15, I jetzt heisst:

$$\Delta y=\left[\frac{\partial y}{\partial x}+\alpha\right]\Delta x,\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\partial y}{\partial x}+\alpha,\ Gr\,\alpha=0.$$

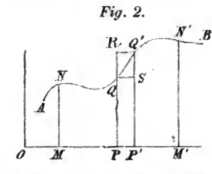
Digitized by Google

Differentialquotient einer ebenen Fläche.

II. Sey AB eine beliebige krumme Linie (Fig. 2), deren Gleichung für rechtwinklige Koordinatenaxen man kenne; MN die zur Abszisse $OM = a$ gehörige Ordinate, eben so PQ die zu $OP = x$ gehörige Ordinate y, die Fläche $MNQP = u$, so wird u eine Funktion von x seyn, da sicher diese Grösse sich ändert, wenn x sich ändert. Dabei setzen wir voraus, dass u wachse mit wachsendem x (Nr. I) und dass y positiv sey. Man soll den Werth von $\frac{\partial u}{\partial x}$ ermitteln.

Setzen wir $PP' = \Delta x$, ziehen die Ordinate $P'Q' = y + \Delta y$, so wird MNQ'P' der neue Werth der Fläche u, also $u + \Delta u$ seyn, so dass $PP'QQ' = \Delta u$. Wie auch die krumme Linie beschaffen sey, so wird man Δx immer klein genug annehmen können, dass die krumme Linie zwischen Q und Q' nur steigt oder nur fällt (d. h. dass die Ordinaten zwischen PQ und P'Q' alle wachsen, oder alle abnehmen). Zieht man nun QS, Q'R parallell mit der Abszissenaxe OP, so wird das Rechteck PP'Q'R grösser seyn als Δu, während PP'SQ kleiner ist als Δu. (Würde die Kurve zwischen Q und Q' fallen, so wäre das Umgekehrte richtig; wie man aber leicht sieht, ergibt diess schliesslich dasselbe Resultat). Da nun $P'Q' = y + \Delta y$, so ist das Rechteck $PP'SQ = y\Delta x$, $PP'Q'R = (y + \Delta y)\Delta x$, so dass also Δu enthalten ist zwischen $y\Delta x$ und $(y + \Delta y)\Delta x$, mithin $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ zwischen y und $y + \Delta y$. Lässt man nun Δx unbegränzt abnehmen, so wird auch Δy unendlich abnehmen, so dass y und $y + \Delta y$ mehr und mehr sich nähern. Daraus folgt (§. 7, I), dass $Gr\,\frac{\Delta u}{\Delta x} = y$, d. h.

Fig. 2.



$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \text{ (u wachsend mit x und } y > 0).$$

Da (§. 15, I) $$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \alpha\Delta x = y\Delta x + \alpha\Delta x$$

und α mit unendlich kleinem Δx selbst verschwindend klein wird, so kann man auch sagen, dass für ein unendlich kleines Δx das Flächenstück PP'Q'Q als ein Rechteck von der Grundlinie Δx und der Höhe y anzusehen sey. Wir werden später ein solches (unendlich kleines) Flächenstück ein **Element** der Fläche nennen. *

Differentialquotient eines Bogens.

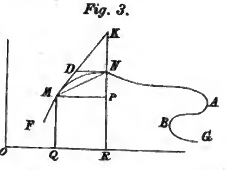
III. Sey FG (Fig. 3, siehe nächste Seite) eine beliebige Kurve, $OQ = x$, $QM = y$, $QR = \Delta x$, $RN = y + \Delta y$, ferner der Bogen FM, von dem (beliebigen)

* Bezeichnet man das unendlich kleine Δu durch du, das unendlich kleine Δx durch dx, so ist also $du = y\,dx$.

Digitized by Google

Punkte F aus gezählt, gleich s, so ist s eine Funktion von x, also $MN = \Delta s$. Man ziehe nun die Sehne MN, und denke sich an den Punkten M und N die berührenden Geraden MD, DN an die Kurve gezogen. Da man Δx klein genug wird annehmen können, dass der Bogen MN seine erhabene Seite immer nach derselben Richtung hin wendet, so ist die Summe der Geraden $MD + DN$ grösser als der Bogen MN, während letzterer grösser ist als die Sehne MN, wie man in der Elementargeometrie beweist (vergl. etwa Legendre, Geometrie, Buch IV, Satz IX).

Fig. 3.



Man verlängere nun die berührende Gerade MD, bis sie die Ordinate RN in K trifft; alsdann ist $MK + KN > MD + DN$, also auch $MK + KN > \Delta s$. Ist nun α der Winkel PMD, so ist $tg\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$ (§. 11) und $MK = \frac{MP}{\cos\alpha}$ $= \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$; weiter ist $PK = MP\, tg\alpha = \Delta x \frac{\partial y}{\partial x}$, $PN = \Delta y$, also $NK = \Delta x \frac{\partial y}{\partial x} - \Delta y = \Delta x \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$; $MN = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$; mithin

$$\Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} + \Delta x \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) > \Delta s > \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} + \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\Delta y}{\Delta x} > \frac{\Delta s}{\Delta x} > \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Mit abnehmendem Δx werden die erste und dritte dieser Grössen zu $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$, so dass (§. 7, I)

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}, \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, dx = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Diese Gleichung setzt allerdings nur den Fall der Figur voraus, d. h. dass s wachse mit x. * Würde s abnehmen mit wachsendem x (wenn die Bögen etwa von A gegen F gezählt würden), so hätte man (§. 20, I)

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}.$$

---

* Der Fall der Figur ist der, dass s mit x wächst, der Winkel α spitz ist und die Kurve ihre hohle Seite nach der Richtung der negativen y wendet. — Der Winkel α, den die nach dem wachsenden Bogen verlängerte berührende Gerade mit der (positiven) Abszissenaxe macht, wird positiv oder negativ seyn, je nachdem diese Gerade über oder unter der mit der Abzissenaxe parallelen Geraden MP liegt. Von F bis A ist er etwa positiv, von A bis G negativ u. s. w. — Spitz ist er alsdann so lange, als s mit x wächst, stumpf im entgegengesetzten Falle. — Man hätte also zu unterscheiden:

1) α positiv spitz, also $\frac{\partial y}{\partial x} > 0$. Jetzt bestehen genau die Formeln des Textes.

2) α negativ spitz, also $\frac{\partial y}{\partial x} < 0$. Zeichnet man die Figur, so findet sich MK

Digitized by Google

Man kann sich auch leicht überzeugen, dass das Resultat noch gilt, wenn die Kurve ihre hohle Seite entgegengesetzt wendet. * Allgemein also ist:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \pm \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

in welcher Formel das obere Zeichen gilt, wenn s mit x wächst, das untere im entgegengesetzten Falle. Für unsere Figur, wenn s von F aus gerechnet wird, gilt das obere Zeichen von F bis A, und B bis G, dagegen das untere von A bis B. Würde man s von G aus rechnen, so gälte das obere Zeichen von B bis A, das untere von G bis B und von A bis F.

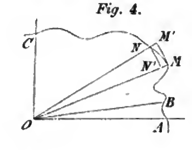
Es folgt hieraus, dass für ein unendlich kleines Δx man das Dreieck, gebildet von $MP = \Delta x$, $PN = \Delta y$ und Bog. $MN = \Delta s$ als geradlinig ansehen darf; denn alsdann folgt $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$, $\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$, $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$, wie oben gefunden.

Begreiflich heisst diess dasselbe, als wenn man ausspricht, es falle die Sehne MN für ein unendlich kleines Δx mit dem Bogen Δs zusammen.

Differentialquotient eines Flächenausschnitts.

IV. Sey AM (Fig. 4) eine beliebige Kurve, welche auf Polarkoordinaten bezogen sey; O der Pol, OA die Polaraxe. OB sey ein bestimmter Fahrstrahl, $MO = r$ ein zweiter, der zum Winkel $MOA = \omega$ gehöre; u sey der Ausschnitt BOM. Lässt man ω um $MON = \Delta\omega$ wachsen, so nimmt u um den Ausschnitt $MON = \Delta u$ zu, und man wird wieder $\Delta\omega$ klein genug nehmen können, damit zwischen M und N die Fahrstrahlen beständig zu- oder abnehmen. (Für unsere Figur hat das Letztere Statt.) Man ziehe

Fig. 4.



$= \Delta x \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$, $PK = -\Delta x \frac{\partial y}{\partial x}$, $PN = -\Delta y$, $NK = PN - KP = -\Delta y + \Delta x \frac{\partial y}{\partial x}$, also $\Delta x \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} - \Delta y + \Delta x \frac{\partial y}{\partial x} > \Delta s > \Delta x \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$, woraus $\frac{\partial s}{\partial x} = +\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$.

3) α positiv stumpf. Dieser Fall ist der verkehrte von dem in Nr. 2, so dass man bloss $-\Delta x$ für Δx zu setzen hat und erhält $\frac{\partial s}{\partial x} = -\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$.

4) α negativ stumpf. Ist der verkehrte Fall 1, und ergibt sich also $\frac{\partial s}{\partial x} = -\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$.

Uebrigens wird man, den Anschauungen der analytischen Geometrie gemäss, die krumme Linie als Gränze eines geradlinigen Linienzugs ansehen, dessen Seitenzahl sich immer mehr vermehrt. Daraus folgt, dass die Gleichung $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$, welche für die Sehne $MN = \Delta s$ unter allen Bedingungen gilt, und die auch $\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$ heisst, an der letzten Gränze, wo sie zu $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ wird, für den Bogen s gilt. (Vergl. §. 47.)

* „Eine Kurve heisst erhaben oder hohl in einem Theile ihres Laufs, wenn in diesem Theile die Aenderung der Richtung ihrer Elemente immer in demselben Sinne vor sich geht."

Digitized by Google

alsdann mit den Halbmessern $OM = r$ und $ON = r + \Delta r$ um O die Kreisbögen MM′, NN′, deren Längen also $r\Delta\omega$, $(r+\Delta r)\Delta\omega$ seyn werden, so ist Δu enthalten zwischen den Kreisausschnitten MOM′, NON′, deren Flächen sind $\frac{r^2\Delta\omega}{2}$, $\frac{(r+\Delta r)^2\Delta\omega}{2}$, d. h. $\frac{\Delta u}{\Delta\omega}$ ist enthalten zwischen $\frac{r^2}{2}$ und $\frac{(r+\Delta r)^2}{2} = \frac{r^2}{2} + r\Delta r + \frac{1}{2}(\Delta r)^2$. Lässt man $\Delta\omega$ unendlich klein werden, so werden auch $r\Delta r$, $\frac{1}{2}(\Delta r)^2$ es werden, mithin wird man wie in II haben:

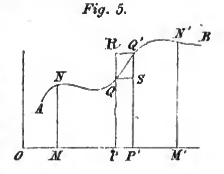
$$\frac{\partial u}{\partial\omega} = \frac{1}{2}r^2 \text{ (u wachsend mit } \omega), \; du = \frac{1}{2}r^2 d\omega.$$

Man kann also hier sagen, dass das unendlich kleine Element $MON = du$ als Kreisausschnitt anzusehen sey, dessen Mittelpunktswinkel $d\omega$, und dessen Halbmesser r ist.

Differentialquotient des Inhalts und der Fläche eines Rotationskörpers.

V. Die krumme Linie NQ (Fig. 5) drehe sich um die Abszissenaxe OP und es beschreibe dadurch die Fläche MPQN einen Körper, dessen Inhalt $= v$ sey; sey ferner $OP = x$, so wird, da MN fest ist, v eine Funktion von x seyn. Sey $PP' = \Delta x$, so wird die Fläche PQP′Q′ das Körperstück Δv beschreiben, und dasselbe ist immer zwischen den zwei von PP′QS und PP′RQ′ beschriebenen Zylindern enthalten, deren Inhalte sind $y^2\pi\Delta x$ und $(y+\Delta y)^2\pi\Delta x$; mithin ist $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ enthalten zwischen $y^2\pi$ und $(y+\Delta y)^2\pi$, und da mit unendlich abnehmendem Δx, also auch solchem Δy, diese letzteren Grössen sich unbegränzt nähern, so ist (§. 7, I):

Fig. 5.



$$\frac{\partial v}{\partial x} = \pi y^2 \text{ (v wachsend mit x)}, \; dv = \pi y^2 dx,$$

wo y die zu x gehörige Ordinate der beschreibenden krummen Linie ist.

VI. Dieselbe Kurve beschreibt bei der Drehung eine krumme Oberfläche und sey z der Inhalt der von NQ beschriebenen Oberfläche, so wird z eine Funktion von x, und Δz die von QQ′ beschriebene Oberfläche seyn. Zieht man die Sehne $QQ' = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, so ist die von ihr beschriebene Oberfläche (Mantel eines abgekürzten Kegels, dessen Halbmesser y und $y + \Delta y$ sind) gleich

$$2(y + \tfrac{1}{2}\Delta y)\pi\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Ist s der Bogen NQ, also Δs der Bogen QQ′, so werden Δs und die Sehne QQ′ sich mehr und mehr nähern, also auch die von ihnen beschriebenen Oberflächen, so dass das Verhältniss beider Oberflächen sich der Einheit nähert, oder es ist

Digitized by Google

$$Gr\frac{\Delta z}{2(y+\frac{1}{2}\Delta y)\pi\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=1,$$

d. h.

$$Gr\frac{\frac{\Delta z}{\Delta x}}{2(y+\frac{1}{2}\Delta y)\pi\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}=\pm 1,$$

oder

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{2y\pi\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}=\pm 1,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\pm 2y\pi\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

worin das Zeichen immer gemäss den Unterscheidungen in Nr. I zu wählen ist.

Geschwindigkeit.

VII. Denken wir uns einen Körper geradlinig und gleichförmig bewegt, so heisst man den in der Zeiteinheit (gewöhnlich eine Sekunde) zurückgelegten Weg die Geschwindigkeit desselben. * Gesetzt nun aber, der geradlinig bewegte Körper bewege sich ungleichförmig, so wird man unter Geschwindigkeit desselben in einem bestimmten Zeitmomente den Weg verstehen, den er in der darauf folgenden Zeiteinheit zurücklegen würde, wenn er sich während derselben genau eben so bewegen würde, wie er sich in dem betreffenden Augenblicke bewegt.

Fig. 6.

A M N

Sey also AM (Fig. 6) der Weg x, den der Körper in der Zeit t zurückgelegt hat, so wird x eine Funktion von t seyn; sey weiter MN der Weg Δx, den der Körper in der darauf folgenden Zeit Δt zurücklegen wird. Die (so eben näher erklärte) Geschwindigkeit des Körpers in M sey v (= dem Wege, den der Körper von M aus in einer Sekunde zurücklegen würde, wenn er sich während dieser Zeit genau so bewegte, wie er sich in M bewegt); also, da v eine Funktion von t seyn wird, $v+\Delta v$ die Geschwindigkeit in N nach der Zeit $t+\Delta t$; dabei wird man Δt immer klein genug annehmen können, damit die Geschwindigkeit v, die sich ändert, während dieser Zeit beständig wachse oder abnehme. Es finde nun zunächst das Erstere Statt, d. h. v wachse während der Zeit Δt; alsdann ist sicher MN oder $\Delta x > v\Delta t$, da $v\Delta t$ der Weg wäre, den der Körper in der Zeit Δt zurücklegen würde, wenn die Geschwindigkeit v bliebe; eben so ist $\Delta x < (v+\Delta v)\Delta t$. Daraus folgt, dass $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ immer zwischen v und $v+\Delta v$ enthalten ist, und da diese beiden Grössen sich unbegränzt nähern, wenn Δt (also auch Δv) unbegränzt abnimmt, so hat man

$$\frac{\partial x}{\partial t}=v,\quad dx=v\,dt,$$

* Ist also x der in der Zeit t (Sekunden) zurückgelegte Weg, v die Geschwindigkeit, so hat man $x=vt$, woraus auch $v=\frac{x}{t}$.

Digitized by Google

so dass also $\frac{\partial x}{\partial t}$ die gesuchte Geschwindigkeit ausdrückt. Würde v während der Zeit Δt beständig abnehmen, so wäre $\Delta x < v \Delta t$ und $> (v + \Delta v)\Delta t$, so dass wieder $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ zwischen v und $v + \Delta v$ läge, und man dasselbe Resultat erhielte.

Bewegende Kraft.

VIII. Ein Körper, auf den eine sich immer gleich bleibende Kraft fortwährend in derselben Richtung wirkt, bewegt sich geradlinig und so, dass in gleichen Zeiten die Geschwindigkeit um gleich viel vermehrt wird, wenn die Kraft fördernd auf die Bewegung wirkt, oder um gleich viel abnimmt, wenn sie der Bewegung hemmend entgegenwirkt. Diese Aenderung ist überdiess der wirkenden Kraft proportional.

Gesetzt nun eine mit der Zeit veränderliche Kraft wirke auf einen Körper in immer derselben Richtung ein und sey x der in der Zeit t zurückgelegte Weg, v die am Ende desselben erlangte Geschwindigkeit, also Δx der in der Zeit Δt zurückgelegte Weg, $v + \Delta v$ die nach der Zeit $t + \Delta t$ erlangte Geschwindigkeit; ferner sey φ die am Ende der Zeit t wirksame Kraft, also $\varphi + \Delta\varphi$ die zur Zeit $t + \Delta t$, p das Gewicht des Körpers. Man wird wieder Δt klein genug annehmen können, dass φ während der Zeit Δt immer wächst, oder immer abnimmt.

Hat zunächst Ersteres Statt, so wird Δv grösser seyn, als die durch eine φ gleich bleibende Kraft während Δt hervorgerufene Zunahme der Geschwindigkeit, und kleiner als die durch $\varphi + \Delta\varphi$ während Δt hervorgebrachte. Was nun die eine oder andere anbelangt, so weiss man, dass der Körper, wenn er unter dem Einflusse seines eigenen Gewichts p (beim freien Falle) steht, in jeder Sekunde seine Geschwindigkeit um g (= 9·80896 mètres) vermehrt, also in der Zeit Δt um $g\Delta t$, und man würde also die durch φ hervorgebrachte Aenderung z finden aus

$$\frac{z}{\varphi} = \frac{g\Delta t}{p}, \quad z = \frac{g\varphi\Delta t}{p},$$

eben so die durch $\varphi + \Delta\varphi$ hervorgebrachte Aenderung $\frac{g(\varphi + \Delta\varphi)\Delta t}{p}$, so dass also $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ immer zwischen $\frac{g\varphi}{p}$ und $\frac{g(\varphi + \Delta\varphi)}{p}$ liegt. Da mit unendlich abnehmendem Δt auch $\Delta\varphi$ unendlich abnimmt, so folgt hieraus

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{g\varphi}{p}, \quad \varphi = \frac{p}{g}\frac{\partial v}{\partial t}, \quad dv = \frac{g\varphi}{p}dt,$$

und da (nach VII) $v = \frac{\partial x}{\partial t}$, so ist auch

$$\varphi = \frac{p}{g}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}. *$$

* v, x, g sind in demselben Längenmaasse auszudrücken; φ und p in demselben Gewichtsmaasse; t ist in Sekunden zu geben, wenn g obigen Werth haben soll.

Digitized by Google

Man sieht leicht, dass dasselbe Resultat noch gilt, wenn die Kraft fortwährend abnimmt.

§. 21.

Vertauschung der unabhängig Veränderlichen.

Es kann sich ereignen, dass, nachdem y als Funktion von x angesehen worden, man es zweckmässiger findet, statt x eine andere unabhängig Veränderliche u einzuführen, von der x selbst abhängt, oder als abhängig anzusehen ist. Da nun (§. 13)

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u},\quad \text{also}\ \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}},$$

so folgt also, dass man $\frac{\partial y}{\partial x}$ werde ersetzen durch den ihm gleichen Werth $\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}}$, in dem blos Differentialquotienten nach u vorkommen. Ist überhaupt ϱ irgend eine von x, also auch von u abhängige Grösse, so ist hiernach

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x}=\frac{\frac{\partial \varrho}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}}.$$

Also auch, wenn $\varrho=\frac{\partial y}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\frac{\partial x}{\partial u}}=\frac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}}\right)}{\frac{\partial x}{\partial u}}=\frac{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial y}{\partial u}}{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^3}\ (\S.\ 12,\ \text{VI}),$$

so dass $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ durch diese letztere Grösse zu ersetzen ist. Eben so:

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)=\frac{\frac{\partial}{\partial u}\frac{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial y}{\partial u}}{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^3}}{\frac{\partial x}{\partial u}}=\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^3 y}{\partial u^3}-3\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+3\frac{\partial y}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)^2-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^3 x}{\partial u^3}}{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^5}.$$

Man sieht leicht, dass man diese Umformungen in folgender Weise andeuten kann:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\frac{\partial x}{\partial u}},\quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=\frac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{\frac{\partial x}{\partial u}},\ \ldots\ldots,\ \frac{\partial^n y}{\partial x^n}=\frac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)}{\frac{\partial x}{\partial u}},$$

Digitized by Google

worin jeweils für $\frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}$ der vorhergehende ausgerechnete Werth zu setzen ist. Hiemit ist die allgemeine Aufgabe der Vertauschung der unabhängig Veränderlichen gelöst und wir wenden uns zu den folgenden besonderen Betrachtungen.

I. Soll y als neue unabhängig Veränderliche, x als abhängig von y angesehen werden, was man immer kann, so ist oben $u = y$, also $\frac{\partial y}{\partial u} = 1$, (§. 11, I), mithin $\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 0$ (§. 12, I), $\frac{\partial^3 y}{\partial u^3} = 0, \ldots$, also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial y}},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^3},\quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{3\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\right)^2 - \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial^3 x}{\partial y^3}}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^5}, \ldots$$

Soll z. B. in dem Ausdruck (§. 56, III)

$$\varrho = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}},$$

in dem y als Funktion von x angesehen ist, umgekehrt x als Funktion von y betrachtet werden, so ist

$$\varrho = \pm \frac{\left[1 + \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^3}} = \pm \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^3 \left[\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + 1}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}} = \mp \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}}.$$

II. Der Zusammenhang zwischen x und u ist durch eine Gleichung $f(x, u) = 0$ gegeben. Alsdann zieht man hieraus (§. 19, IV) $x, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \ldots$ in u und ersetzt $\frac{\partial y}{\partial x}, \ldots$ wie angegeben.

Soll z. B. in der Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x\frac{\partial y}{\partial x} + a y = 0$$

für x die neue unabhängige Veränderliche ω eingeführt werden, so dass $x = \cos\omega$, so ist $\frac{\partial x}{\partial \omega} = -\sin\omega$, $\frac{\partial^2 x}{\partial \omega^2} = -\cos\omega$, also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial \omega}}{\sin\omega},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\sin\omega\frac{\partial^2 y}{\partial \omega^2} - \cos\omega\frac{\partial y}{\partial \omega}}{\sin^3\omega},$$

also hat man, wenn man sogleich mit $\sin^3\omega$ multiplizirt:

$$\sin\omega\frac{\partial^2 y}{\partial \omega^2} - \cos\omega\frac{\partial y}{\partial \omega} - \cos\omega\sin^2\omega\frac{\partial y}{\partial \omega} + a y \sin^3\omega = 0,$$

d. h.
$$\frac{\partial^2 y}{\partial \omega^2} - \operatorname{cotg}\omega\,(1 + \sin^2\omega)\frac{\partial y}{\partial \omega} + a y \sin^2\omega = 0.$$

Digitized by Google

III. Ist der Zusammenhang zwischen x und u vermittelt durch eine Gleichung, die auch y enthält, also der Form nach durch

$$f(y, x, u) = 0$$

bezeichnet werden kann, so zieht man hieraus, indem man nach u differenzirt und x, y als Funktionen von u ansieht, eine Reihe Gleichungen, vermöge welcher $x, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \ldots$ durch $u, y, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \ldots$ ausgedrückt und in die vorgelegte Form substituirt werden können. Es kann sich dabei auch zutragen, dass die Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen x und u geben soll, Differentialquotienten von y und x nach u enthält. Alsdann kann man vielleicht einige der ersten Grössen $x, \frac{\partial x}{\partial u}, \ldots$ nicht ermitteln, die übrigen jedoch durch diese ersten ausdrücken. Besteht z. B. die Gleichung

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = 1 \; * \qquad \text{(a)}$$

zwischen x, y und der neuen unabhängig Veränderlichen s, so folgt hieraus durch Differenzirung (nach s):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = 0, \\ &\left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right)^2 + \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial^3 x}{\partial s^3} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial^3 y}{\partial s^3} = 0, \text{ u. s. w.} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a')}$$

und vermöge der Gleichungen (a) und (a′) kann man $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \frac{\partial^3 x}{\partial s^3}, \ldots\ldots$ durch $\frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial s^3}, \ldots\ldots$ ausdrücken.

IV. Endlich ist es möglich, dass man statt y selbst eine neue abhängig Veränderliche einführen will. Dadurch ist jedoch der Gang der Rechnung keineswegs erschwert, wie wir an folgendem Beispiele sehen werden.

Man soll statt x und y die Grössen r und ω einführen, so dass

$$x = r \cos\omega, \quad y = r \sin\omega,$$

und r als abhängig von ω angesehen werde. Man hat hieraus:

$$\frac{\partial x}{\partial \omega} = \frac{\partial r}{\partial \omega}\cos\omega - r\sin\omega, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \omega^2} = \frac{\partial^2 r}{\partial \omega^2}\cos\omega - 2\frac{\partial r}{\partial \omega}\sin\omega - r\cos\omega, \ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \omega} = \frac{\partial r}{\partial \omega}\sin\omega + r\cos\omega, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \omega^2} = \frac{\partial^2 r}{\partial \omega^2}\sin\omega + 2\frac{\partial r}{\partial \omega}\cos\omega - r\sin\omega, \ldots\ldots,$$

so dass

---

* Betrachtet man in der Gleichung §. 20, III: $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$, s als neue unabhängig Veränderliche, so erhält man gemäss Nr. I:

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2} = 1 + \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2}, \quad 1 = \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2,$$

so dass die Gleichung (a) eine leicht auszusprechende geometrische Bedeutung hat.

Digitized by Google

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{\partial r}{\partial \omega} \sin \omega + r \cos \omega}{\frac{\partial r}{\partial \omega} \cos \omega - r \sin \omega},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\left(\frac{\partial r}{\partial \omega} \cos \omega - r \sin \omega\right)\left(\frac{\partial^2 r}{\partial \omega^2} \sin \omega + 2 \frac{\partial r}{\partial \omega} \cos \omega - r \sin \omega\right) - \left(\frac{\partial r}{\partial \omega} \sin \omega + r \cos \omega\right)\left(\frac{\partial^2 r}{\partial \omega^2} \cos \omega - 2 \frac{\partial r}{\partial \omega} \sin \omega - r \cos \omega\right)}{\left(\frac{\partial r}{\partial \omega} \cos \omega - r \sin \omega\right)^3}$$

$$= \frac{r^2 + 2\left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2 - r \frac{\partial^2 r}{\partial \omega^2}}{\left(\frac{\partial r}{\partial \omega} \cos \omega - r \sin \omega\right)^3} \ldots\ldots$$

Also wenn wieder in

$$\varrho = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

für x und y obige Grössen r und ω einzuführen sind:

$$\varrho = \pm \frac{\left[1 + \frac{\left(\frac{\partial r}{\partial \omega} \sin \omega + r \cos \omega\right)^2}{\left(\frac{\partial r}{\partial \omega} \cos \omega - r \sin \omega\right)^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{r^2 + 2\left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2 - r \frac{\partial^2 r}{\partial \omega^2}}{\left(\frac{\partial r}{\partial \omega} \cos \omega - r \sin \omega\right)^3}} = \pm \frac{\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2 + r^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2 - r \frac{\partial^2 r}{\partial \omega^2}}.$$

Vierter Abschnitt.

Untersuchung der scheinbar unbestimmten Formen.

§. 22.

Die Form $\frac{0}{0}$.

I. Gesetzt es seyen die Funktionen $f(x)$, $F(x)$ beide Null für $x = a$, so wird der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen, wenn man $x = a$ setzt. Diese Form ist im Allgemeinen, d. h. ohne Rücksicht auf ihren Ursprung, unbestimmt; weiss man aber, woher sie entstanden ist, so kann man ihren wahren Werth ermitteln. — Die Aufgabe nun, den Werth von $\frac{f(x)}{F(x)}$ für $x = a$

Digitized by Google

anzugeben, kommt offenbar auf die hinaus, den **Gränzwerth** von $\frac{f(a+h)}{F(a+h)}$ mit unbegränzt abnehmendem h zu ermitteln. Um letztere zu erhalten, beachte man, dass (§. 15, I), wenn $f'(a)$, $F'(a)$ endlich sind:

$$f(a+h) = f(a) + [f'(a) + \alpha]h, \quad F(a+h) = F(a) + [F'(a) + \beta]h,$$

wo α und β mit h zu Null werden. Da aber $f(a) = F(a) = 0$, so ist

$$f(a+h) = [f'(a) + \alpha]h, \quad F(a+h) = [F'(a) + \beta]h,$$

also

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f'(a) + \alpha}{F'(a) + \beta}.$$

Lässt man hier h gegen 0 gehen, so erhält man als Gränzgleichung:

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f'(a)}{F'(a)},$$

wodurch der gesuchte Werth gefunden ist. Um die zweite Seite zu erhalten, bildet man $f'(x)$, $F'(x)$, dividirt beide Grössen und setzt in ihnen $x = a$. * Wären $f'(a)$, $F'(a)$ wieder Null, so würde die Anwendung derselben Regel auf

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f'(a)}{F'(a)} = \frac{f''(a)}{F''(a)}$$

u. s. w. führen. — Sind überhaupt $f(a)$, $f'(a)$, ..., $f^{n-1}(a)$ und $F(a)$, $F(a)$, ..., $F^{n-1}(a)$ sämmtlich Null, nicht aber die beiden Grössen $f^n(a)$, $F^n(a)$, so ist

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f^n(a)}{F^n(a)}, \tag{1}$$

vorausgesetzt $f^n(a)$, $F^n(a)$ seyen endlich.

II. Um jedoch diesen wichtigen Satz genau zu begründen, da man gegen die Anwendbarkeit obiger Schlüsse Anstand erheben könnte, wollen wir den folgenden Weg einschlagen.

Ausdruck von $f(a+z)$, wenn $f(a)$, $f'(a)$, ..., $f^{n-1}(a)$ Null sind.

Sey G der grösste, K der kleinste Werth, den $f^{n+1}(a+z)$ annimmt, wenn z von 0 bis h geht, wo h klein und positiv seyn mag. Alsdann ist für alle diese Werthe von z:

$$f^{n+1}(a+z) - G < 0, \quad f^{n+1}(a+z) - K > 0.$$

Die zwei Grössen

$$f^n(a+z) - f^n(a) - Gz, \quad f^n(a+z) - f^n(a) - Kz \tag{a}$$

geben aber, wenn sie nach z differenzirt werden, da $f^n(a)$, G, K Konstanten sind:

$$f^{n+1}(a+z) - G, \quad f^{n+1}(a+z) - K.$$

Da nun die erste dieser Grössen negativ, die zweite positiv ist, so folgt nach §. 20, I, dass die erste der Grössen (a) abnimmt mit wachsendem z, die zweite dagegen zunimmt. Für $z=0$ sind beide Grössen aber Null; demnach wird die erste Grösse (a) für positive z nothwendig < 0, die andere > 0 seyn. Man hat also

$$f^n(a+z) - f^n(a) - Gz < 0, \quad f^n(a+z) - f^n(a) - Kz > 0, \tag{b}$$

---

* Sind in $f(x)$, $F(x)$ gleiche Faktoren, die für $x = a$ zu Null werden, und rührt die Form $\frac{0}{0}$ nur von ihnen her, so lässt man diese Faktoren, deren Quotient unbedingt $= 1$ ist, weg und findet dann den wahren Werth, wenn man $x = a$ setzt. Die Regel gibt dasselbe.

Digitized by Google

für positive z (die wir hier nur betrachten, da z von 0 bis h geht und $h > 0$ ist). Die zwei Grössen (b) werden durch Differenzirung nach z erhalten aus

$$f^{n-1}(a+z) - f^{n-1}(a) - f^n(a)z - G\frac{z^2}{2}, \quad f^{n-1}(a+z) - f^{n-1}(a) - f^n(a)z - K\frac{z^2}{2},$$

oder da $f^{n-1}(a)$ Null ist, aus

$$f^{n-1}(a+z) - f^n(a)z - G\frac{z^2}{2}, \quad f^{n-1}(a+z) - f^n(a)z - K\frac{z^2}{2}.$$

Daher ist die erste dieser Grössen abnehmend, die zweite wachsend. Da sie für $z=0$ wieder beide Null sind, so ist also (für positive z)

$$f^{n-1}(a+z) - f^n(a)z - G\frac{z^2}{2} < 0, \quad f^{n-1}(a+z) - f^n(a)z - K\frac{z^2}{2} > 0.$$

Wie man hier weiter gehen kann, ist leicht zu sehen, und man erhält, wenn $f(a), f'(a), \ldots, f^{n-1}(a)$ alle Null sind:

$$f^{n+1}(a+z) - G < 0, \qquad f^{n+1}(a+z) - K > 0,$$

$$f^n(a+z) - f^n(a) - Gz < 0, \qquad f^n(a+z) - f^n(a) - Kz > 0,$$

$$f^{n-1}(a+z) - f^n(a)z - G\frac{z^2}{2} < 0, \qquad f^{n-1}(a+z) - f^n(a)z - K\frac{z^2}{2} > 0,$$

$$f^{n-2}(a+z) - f^n(a)\frac{z^2}{2} - G\frac{z^3}{2.3} < 0, \qquad f^{n-2}(a+z) - f^n(a)\frac{z^2}{2} - K\frac{z^3}{2.3} > 0,$$

$$f^{n-3}(a+z) - f^n(a)\frac{z^3}{2.3} - G\frac{z^4}{2.3.4} < 0, \qquad f^{n-3}(a+z) - f^n(a)\frac{z^3}{2.3} - K\frac{z^4}{2.3.4} > 0,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f(a+z) - f^n(a)\frac{z^n}{2.3..n} - G\frac{z^{n+1}}{2.3\ldots n+1} < 0, \qquad f(a+z) - f^n(a)\frac{z^n}{2.3..n} - K\frac{z^{n+1}}{2.3..n+1} > 0,$$

wie sich leicht übersehen lässt. * Hieraus folgt, dass

$$f(a+z) - f^n(a)\frac{z^n}{2.3..n} < G\frac{z^{n+1}}{2.3\ldots n+1},$$

$$f(a+z) - f^n(a)\frac{z^n}{2.3..n} > K\frac{z^{n+1}}{2.3\ldots n+1},$$

so dass man wird setzen dürfen:

$$f(a+z) - f^n(a)\frac{z^n}{2.3..n} = \frac{Mz^{n+1}}{2.3\ldots n+1},$$

wo M ein Werth ist, der zwischen G und K liegt. Setzt man hier $z=h$, so ist

$$f(a+h) = f^n(a)\frac{h^n}{2.3..n} + \frac{Mh^{n+1}}{2.3\ldots n+1}, \qquad (2)$$

welche Gleichung voraussetzt, dass $f(a), f'(a), \ldots, f^{n-1}(a)$ Null seyen und $f^n(a)$ endlich; M ist dabei eine bestimmte Zahl. Die Gleichung (2) ist übrigens nur für positive h als erwiesen anzusehen. (Sie kann für negative h jedoch in derselben Weise begründet werden.)

Aus (2) folgt nun, unter den Voraussetzungen, welche zu (1) führten:

---

* In jeder der zwei Vertikalreihen ist eine Grösse der Differentialquotient der darunter stehenden. Der allgemeine Satz, der dabei in Anwendung kommt, wie er aus §. 20, I hervorgeht, heisst: Ist der Differentialquotient von F (z) (für alle positiven z) negativ, ist weiter F(z) Null für $z=0$, so ist auch F(z) für dieselben z negativ. — Ist der Differentialquotient von F (z) positiv; ist ferner $F(0)=0$, so ist F(z) für dieselben positiven z auch positiv.

Digitized by Google

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f^n(a)\frac{h^n}{2.3..n} + \frac{M h^{n+1}}{2.3...n+1}}{F^n(a)\frac{h^n}{2.3..n} + \frac{N h^{n+1}}{2.3...n+1}} = \frac{f^n(a) + \frac{Mh}{n+1}}{F^n(a) + \frac{Nh}{n+1}},$$

woraus die (1) sofort folgt.

III. Als Beispiele hiezu mögen folgende dienen:
$\frac{1-x^n}{1-x}$ ist $\frac{0}{0}$ für $x=1$; aber $\frac{\partial(1-x^n)}{\partial x} = -n x^{n-1}$, $\frac{\partial(1-x)}{\partial x} = -1$; für $x=1$ sind diese Grössen $-n$ und -1, also ist $\frac{1-x^n}{1-x}$ für $x=1$: $\frac{-n}{-1} = n$.
$\frac{1-x^n}{1-x^2}$ ist eben so Null für $x=1$; $\frac{\partial(1-x^n)}{\partial x} = -n x^{n-1}$, $\frac{\partial(1-x^2)}{\partial x} = -2x$ geben für $x=1$: $-n$, -2, also ist für $x=1$: $\frac{1-x^n}{1-x^2} = \frac{n}{2}$. $\frac{1-\cos x}{x^2}$ ist $\frac{0}{0}$ für $x=0$; aber $\frac{\partial(1-\cos x)}{\partial x} = \sin x$, $\frac{\partial x^2}{\partial x} = 2x$ sind abermals 0 für $x=0$; $\frac{\partial^2(1-\cos x)}{\partial x^2} = \cos x$, $\frac{\partial^2(x^2)}{\partial x^2} = 2$ geben 1 und 2 für $x=0$, also ist $\frac{1-\cos x}{x^2}$ für $x=0$ gleich $\frac{1}{2}$. $\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ für $x=0$ ist 2; $\frac{\sin x}{x}$ für $x=0$ ist 1; $\frac{\sin n x}{x}$ für $x=0$ ist n; $\frac{1-(n+1)x^n + n x^{n+1}}{(1-x)^2}$ für $x=1$ ist $\frac{n(n+1)}{2}$; $\frac{l(x)}{x-1}$ für $x=1$ ist 1; $\frac{x-\sin x}{x^3}$ für $x=0$ ist $\frac{1}{6}$; $\frac{1-\sin x}{1+\sin 3x}$ für $x=\frac{\pi}{2}$ ist $\frac{1}{9}$; $\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ ist 2 für $x=0$; $\frac{x^4-4x+3}{x^4-x^3-x+1}$ für $x=1$ ist 2; $\frac{x^x - x}{1-x+l(x)}$ für $x=1$ ist -2; $\frac{l(x^a)-a}{x^n-e^n}$ für $x=e$ ist $\frac{a}{n e^n}$; $\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{(x-1)^3}}{\sqrt{(x^2-1)^3}-x+1}$ für $x=1$ ist $-\frac{3}{2}$; $\frac{x\sqrt{3a^3x-2x^4} - a x\sqrt[5]{a^4 x}}{a - \sqrt[3]{a x^2}}$ für $x=a$ ist $\frac{81}{20}a^2$.

Fall, da $\frac{f(\infty)}{F(\infty)} = \frac{0}{0}$.

IV. Für $a=\infty$ gelten dieselben Regeln, doch könnte man Anstand finden, den Beweis sofort gelten zu lassen. Setzt man aber $x=\frac{1}{z}$, so wird $\frac{f(x)}{F(x)}$ zu $\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)}$ und für $z=0$ ist $x=\infty$. Alsdann hat man [da f (x) und F (x) Null seyn sollen für $x=\infty$]:
$\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{F'\left(\frac{1}{z^2}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$; indem $\frac{\partial}{\partial z} f\left(\frac{1}{z}\right) = f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)$ nach §. 13. Da aber im Zähler und Nenner der Faktor $-\frac{1}{z^2}$ derselbe ist, so hat man, für $z=0$, d. h. $x=\infty$:

$$\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{F'\left(\frac{1}{z}\right)}, \text{ d. h. } \frac{f(\infty)}{F(\infty)} = \frac{f'(\infty)}{F'(\infty)}.$$

Digitized by Google

Die Form $\frac{\infty}{\infty}$.

V. Gesetzt es werden die beiden Grössen $f(x)$, $F(x)$ für $x=a$ unendlich gross, so erscheint alsdann der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ unter der Form $\frac{\infty}{\infty}$, deren wahren Werth man nun ebenfalls ermitteln soll. Unter der Voraussetzung $\frac{f(x)}{F(x)}$ bleibe stetig in der Nähe des Werthes $x=a$, d. h. dieser Bruch nähere sich einer bestimmten Gränze, wird man setzen

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}}\ .$$

und beachten, dass für $x=a$ jetzt $\frac{1}{F(x)}$ und $\frac{1}{f(x)}$ Null werden. Daraus folgt (Nr. I), dass der Werth $\frac{f(a)}{F(a)}$ gleich ist dem Werthe

$$\frac{-\frac{F'(a)}{F(a)^2}}{-\frac{f'(a)}{f(a)^2}}=\frac{F'(a)}{f'(a)}\cdot\frac{f(a)^2}{F(a)^2},$$

indem $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f(x)}\right)=-\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ ist. Man hat also

$$\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{F'(a)}{f'(a)}\left(\frac{f(a)}{F(a)}\right)^2,\ 1=\frac{F'(a)}{f'(a)}\cdot\frac{f(a)}{F(a)},$$

so dass
$$\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{f'(a)}{F'(a)},$$

mithin ganz dieselbe Regel gilt, wie in Nr. I. Man wird jedoch hiebei beachten, dass weil $f(a)$, $F(a)$ unendlich sind für $x=a$, auch $f'(a)$, $F'(a)$ unendlich seyn werden; kann man aber den Werth von $\frac{f'(a)}{F'(a)}$ in irgend einer Weise ermitteln, so ist man durch diese Betrachtung dennoch zum Ziele gelangt. *

So z. B. wird $\frac{l(x)}{cotg\,x}$ für $x=0$ unter der Form $\frac{\infty}{\infty}$ erscheinen. Aber $\frac{\partial l(x)}{\partial x}=\frac{1}{x}$, $\frac{\partial\, cotg\,x}{\partial x}=-\frac{1}{sin^2 x}$ also hat man den Werth von $\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{sin^2 x}}=-\frac{sin^2 x}{x}$ für $x=0$ zu ermitteln. Nach Nr. I ist derselbe $=0$, so dass $\frac{l(x)}{cotg\,x}$ Null ist für $x=0$.

VI. Der Beweis obiger Regel setzt allerdings voraus, dass $\frac{f(a)}{F(a)}$ nicht 0 oder ∞ sey, da sonst die beiderseitige Division mit dieser Grösse nicht zulässig seyn könnte. Gesetzt nun aber, es sey

* Es ist denkbar, dass in $f'(x)$, $F'(x)$ dieselben Faktoren sind, die für $x=a$ unendlich werden. Diese Faktoren kann man vor der Division jedenfalls weglassen, denn ihr Quotient ist bestimmt $=1$, wenn sie auch unendlich werden. — Eben so kann man in dem Bruche $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ Zähler und Nenner mit derselben Grösse multipliziren, wenn diese auch 0 oder ∞ für $x=a$ werden sollte, da eine solche Multiplikation immerhin die mit 1 ist.

Digitized by Google

$\frac{f(a)}{F(a)}$ Null, so kann man beweisen, dass auch $\frac{f'(a)}{F'(a)}$ Null ist, also immerhin das gefundene Resultat gilt. Denn wenn b eine bestimmte Grösse ist, so ist sicher

$$\frac{f(x)}{F(x)} + b = \frac{f(x) + b\,F(x)}{F(x)}$$

für $x = a$ gleich b, da ja $\frac{f(a)}{F(a)} = 0$. Aber für $x = a$ ist $\frac{f(x) + b\,F(x)}{F(x)}$ immerhin $\frac{\infty}{\infty}$, und da wir wissen, dass der Werth nicht 0 ist, können wir die Regel anwenden, wornach $\frac{f(a) + b\,F(a)}{F(a)}$ d. h. b gleich $\frac{f'(a) + b\,F'(a)}{F'(a)}$ d. h. $= \frac{f'(a)}{F'(a)} + b$ ist. Daraus aber folgt offenbar $\frac{f'(a)}{F'(a)} = 0$.

Ist $\frac{f(a)}{F(a)} = \infty$, so ist $\frac{F(a)}{f(a)} = 0$, also $\frac{F(a)}{f(a)} = \frac{F'(a)}{f'(a)}$, woraus dann auch $\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f'(a)}{F'(a)}$.

§. 23.

Die Formen $0.\infty$, $\infty - \infty$.

I. Wird in dem Produkte $f(x).F(x)$ für $x = a$: $f(a) = 0$, $F(a) = \infty$, so erhält man die Form $0.\infty$. Da aber

$$f(x)\,F(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{F(x)}} = \frac{F(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

und diese letzten Formen auf $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ herauskommen, so kann man geradezu die früheren Regeln wieder in Anwendung bringen.

Aehnlich verhält es sich mit der Form $\infty - \infty$, wenn z. B. in $\frac{\varphi(x)}{f(x)} - \frac{\psi(x)}{F(x)}$ für $x = a$: $f(a) = F(a) = 0$, aber $\varphi(a)$, $\psi(a)$ endlich und nicht 0 sind. Da zunächst

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} - \frac{\psi(x)}{F(x)} = \frac{\varphi(x)\,F(x) - \psi(x)\,f(x)}{f(x)\,F(x)},$$

so kommt diese Form auf $\frac{0}{0}$ zurück und wird also gemäss §. 22 Nr. I behandelt.

Z. B. $(a - x)\,tg\frac{\pi x}{2a}$ wird $0.\infty$ für $x = a$. Aber $(a - x)\,tg\frac{\pi x}{2a} = \frac{a - x}{cotg\frac{\pi x}{2a}}$, und

$\frac{\partial(a - x)}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial\, cotg\frac{\pi x}{2a}}{\partial x} = -\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{sin^2\frac{\pi x}{2a}}$, welche Grösse für $x = a$ gleich $-\frac{\pi}{2a}$ ist; mithin ist $(a - x)\,tg\frac{\pi x}{2a}$ für $x = a$ gleich $\frac{-1}{-\frac{\pi}{2a}} = \frac{2a}{\pi}$. $\frac{1}{l(x)} - \frac{1}{x - 1}$ wird $\infty - \infty$ für $x = 1$; aber $\frac{1}{l(x)} - \frac{1}{x - 1} = \frac{x - 1 - l(x)}{(x - 1)\,l(x)}$, $\frac{\partial[x - 1 - l(x)]}{\partial x} = 1 - \frac{1}{x}$, $\frac{\partial^2[x - 1 - l(x)]}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}$ wird 1 für $x = 1$; $\frac{\partial[(x - 1)\,l(x)]}{\partial x} = (x - 1)\frac{1}{x} + l(x) = 1 - \frac{1}{x} + l(x)$, $\frac{\partial^2[(x - 1)\,l(x)]}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ wird 2 für $x = 1$, also ist $\frac{1}{l(x)} - \frac{1}{x - 1}$ gleich $\frac{1}{2}$ für $x = 1$. $cotg\,x - \frac{1}{x}$ wird

Digitized by Google

$\infty - \infty$ für $x=0$; aber $cotg\, x - \frac{1}{x} = \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x}$, $\frac{\partial (x \cos x - \sin x)}{\partial x} = -x \sin x$, $\frac{\partial^2 (x \cos x - \sin x)}{\partial x^2} = -\sin x - x \cos x$ wird 0 für $x=0$; $\frac{\partial (x \sin x)}{\partial x} = x \cos x + \sin x$, $\frac{\partial^2 (x \sin x)}{\partial x^2} = 2 \cos x - x \sin x$ wird 2 für $x=0$, also ist $cotg\, x - \frac{1}{x}$ gleich 0 für $x=0$.

$l\left(2-\frac{x}{a}\right) tg \frac{\pi x}{2a}$ wird $0 . \infty$ für $x=a$; aber $l\left(2-\frac{x}{a}\right) tg \frac{\pi x}{2a} = \frac{l\left(2-\frac{x}{a}\right)}{cotg \frac{\pi x}{2a}}$;

$\frac{\partial\, l\left(2-\frac{x}{a}\right)}{\partial x} = -\frac{1}{2a-x}$ wird $-\frac{1}{a}$ für $x=a$; $\frac{\partial\, cotg \frac{\pi x}{2a}}{\partial x} = -\frac{\pi}{2a} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi x}{2a}}$ wird $-\frac{\pi}{2a}$ für $x=a$, also ist $l\left(2-\frac{x}{a}\right) tg \frac{\pi x}{2a}$ gleich $\frac{2}{\pi}$ für $x=a$. $x^n\, l(x)$ für $x=0$ wird $0 . \infty$, wenn $n>0$; aber $x^n\, l(x) = \frac{l(x)}{x^{-n}}$, $\frac{\partial\, l(x)}{\partial x} = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial x^{-n}}{\partial x} = -n x^{-(n+1)}$, $\frac{\frac{1}{x}}{-n x^{-(n+1)}} = \frac{-x^n}{n}$ wird 0 für $x=0$, also ist $x^n\, l(x) = 0$ für $x=0$ und $n>0$.

Die Formen 0^0, ∞^0, $1^{\pm\infty}$, $0^{\pm\infty}$.

II. Sind y, z zwei Funktionen von x, so beschaffen, dass für $x=a$:

$y=0$, $z=0$, so erlangt y^z die unbestimmte Form 0^0,
$y=\infty$, $z=0$, „ „ y^z „ „ „ ∞^0,
$y=1$, $z=\pm\infty$, „ „ y^z „ „ „ $1^{\pm\infty}$,
$y=0$ $z=\pm\infty$, „ „ y^z „ „ „ $0^{\pm\infty}$.

Da aber immer $l(y^z) = z\, l(y)$; so wird $l(y^z)$ in diesen Fällen:
$0\, l(0) = -0.\infty$, $0\, l(\infty) = 0.\infty$, $\pm\infty\, l(1) = \pm\infty . 0$, $\pm\infty\, l(0) = \pm\infty(-\infty)$,
so dass diese Formen auf das Frühere zurückkommen. Kann man nun $l(y^z)$ ermitteln, so hat man auch y^z. Was übrigens die letzte Form anbelangt, so ist $\pm\infty(-\infty) = \mp\infty$, also dann y^z gleich $e^{\mp\infty}$, d. h. gleich 0 oder ∞.

Man habe z. B. x^x für $x=0$ zu ermitteln. Es ist $l(x^x) = x\, l(x)$ und $x\, l(x) = \frac{l(x)}{\frac{1}{x}}$ wird $\frac{\infty}{\infty}$ für $x=0$; aber $\frac{\partial\, l(x)}{\partial x} = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial\left(\frac{1}{x}\right)}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$, also hat man $\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x$ für $x=0$ zu ermitteln; diess ist aber $=0$, also ist $x^x = e^0 = 1$ für $x=0$. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ wird 1^∞ für $x=\infty$; aber $l\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = x\, l\left(1+\frac{1}{x}\right)$ wird $\infty . 0$ für $x=\infty$ und ist $= \frac{l\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ und dies gleich $-\frac{\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ für $x=\infty$, d. h. gleich 1,

Digitized by Google

mithin ist $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$ für $x=\infty$ (§. 8). $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ wird ∞^0 für $x=0$; aber $l\left(\frac{1}{x}\right)^x = x\,l\left(\frac{1}{x}\right) = -x\,l(x)$ und da dies $=0$ ist für $x=0$, so ist auch $\left(\frac{1}{x}\right)^x = 1$ für $x=0$.

Ermittlung in besondern Fällen.

III. Gesetzt $\varphi(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \psi(x), \psi_1(x), \ldots$ seyen Funktionen von x, die für $x=a$ Null sind, m sey eine positive, aber sonst beliebige Zahl, so wird der Bruch

$$\frac{A\,\varphi(x)^m + B\,\varphi_1(x)^m + C\,\varphi_2(x)^m + \ldots\ldots}{A'\,\psi(x)^m + B'\,\psi_1(x)^m + C'\,\psi_2(x)^m + \ldots\ldots};$$

für $x=a$ die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, wenn $A, B, \ldots, A', B', \ldots$ beliebige Konstanten sind. Setzt man hier $x=a+h$, so hat man für diesen Bruch, wenn man beachtet, dass $\varphi(a), \ldots$ Null sind (§. 15, I):

$$\frac{A\,[\varphi'(a)+\alpha]^m h^m + B\,[\varphi_1'(a)+\alpha_1]^m h^m + C\,[\varphi_2'(a)+\alpha_2]^m h^m + \ldots\ldots}{A\,[\psi'(a)+\beta]^m h^m + B'[\psi_1'(a)+\beta_1]\ \ h^m + C'[\psi_2'(a)+\beta_2]^m h^m + \ldots\ldots},$$

wo $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \beta, \beta_1, \beta_2, \ldots$ mit h zu Null werden. Dividirt man hier zuerst Zähler und Nenner mit h^m, und lässt dann h zu Null werden, so erhält man als Werth des Bruches für $x=a$:

$$\frac{A\,\varphi'(a)^m + B\,\varphi_1'(a)^m + C\,\varphi_2'(a)^m + \ldots}{A'\,\psi'(a)^m + B'\,\psi_1'(a)^m + B'\,\psi_2'(a)^m + \ldots\ldots}.$$

Sey z. B. $\dfrac{\sqrt[3]{(a^2-x^2)} + \sqrt[3]{(a-x)^2}}{\sqrt[3]{(a-x)} - \sqrt[3]{(a^3-x^3)}}$ für $x=a$ zu ermittteln.

Hier ist $\varphi(x)=a^2-x^2$, $\varphi'(a)=-2a$; $\varphi_1(x)=(a-x)^2$, $\varphi_1'(a)=0$; $\psi(x)=a-x$, $\psi'(a)=-1$; $\psi_1(x)=a^3-x^3$, $\psi_1'(x)=-3a^2$; $A=B=A'=1$, $B'=-1$, $m=\frac{1}{3}$, also ist der Werth gleich

$$\frac{\sqrt[3]{-2a}}{-1+\sqrt[3]{3a^2}} = \frac{\sqrt[3]{2a}}{1-\sqrt[3]{3a^2}}.$$

Eben so ist

$$\frac{\sqrt{(x-\sin x)} - \sqrt{x}}{\sqrt{x-\sin x} - \sqrt{1-\cos x}} \text{ für } x=0: \frac{0}{0}.$$

Aber $\varphi(x)=\psi(x)=x-\sin x$, $\varphi'(0)=\psi'(0)=0$, $\varphi_1(x)=x$, $\varphi_1'(0)=1$; $\psi_1(x)=1-\cos x$, $\psi_1'(0)=0$, $m=\frac{1}{2}$, also ist der Werth gleich $\frac{-1}{0-0}=\pm\infty$.

IV. Führt keine dieser Methoden zum Ziele, (indem die Unbestimmtheit durch fortgesetzte Differenzirung etwa nicht verschwindet), so nimmt man zu Reihenentwicklungen seine Zuflucht, wovon wir später (§. 56, IV) einige Beispiele geben wollen.

Digitized by Google

Unbestimmte Formen bei unentwickelten Funktionen.

V. Bei der Bestimmung von $\frac{\partial y}{\partial x}$ nach §. 17 kann diese Grösse für gewisse Werthe von x und y ebenfalls unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen. Das Verfahren, wie wir es angegeben, bleibt jedoch dasselbe.

So z. B. folgt aus $y^4 - a^2 y^2 + 2a^2 x^2 - x^4 = 0$, dass $x = 0$ und $y = 0$ zusammen gehören; ferner ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-2a^2 x + 2x^3}{2y^3 - a^2 y}$$

und wird $\frac{0}{0}$ für $x = 0$, $y = 0$ Alsdann ist eben

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-2a^2 + 6x^2}{6y\frac{\partial y}{\partial x} - a^2\frac{\partial y}{\partial x}} \text{ (für } x = 0,\ y = 0),$$

d. h.

$$\frac{\partial y}{\partial x}\left(-a^2\frac{\partial y}{\partial x}\right) = -2a^2,\ \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 2,\ \frac{\partial y}{\partial x} = \pm\sqrt{2}.$$

Für $y^2(a - x) = x^3$, wo wieder $x = 0$, $y = 0$ zusammen gehören, ist $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{3x^2 + y^2}{2y(a - x)}$ und wird $\frac{0}{0}$ wenn $x = y = 0$. Alsdann ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{6x + 2y\frac{\partial y}{\partial x}}{2\frac{\partial y}{\partial x}(a - x) - 2y} \text{ (für } x = 0 = y),$$

d. h.

$$2a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0,\ \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Aus $(y^2+x^2)^2 - 6axy^2 - ax^2(2x-a) = 0$ folgt $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{3ay^2 - 2x(y^2+x^2) + 3ax^2 - a^2x}{2(y^2+x^2)y - 6axy}$ und wird $\frac{0}{0}$ für $x = y = 0$. Alsdann ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{6ay\frac{\partial y}{\partial x} - 2(y^2+x^2) - 4x\left(y\frac{\partial y}{\partial x} + x\right) + 6ax - a^2}{2\frac{\partial y}{\partial x}(y^2+x^2) + 4y\left(y\frac{\partial y}{\partial x} + x\right) - 6ay - 6ax\frac{\partial y}{\partial x}} \text{ (für } x = y = 0),$$

woraus, da der Nenner $= 0$, der Zähler $= -a^2$ ist, folgt $\frac{\partial y}{\partial x} = -\infty$.

Alle diese in den beiden vorhergehenden §§. vorgenommenen Bestimmungen sind, wie aus der Darstellung sofort hervorgeht, Gränzbestimmungen und gehören also zu den in den §§. 6—9 näher betrachteten Aufgaben und Sätzen. — So also wäre die Aufgabe, der Werth von $\frac{l(x)}{x}$ für $x = \infty$ zu ermitteln, dieselbe mit derjenigen, die verlangt den Gränzwerth von $\frac{l(x)}{x}$ für ein unendlich wachsendes x zu finden u. s. w. — Dass man bei derartigen Untersuchungen die früher angedeuteten Methoden benützen darf, ist selbstverständlich. In manchen Fällen führen sie sicherer zum Ziele. So würde der Werth von $\frac{x - \sin x}{x + \cos x}$ für $x = \infty$ nach der Regel in §. 22, V nicht erhalten werden, da $\frac{1 - \cos x}{1 - \sin x}$ für $x = \infty$ geradezu unbestimmbar ist. Allein $\frac{x - \sin x}{x + \cos x} = \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}}$ wird für $x = \infty$ jedenfalls zu 1, da $\sin x$, $\cos x$ immer endlich sind.

Digitized by Google

Fünfter Abschnitt.

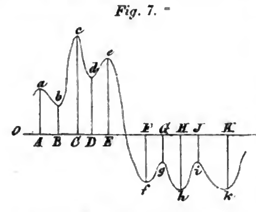
Von den grössten und den kleinsten Werthen für Funktionen einer unabhängig Veränderlichen.

§. 24.

Theorie.

I. Sey $y = f(x)$ eine beliebige Funktion von x, und es erlange dieselbe für $x = a$ einen Werth $f(a)$ so beschaffen, dass derselbe grösser ist, als diejenigen Werthe von $f(x)$, die man erhält, wenn man x Werthe beilegt, die nur wenig grösser oder kleiner sind als a, so sagt man, y habe einen grössten (Maximum-)Werth erlangt; ist dagegen $f(a)$ kleiner als die unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden Werthe von $f(x)$, so hat y für $x = a$ einen kleinsten Werth (Minimum) erlangt.

Fig. 7.



Stellen wir (Fig. 7) den Lauf von $f(x)$ durch eine Kurve dar und ist O K die Abszissenaxe, O der Anfangspunkt, so sind Aa, Cc, Ee, Gg, Ji grösste Werthe der Ordinate, während Bb, Dd, Ff, Hh, Kk kleinste Werthe sind. Es ist aus der Figur ersichtlich, dass ganz wohl ein Minimum grösser seyn kann als ein Maximum; so ist $Dd > Aa$, trotzdem ist erstere Grösse ein kleinster Werth, letztere ein grösster. Eben so ist klar, dass nicht zwei Maxima oder zwei Minima unmittelbar auf einander folgen können, sondern dass immer Maxima und Minima abwechseln, wenn überhaupt eine Funktion in ihrem Verlaufe mehrerer Maxima und Minima fähig ist.

Man ersieht ferner aus der Figur und geht auch aus unserer Erklärung unmittelbar hervor, dass eine Funktion, ehe sie den Maximumwerth erreicht (bei wachsendem x) wächst, dagegen abnimmt, wenn sie diesen Werth überschritten hat. Und umgekehrt, wenn $f(x)$ wächst, indem x gegen a geht, aber abnimmt, sobald x den Werth a überschritten hat, so erreicht sie für $x = a$ ein Maximum.

Eine Funktion wird dagegen (bei wachsendem x) abnehmen, wenn sie gegen den Minimumwerth geht, und zunehmen, sobald sie ihn überschritten hat. Und umgekehrt, wenn $f(x)$ abnimmt, indem x gegen a geht; dagegen zunimmt, wenn x den Werth a überschritten hat, so ist $f(a)$ ein Minimum.

Daraus erklärt sich natürlich von selbst, warum nicht zwei Maxima oder zwei Minima auf einander folgen können.

Bei einem Maximumwerth ist hiernach ein Wechsel vom Zunehmen zum

Digitized by Google

Abnehmen in der Funktion; bei einem Minimumwerth dagegen ein Wechsel vom Abnehmen zum Zunehmen. Alle diese Sätze gelten auch umgekehrt.

Nun haben wir in §. 20, I gesehen, dass wenn y wächst mit wachsendem x, nothwendig $\frac{\partial y}{\partial x}$ positiv ist; dass dagegen $\frac{\partial y}{\partial x}$ negativ ist, wenn y abnimmt mit wachsendem x. Daraus folgt, dass wenn y in die Nähe eines Maximum-Werthes gelangt, $\frac{\partial y}{\partial x}$ vorher positiv, nachher negativ ist; dass dagegen, wenn y in die Nähe eines Minimum-Werthes gelangt, $\frac{\partial y}{\partial x}$ vorher negativ, nachher positiv ist. Man kann also sagen, dass für $y =$ Maximum, $\frac{\partial y}{\partial x}$ von + zu — übergeht; für $y =$ Minimum, $\frac{\partial y}{\partial x}$ dagegen von — zu +. Der Uebergang von + zu —, oder von — zu + geschieht nun dadurch, dass $\frac{\partial y}{\partial x}$ durch 0 oder ∞ geht;* so dass also für das Maximum oder Minimum $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ oder ∞ ist. Daraus ergibt sich nun folgende Regel:

„Um diejenigen Werthe von x zu finden, die y zu einem grössten oder kleinsten Werthe machen können, setze man $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ oder $= \infty$, und bestimme die hieraus folgenden Werthe von x."

II. Um nun zu entscheiden, ob ein so gefundener Werth von x die Funktion y zu einem grössten oder kleinsten Werthe macht, beachte man, dass das Erstere stattfinden wird, wenn $\frac{\partial y}{\partial x}$ für diesen Werth von + zu — übergeht, d. h. vor diesem Werthe positiv, nach demselben negativ ist; dass dagegen das Letztere stattfindet, wenn $\frac{\partial y}{\partial x}$ von — zu + übergeht. Beachten wir zunächst diejenigen Werthe nicht, die $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$ geben, so wird man also übersichtlich sagen:

	vorher,	Max.,	nachher		vorher,	Min.,	nachher
$\frac{\partial y}{\partial x} =$	+	0	—	;	—	0	+ .

Daraus ist klar, dass $\frac{\partial y}{\partial x}$ für ein Maximum im Abnehmen begriffen ist, für ein Minimum im Zunehmen; und umgekehrt, wenn $\frac{\partial y}{\partial x}$ im Abnehmen begriffen ist, hat man ein Maximum. Denn dann ist, da $\frac{\partial y}{\partial x}$ jetzt $= 0$, diese Grösse vorher positiv (> 0), nachher negativ (< 0), so dass (§. 20, I) y vorher wächst, und nachher abnimmt, was ein Maximum anzeigt. Eben so hat man nothwendig ein Minimum, wenn $\frac{\partial y}{\partial x}$ (das jetzt $= 0$ ist) im Zunehmen begriffen ist.

---

* Für $\frac{\partial y}{\partial x} = a - x$ geht bei $x = a$ diese Grösse von + zu — durch 0; für $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{x - a}$ dagegen von — zu + durch ∞.

Nach §. 20, I ist aber $\frac{\partial y}{\partial x}$ zunehmend, wenn $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} > 0$; dagegen abnehmend, wenn $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} < 0$, so dass man sagen wird:

„Die Werthe von x, welche $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ machen, geben, in y gesetzt, ein Maximum, wenn sie $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ zugleich negativ machen; dagegen ein Minimum, wenn sie $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ positiv machen." *

Fall, da $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ wird.

III. Wird für $x = a$, für welchen Werth $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, auch $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, so kann die obige Entscheidung nicht eintreten. Um uns hier helfen zu können, wollen wir zunächst folgenden Satz erläutern:

Ist $f^r(x)$ unmittelbar vor und nach dem Werthe $x = a$ positiv; sind $f^{r-1}(a)$, $f^{r-2}(a)$ gleich 0, so ist $f^{r-2}(x)$ unmittelbar vor und nach dem Werthe $x = a$ positiv.

Denn da $f^r(x)$ positiv ist in der Nachbarschaft von $x = a$, so wächst also $f^{r-1}(x)$ in dieser Nähe immer (§. 20, I); also da $f^{r-1}(a) = 0$, so ist vor $x = a$ die Grösse $f^{r-1}(x)$ negativ, nach $x = a$ dagegen $f^{r-1}(x)$ positiv. Daraus ergibt sich aber weiter, dass $f^{r-2}(x)$ vor $x = a$ abnimmt, nach $x = a$ dagegen zunimmt. Da $f^{r-2}(a) = 0$, so muss also $f^{r-2}(x)$ vor $x = a$ positiv gewesen seyn, nach $x = a$ aber (da diese Grösse zunimmt) wieder positiv seyn.

Ganz eben so beweist man, dass wenn $f^r(x)$ unmittelbar vor und nach $x = a$ negativ ist; ferner $f^{r-1}(a) = 0$, $f^{r-2}(a) = 0$, auch $f^{r-2}(x)$ unmittelbar vor und nach $x = a$ negativ seyn muss.

IV. Seyen nun für $x = a$: $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}$ sämmtlich Null, nicht aber $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$. Dabei müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

---

* Sey a so, dass für $x = a$: $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} < 0$, so hat man ein Maximum. Denn da $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ im Augenblick negativ, so nimmt $\frac{\partial y}{\partial x}$ ab (§. 20, I); da aber $\frac{\partial y}{\partial x}$ jetzt 0 ist, so war es kurz vorher positiv, nachher aber negativ; also nahm y vorher zu, nachher ab, was ein Maximum andeutet.

Man kann dabei auch bemerken, dass wenn $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} < 0$ ist für $x = a$, man immer Werthe von x, kleiner oder grösser als a, aber so nahe an a wählen kann, dass $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ für alle negativ bleibt, also $\frac{\partial y}{\partial x}$ für alle (vor und nach a) abnimmt, woraus mit voller Klarheit hervorgeht, dass $\frac{\partial y}{\partial x}$ vorher positiv, nachher negativ seyn muss.

Digitized by Google

1) n ist eine gerade Zahl.

Setzen wir 2m für n, so ist also für x = a:

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots\ldots, \frac{\partial^{2m-1} y}{\partial x^{2m-1}} \text{ Null}, \frac{\partial^{2m} y}{\partial x^{2m}} \text{ nicht Null.}$$

Ist nun $\frac{\partial^{2m} y}{\partial x^{2m}}$ für x = a positiv, so ist in der unmittelbaren Nähe von x = a diese Grösse immer noch positiv;* also nach dem Satze in III, ist auch $\frac{\partial^{2m-2} y}{\partial x^{2m-2}}$ vor und nach x = a positiv; eben so nun auch $\frac{\partial^{2m-4} y}{\partial x^{2m-4}}$ u. s. w., endlich $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ vor und nach x = a positiv. Demnach wächst $\frac{\partial y}{\partial x}$ vor und nach x = a; da es aber für x = a Null ist, so ist es vor x = a negativ, nach x = a positiv. Diess zeigt aber (nach I) in y ein Minimum an.

Ist $\frac{\partial^{2m} y}{\partial x^{2m}}$ für x = a negativ, so hat man für x = a ganz eben so in y ein Maximum.

2) n eine ungerade Zahl.

Setzen wir 2m + 1 statt n, so ist also für x = a:

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots\ldots, \frac{\partial^{2m} y}{\partial x^{2m}} \text{ Null}, \frac{\partial^{2m+1} y}{\partial x^{2m+1}} \text{ nicht Null.}$$

Sey nun $\frac{\partial^{2m+1} y}{\partial x^{2m+1}}$ für x = a positiv, also auch in der unmittelbaren Nähe von x = a positiv, so sind (nach III) nun auch $\frac{\partial^{2m-1} y}{\partial y^{2m-1}}, \frac{\partial^{2m-3} y}{\partial x^{2m-3}}, \ldots\ldots, \frac{\partial y}{\partial x}$ vor und nach x = a positiv. Nach I ist dadurch angezeigt, dass weder ein Maximum, noch ein Minimum in y für x = a vorhanden ist.

Dasselbe erhält man, wenn $\frac{\partial^{2m+1} y}{\partial x^{2m+1}}$ für x = a negativ ist.

Daraus fliesst nun die folgende allgemeine Regel:

„Sind von den Grössen $f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots$ eine Reihe von Anfang her für x = a gleich 0 und ist die erste, welche nicht 0 ist, von gerader Ordnung [d. h. $f''(x), f^4(x), \ldots$], so ist f(a) ein Maximum, wenn dieselbe negativ, ein Minimum, wenn sie positiv ist. Ist dagegen jene erste, die nicht 0 ist, von ungerader Ordnung, so ist f(a) weder ein grösster, noch ein kleinster Werth."

V. Wir haben im Vorstehenden vorausgesetzt, es sey y unmittelbar als Funktion von x gegeben; wäre diess nicht der Fall, sondern man hätte die Gleichung f(x, y) = 0, so würde man eben $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots$ nach §. 19, IV daraus bilden und in der angegebenen Weise verfahren.

Endlich kann es sich ereignen, dass man zum Voraus weiss, dass ein

* Wenn sie negativ werden sollte, so müsste sie durch 0 (oder ∞) gehen. Wäre sie 0 für $x = a + \alpha$, so bliebe sie immerhin positiv von a bis $a + \alpha$, was, wie klein auch α seyn mag, für unsere Zwecke genügt.

Digitized by Google

Maximum oder Minimum stattfinden werde, und man nur den betreffenden Werth sucht; alsdann genügt es, bloss $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ (oder ∞) zu setzen.

VI. Wir haben bei den obigen Regeln bloss die Wurzeln der Gleichung $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ im Auge gehabt; beachtet man die ebenfalls zulässige Gleichung $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$ und ist $x = a$ eine Wurzel derselben, so wird man in $\frac{\partial y}{\partial x}$ ganz unmittelbar untersuchen, ob diese Grösse vor $x = a$ von anderem Zeichen ist als nach $x = a$, und wenn diess der Fall ist, so wird $x = a$ in y ein Maximum geben, wenn $\frac{\partial y}{\partial x}$ vor $x = a$ positiv, nach nach $x = a$ negativ ist, ein Minimum dagegen, wenn das Umgekehrte stattfindet.

VII. Die Regel in IV lässt sich auch aus §. 22, II ziehen. Denn ist dort $f(x)$ durch $f(x) - f(a)$ ersetzt, so bleiben die Differentialquotienten doch nur die von $f(x)$ und es ist $f(x) - f(a)$ so beschaffen, dass diese Grösse selbst, nebst den $n-1$ ersten Differentialquotienten Null sind, so dass also

$$f(a+h) - f(a) = f^n(a) \frac{h^n}{2 \ldots n} + \frac{M h^{n+1}}{2 \ldots n+1},$$

wenn $f'(a), \ldots, f^{n-1}(a)$ Null sind, $f^n(a)$ aber nicht. Lässt man hier h sehr klein seyn, so hängt das Zeichen der zweiten Seite vom ersten Gliede ab (§. 7, V), so dass also die beiden Grössen

$$f(a+h) - f(a) \text{ und } f^n(a) \frac{h^n}{2 \ldots n} \qquad (a)$$

gleiches Zeichen haben.

Soll nun $f(a)$ ein Maximum seyn, so muss $f(a+h) - f(a)$ für kleine (positive oder negative) h negativ seyn. Ist also die zweite Grösse (a) immer negativ, so ist diess der Fall, sonst nicht. Welches Zeichen auch $f^n(a)$ habe, so wird, wenn n ungerade ist, dieses zweite Glied für positive und negative h verschiedenes Zeichen haben. Bei ungeraden n gibt es also weder ein Maximum, noch ein Minimum.

Ist n gerade, so hat h^n immer das positive Zeichen, die zweite Grösse (a) ist also negativ, wenn $f^n(a)$ es ist. Also ist $f(a)$ ein Maximum, wenn n gerade und $f^n(a)$ negativ ist.

Soll $f(a)$ ein Minimum seyn, so muss $f(a+h) - f(a)$ immer positiv seyn. Diess ist der Fall, wenn n gerade und $f^n(a) > 0$ ist. Also erreicht $f^n(a)$ ein Minimum nur dann, wenn $f^n(a)$ bei geradem n positiv ist.

§. 25.

Beispiele.

I. Man soll x so bestimmen, dass $y = x^m (a-x)^n$ ein Maximum oder Minimum werde. Dabei setzen wir m und n positiv und ganz, a eben so positiv voraus.

Hier ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = x^{m-1}(a-x)^{n-1}[m(a-x) - nx], \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = x^{m-2}(a-x)^{n-2}[m(m-1)(a-x)^2 - 2mnx(a-x) + n(n-1)x^2]$$

Soll nun $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ seyn, so ist diess möglich, wenn $m(a-x) - nx = 0$, $x = \frac{am}{m+n}$, was auch m und n seyen; oder wenn $x = 0$ für $m > 1$, oder $a = x$ für $n > 1$. Für

Digitized by Google

$x = \frac{am}{m+n}$ ist $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{m^{m-1} n^{n-1} a^{m+n-2}}{(m+n)^{m+n-3}}$, d. h. negativ, so dass $x = \frac{am}{m+n}$ immer ein Maximum gibt. Was die anderen zwei Werthe anbelangt, so ist es bequemer $\frac{\partial y}{\partial x}$ geradezu zu untersuchen. Sey also $x = 0 + h = h$, $m > 1$, so ist dann $\frac{\partial y}{\partial x} = h^{m-1} (a-h)^{n-1} [ma - (m+n)h]$ und da h sehr klein, a positiv, so wird diese Grösse immer positiv seyn, was auch h ist, wenn $m-1$ gerade, also m ungerade; dagegen wird sie positiv mit positivem h, negativ mit negativem h seyn, wenn $m-1$ ungerade, also m gerade ist. Daraus folgt, dass für $x = 0$ die Grösse $x^m (a-x)^n$ ein Minimum ist, wenn m gerade; aber weder Minimum noch Maximum, wenn m ungerade ist.

Ist zweitens $x = a + h$, so ist $\frac{\partial y}{\partial x} = (a+h)^{m-1} (-h)^{n-1} [-mh - n(a+h)]$ und da bei kleinem h sicher $-mh - n(a+h)$ negativ, so wird $\frac{\partial y}{\partial x}$ immer negativ seyn, wenn $n-1$ gerade; dagegen positiv bei positivem h und umgekehrt, wenn $n-1$ ungerade ist. Also gibt $x = a$ ein Minimum, wenn n gerade, und weder Minimum noch Maximum, wenn n ungerade ist.

Für $y = x(a-x)$ hat man also bloss Maximum, wenn $x = \frac{1}{2} a$.

Für $y = x(a-x)^2$ hat man Maximum, wenn $x = \frac{a}{3}$, Minimum, wenn $x = a$.

Für $z = x^2 (a-x)^2$ „ „ „ „ $x = \frac{a}{2}$, „ „ $x = a$, Minimum, wenn $x = 0$, u. s. w.

Die erste dieser Grössen entspricht der Aufgabe, aus der gegebenen Summe a zweier an einander stossender Seiten eines Rechtecks das möglich grösste Rechteck zu bilden. Ist nämlich x die eine Seite, $a - x$ also die andere, so ist die Fläche $= x(a-x)$ und wird ein Maximum, wenn $x = \frac{a}{2}$, wo dann auch $a - x = \frac{a}{2}$, so dass das fragliche Rechteck ein Quadrat ist.

Eben so findet man, dass $e^x + e^{-x} + 3\cos x$ ein Maximum für $x = 0$ (wobei man bis zum vierten Differentialquotienten gehen muss). $x^2 + ax + b$ ein Minimum für $x = -\frac{a}{2}$; $\frac{l(x)}{x}$ ein Maximum für $x = e$; $x^a e^{-x}$ ein Maximum ist für $x = a$ $(a > 0)$.

II. Man soll die Werthe von x bestimmen, für welche y ein Maximum oder Minimum wird, wenn immer

$$y^2 - 3xy - 2x + x^2 = 0.$$

Man hat hieraus

$$2y\frac{\partial y}{\partial x} - 3y - 3x\frac{\partial y}{\partial x} - 2 + 2x = 0,$$

und da für das Maximum oder Minimum $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, so ist also

$$-3y - 2 + 2x = 0,$$

aus welcher Gleichung, in Verbindung mit der gegebenen, x und y bestimmt werden. Man hat zuerst

$$y = \frac{2}{3}(x-1), \text{ also } \frac{4}{9}(x-1)^2 - 2x(x-1) - 2x + x^2 = 0,\ x = \frac{2}{5}, \text{ oder } -2.$$

$$y = -\frac{2}{5}, \text{ oder } -2.$$

Digitized by Google

Da man hat $$2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 2y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 3\frac{\partial y}{\partial x} - 3x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2 = 0$$

und $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, so ist $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{-2}{2y - 3x} \text{ (für obige Werthe von x und y).}$$

Für $x = \frac{2}{5}$, $y = -\frac{2}{5}$ ist diess $= 1$, also y ein Minimum; für $x = -2$, $y = -2$: -1, also y ein Maximum.

III. Aus zwei gegebenen Seiten a und b eines Dreiecks das grösstmögliche Dreieck zu bilden. Sey x der Winkel, unter dem die Seiten sich schneiden, so ist $y = \frac{1}{2} a b \sin x$ die Fläche des Dreiecks. Dann ist $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2} a b \cos x$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} a b \sin x$, also damit $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ sey, muss $x = 90^0$, d. h. das Dreieck ein rechtwinkliges mit den Katheten a und b seyn. Für $x = 90^0$ ist $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} a b$, also negativ, mithin das Dreirck ein grösstes.

IV. Unter allen Rechtecken von gegebenem Inhalte a das zu suchen, das den kleinsten Umfang hat.

Seyen x und z zwei aneinander stossende Seiten, so ist zunächst $x z = a$, also $z = \frac{a}{x}$; ferner ist der Umfang $= 2x + 2z = 2x + \frac{2a}{x} = y$ und mithin $\frac{\partial y}{\partial x} = 2 - \frac{2a}{x^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{4a}{x^3}$. Da $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ sonach immer positiv, so ist der Umfang wirklich ein kleinster. Ferner ist $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, wenn $2 = \frac{2a}{x^2}$, $x = \sqrt{a}$, woraus auch $z = \frac{a}{x} = \sqrt{a}$, so dass das gesuchte Rechteck ein Quadrat ist.

Fig. 8.

V. AE (Fig. 8) stehe senkrecht auf AC; $BC = a$ sey gegeben, eben so $AB = b$; man soll den Punkt D finden, in welchem die Linien BD und CD mit einander den grössten Winkel machen.

Dass hier nur von einem Maximum die Rede seyn kann, ist klar; ein Minimum fände sich, wenn D in A wäre, da dann $CDB = 0$ geworden. Wir brauchen also bloss den eigentlichen Werth des Maximums aufzusuchen. Sey nun $AD = x$, so ist

$$tg\, CDA = \frac{a+b}{x},\quad tg\, BDA = \frac{b}{x},$$

also

$$tg\, CDB = \frac{\frac{a+b}{x} - \frac{b}{x}}{1 + \frac{b(a+b)}{x^2}}, \text{ indem } CDB = CDA - BDA.$$

Da sicher CDB ein spitzer Winkel, so ist seine Tangente auch ein Maximum, wenn der Winkel ein Maximum ist, so dass $y = \frac{\frac{a+b}{x} - \frac{b}{x}}{1 + \frac{b(a+b)}{x^2}} = \frac{a x}{x^2 + b(a+b)}$ ein Maximum werden muss Daraus

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a.[x^2 + b(a+b)] - 2ax^2}{[x^2 + b(a+b)]^2} = 0,\quad x^2 + b(a+b) - 2x^2 = 0,\quad x = \sqrt{b(a+b)}.$$

Digitized by Google

Dann ist $$tg\,CDB = \frac{a\sqrt{b(a+b}}{2b(a+b)} = \frac{a}{2\sqrt{b(a+b)}}.$$

Was die beiden Winkel bei B und C anbelangt (in dem Dreiecke CDB), so ist
$$tg(180^0 - B) = \frac{x}{b} = \sqrt{\frac{a+b}{b}},\ tg\,C = \frac{x}{a+b} = \sqrt{\frac{b}{a+b}},\ \left(tg\,B = -\frac{x}{b}\right),$$

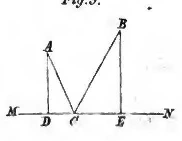
also $$tg\,(B-C) = \frac{-\sqrt{\frac{a+b}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a+b}}}{1 - \sqrt{\frac{a+b}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a+b}}} = \infty,\ B - C = 90^0.$$

(Man vergl. damit mein „Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie" §. 35, Nr. 10).

Man erhält dieselbe Auflösung, wenn man sich die Aufgabe stellt, den Punkt D an dem senkrechten Thurme AE zu finden, in welchem BC unter dem grössten Gesichtswinkel erscheint.

VI. Die Punkte A und B (Fig. 9), so wie die Gerade MN sind gegeben; man soll in letzterer C so bestimmen, dass die Summe der Geraden AC + BC die kleinstmögliche sey. — Dass es sich hier nur um ein Minimum handeln kann, ist aus geometrischen Gründen klar, eben so, dass der Punkt C zwischen D und E, die Fusspunkte der von A und B auf MN gezogenen Senkrechten, fallen muss. Sey also $AD = a$, $BE = b$, $DE = c$, $DC = x$, also $CE = c - x$, so ist

Fig. 9.



$$AC = \sqrt{a^2 + x^2},\ BC = \sqrt{(c-x)^2 + b^2},\quad y = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(c-x)^2 + b^2}.$$

Daraus $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}} = 0,\ \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}},$$

und wenn man quadrirt:
$$\frac{x^2}{a^2+x^2} = \frac{(c-x)^2}{(c-x)^2+b^2},\ x^2(c-x)^2 + b^2x^2 = a^2(c-x)^2 + x^2(c-x)^2,\ b^2x^2 = a^2(c-x^2,$$
$$bx = a(c-x),\ x = \frac{ac}{a+b}.$$

(Man darf hier nicht $bx = -a(c-x)$ setzen, da b, x, a, $c-x$ sämmtlich positiv sind.) Daraus $c - x = \frac{bc}{a+b}$, d. h.
$$x : c - x = a : b,\ DC : CE = AD : BE,$$
so dass die Dreiecke ADC und BEC ähnlich, also die Winkel ACD und BCE gleich sind. (Ein von A ausgehender, an MN zurückgeworfener und nach B gelangender Lichtstrahl legt also den möglich kleinsten Weg zurück.)

VII. An einem Hebel (Fig. 10), dessen Stützpunkt in A ist, wirkt in B die bekannte Kraft P, wobei $AB = a$; das Gewicht der gleich dicken Hebelstange ist $= b$ für die Einheit der Länge. Wie lang muss der Hebel seyn, damit an seinem Ende die möglich kleinste Kraft y der P das Gleichgewicht halte?

Fig. 10.

Digitized by Google

Sey $AC = x$ die Hebellänge, sein Gewicht also bx, so hat man für das Gleichgewicht:

$$yx = aP + bx\frac{x}{2},\quad y = \frac{aP}{x} + \frac{bx}{2},\quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{aP}{x^2} + \frac{b}{2},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{2aP}{x^3},$$

so dass also
$$-\frac{aP}{x^2} + \frac{b}{2} = 0,\quad x = \sqrt{\frac{2aP}{b}}$$

seyn muss. Da $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} > 0$, so hat man für y wirklich ein Minimum $= \dfrac{aP + \frac{b}{2}\cdot\frac{2aP}{b}}{\sqrt{\frac{2aP}{b}}}$ $= \sqrt{2abP}$.

VIII. In eine Kugel vom Halbmesser r soll man denjenigen senkrechten Kegel einschreiben, dessen gesammte Oberfläche ein Maximum sey.

Sey x die Entfernung des Kugelmittelpunktes von dem Mittelpunkt der Grundfläche des Kegels, so ist der Halbmesser der letzteren $= \sqrt{r^2 - x^2}$, seine Höhe $= r + x$, also seine Seite $= \sqrt{r^2 - x^2 + (r+x)^2} = \sqrt{2r(r+x)}$, mithin die Oberfläche $y = \pi(r^2 - x^2) + \pi\sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{2r(r+x)} = \pi[r^2 - x^2 + \sqrt{(r+x)(r-x)}\sqrt{2r(r+x)}]$ $= \pi[r^2 - x^2 + (r+x)\sqrt{2r(r-x)}]$; $\frac{\partial y}{\partial x} = \pi\left[-2x + \sqrt{2r(r-x)} - \frac{(r+x)\sqrt{2r}}{2\sqrt{r-x}}\right] = 0$, d. h. $-4x\sqrt{r-x} + 2\sqrt{2r(r-x)^2} - (r+x)\sqrt{2r} = 0$, $4x\sqrt{r-x} = 2(r-x)\sqrt{2r}$ $-(r+x)\sqrt{2r} = (r-3x)\sqrt{2r}$, $16x^2(r-x) = (r-3x)^2 2r$, $8rx^2 - 8x^3 = r^3 - 6r^2x$ $+ 9rx^2$, $x^3 + \frac{r}{8}x^2 - \frac{6r^2}{8}x + \frac{r^3}{8} = 0$.

Da für $x = -r$ die erste Seite $= 0$, so lässt sie sich durch $x + r$ dividiren; wirklich ist die Gleichung auch

$$(x+r)\left(x^2 - \frac{7}{8}rx + \frac{1}{8}r^2\right) = 0,$$

und da $x^2 - \frac{7}{8}rx + \frac{1}{8}r^2 = 0$ die Wurzeln $x = \frac{7}{16}r \pm \frac{r}{16}\sqrt{17}$ hat, so sind $-r$, $\frac{7+\sqrt{17}}{16}r$, $\frac{7-\sqrt{17}}{16}r$ die drei Wurzeln obiger kubischen Gleichung. Wie man jedoch sieht, ist $\frac{\partial y}{\partial x}$ nicht 0 für $x = -r$, und nicht für $x = \frac{7+\sqrt{17}}{16}r$,* wohl aber für

---

* Für $x = -r$ ist $\frac{\partial y}{\partial x} = \pi[2r + \sqrt{2r.2r}] = 4r\pi$; für $x = \frac{7+\sqrt{17}}{16}r$: $\frac{\partial y}{\partial x}$ $= \pi\left[-\frac{7+\sqrt{17}}{8}r + \frac{r}{4}\sqrt{2(9-\sqrt{17})} - \frac{(23+\sqrt{17})r\sqrt{2}}{8\sqrt{9-\sqrt{17}}}\right] = \frac{\pi r\sqrt{2}}{8\sqrt{9-\sqrt{17}}}$ $\left[-\frac{(7+\sqrt{17})\sqrt{9-\sqrt{17}}}{\sqrt{2}} + 2(9-\sqrt{17}) - (23+\sqrt{17})\right] = \frac{\pi r\sqrt{2}}{8\sqrt{9-\sqrt{17}}}$ $\left[-\frac{(7+\sqrt{17})\sqrt{9-\sqrt{17}}}{\sqrt{2}} - (5+3\sqrt{17})\right]$, welche Grösse negativ ist; für $x = \frac{7-\sqrt{17}}{16}r$: $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\pi r\sqrt{2}}{8\sqrt{9+\sqrt{17}}}\left[-\frac{(7-\sqrt{17})\sqrt{9+\sqrt{17}}}{\sqrt{2}} + 2(9+\sqrt{17}) - (23-\sqrt{17})\right] = \frac{\pi r\sqrt{2}}{8\sqrt{9+\sqrt{17}}}$ $\left[-5+3\sqrt{17} - \sqrt{\frac{(7-\sqrt{17})^2(9+\sqrt{17})}{2}}\right] = \frac{\pi r\sqrt{2}}{8\sqrt{9+\sqrt{17}}}[-5+3\sqrt{17} - (-5+3\sqrt{17})]$ $= 0$.

Digitized by Google

$x = \frac{7-\sqrt{17}}{16}\, r$. Also ist der Halbmesser des Kegels $= \sqrt{r^2 - \left(\frac{7-\sqrt{17}}{16}\right)^2 r^2}$ $= \frac{r}{16}\sqrt{190+14\sqrt{17}}$, die Höhe $= \frac{23-\sqrt{17}}{16}\, r$.

IX. Stellen AG, BF (Fig. 11) zwei parallele Wände vor, deren Entfernung AB $= a$ ist, und in deren einer sich eine Oeffnung BC von der Höhe h befindet, so soll man entscheiden, ob ein Balken DE, dessen Länge $= \lambda$, zu der Oeffnung BC hineingebracht werden könne (wenn $\lambda > a$).

Fig. 11.

Man wird natürlich den Balken zuerst an der Wand AG aufrichten, ihn also die Lage DE annehmen lassen; wird nun, indem E vorwärts, D abwärts gleitet, die Erhöhung BR des Balkens unter der Oeffnung nie h übersteigen, so kann man ihn zur Thüre hineinbringen, so dass also der grösste Werth dieser Erhöhung (BR $= y$) kleiner als h, oder höchstens $= h$ seyn muss. Sey nun BE $= x$; so ist ER:ED $= x : a + x$, d. h. ER $= \frac{\lambda x}{a+x}$; $y = \sqrt{ER^2 - x^2}$ $= \frac{x}{a+x}\sqrt{\lambda^2-(a+x)^2}$, also $\frac{\partial y}{\partial x} = \sqrt{\lambda^2-(a+x)^2}\,\frac{a}{(a+x)^2} - \frac{x}{\sqrt{\lambda^2-(a+x)^2}}$, und da diess $= 0$ zu setzen ist, so hat man:

$$a[\lambda^2-(a+x)^2] = x(a+x)^2,\quad a\lambda^2 = (a+x)^3,\quad x = -a + \sqrt[3]{a\lambda^2}$$

also
$$y = -\frac{a-\sqrt[3]{a\lambda^2}}{\sqrt[3]{a\lambda^2}}\sqrt{\lambda^2-\sqrt[3]{a^2\lambda^4}} = \left(1-\sqrt[3]{\frac{a^2}{\lambda^2}}\right)\sqrt{\lambda^2-\sqrt[3]{a^2\lambda^4}}$$
$$= \left(1-\sqrt[3]{\frac{a^2}{\lambda^2}}\right)\lambda\sqrt{1-\sqrt[3]{\frac{a^2}{\lambda^2}}} = \lambda\left(1-\sqrt[3]{\frac{a^2}{\lambda^2}}\right)^{\frac{3}{2}},$$

so dass immer
$$\lambda\left(1-\sqrt[3]{\frac{a^2}{\lambda^2}}\right)^{\frac{3}{2}} \leqq h,\ \text{d. h.}\ \lambda^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{a^{\frac{2}{3}}}{\lambda^{\frac{2}{3}}}\right) \leqq h^{\frac{2}{3}},\ \lambda^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} \leqq h^{\frac{2}{3}}$$

seyn muss.

X. Man soll ein offenes zylindrisches Gefäss von bekanntem Inhalte a konstruiren, so dass der Boden und die Wände die Dicke b haben, dabei aber möglichst wenig Material zur Konstruktion verwendet wird.

Sey x der innere Halbmesser des Bodens, z die innere Höhe, so ist der Inhalt $= x^2\pi z$ und da derselbe $= a$ seyn soll, so ist $z = \frac{a}{\pi x^2}$. Ferner ist der körperliche Inhalt des Bodens $= (x+b)^2\pi b$, der Wände $= [(x+b)^2\pi - x^2\pi]z$, also der ganze körperliche Inhalt des Gefässmaterials $=$

$$b\pi(b+x)^2 + \pi z[2bx+b^2] = b\pi(b+x)^2 + \frac{a}{x^2}(2bx+b^2) = y,$$

also
$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2b\pi(b+x) - \frac{2a}{x^3}(2bx+b^2) + \frac{2ba}{x^2} = 0,$$
$$b^2\pi + b\pi x - \frac{ab}{x^2} - \frac{ab^2}{x^3} = 0,\quad \pi(b+x) - \frac{a}{x^3}(b+x) = 0,$$

und da nicht $b+x=0$, so ist $\pi = \frac{a}{x^3}$, $x = \sqrt[3]{\frac{a}{\pi}}$, dann $z = \frac{a}{\pi}\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{a^2}} = \sqrt[3]{\frac{a}{\pi}}$.

Digitized by Google

d. h. es ist der innere Halbmesser gleich der Höhe zu machen. (Die Wanddicke ist somit ganz gleichgiltig.) Hier ist $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2b\pi + \frac{4ab}{x^3} + \frac{6ab^2}{x^4}$, also > 0, und man hat somit ein Minimum.

XI. Man soll einen Zylinder vom Inhalte a konstruiren, so dass seine Oberfläche die möglich kleinste sey.

Sey wieder x der Halbmesser, z die Höhe, so ist $x^2 \pi z = a$, $z = \frac{a}{\pi x^2}$. Die Oberfläche ist $= 2x^2\pi + 2\pi x z = 2\pi x^2 + \frac{2a}{x} = y$, also muss $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, d. h.

$$4\pi x - \frac{2a}{x^2} = 0,\quad 2\pi x^3 = a,\quad x = \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}$$

seyn; dann ist $z = \frac{a}{\pi}\sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{a^2}} = \sqrt[3]{\frac{4a}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{8a}{2\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}} = 2x$, so dass die Höhe dem Durchmesser gleich seyn muss. (Anwendung bei Münzen, deren Oberfläche wegen der Abnützung möglichst klein seyn muss.)

XII. Es ist ein Flüssigkeitsmaass von der Form eines abgekürzten Kegels zu verfertigen, das bei gegebener Neigung α der Seiten gegen die Grundfläche und dem Inhalte a die möglichst kleine Fläche habe.

Sey x der Halbmesser der Grundfläche, h die Höhe des Kegels, so ist die (schiefe) Seite $= \frac{h}{\sin\alpha}$, und der Halbmesser der obern (kleinern) Grundfläche $= x - h\, \cot g\, \alpha$. Demnach ist der Kubikinhalt $a = \frac{1}{3}\pi h\,[x^2 + x(x - h\cot g\,\alpha) + (x - h \cot g\,\alpha)^2] = \frac{1}{3}\pi h \frac{[x^3 - (x - h\cot g\,\alpha)^3]}{x - (x - h\cot g\,\alpha)} = \frac{1}{3}\pi\, tg\,\alpha\,[x^3 - (x - h\cot g\,\alpha)^3]$, woraus

$$x - h\cot g\,\alpha = \left(x^3 - \frac{3a}{\pi}\cot g\,\alpha\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Die Oberfläche besteht aus der Grundfläche und dem Mantel des Kegels, so dass, wenn dieselbe y ist, man hat

$$y = \pi x^2 + (2x - h\cot g\,\alpha)\frac{\pi h}{\sin\alpha} =$$

$$= \pi\left[x^2 + \frac{x^2}{\cos\alpha} + (2x - h\cot g\,\alpha)\frac{h}{\sin\alpha} - \frac{x^2}{\cos\alpha}\right]$$

$$= \frac{\pi}{\cos\alpha}\left[x^2(1+\cos\alpha) + (2x - h\cot g\,\alpha)h\cot g\,\alpha - x^2\right]$$

$$= \frac{\pi}{\cos\alpha}\left[2x^2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha - (x - h\cot g\,\alpha)^2\right] = \frac{\pi}{\cos\alpha}\left[2x^2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha - \left(x^3 - \frac{3a}{\pi}\cot g\,\alpha\right)^{\frac{2}{3}}\right].$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\pi}{\cos\alpha}\left[4x\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha - 2\left(x^3 - \frac{3a}{\pi}\cot g\,\alpha\right)^{-\frac{1}{3}}x^2\right],$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\pi}{\cos\alpha}\left[4\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha + 2x^4\left(x^3 - \frac{3a}{\pi}\cot g\,\alpha\right)^{-\frac{4}{3}} - 4x\left(x^3 - \frac{3a}{\pi}\cot g\,\alpha\right)^{-\frac{1}{3}}\right].$$

Setzt man $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, so ergibt sich, da x nicht $= 0$:

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{x}{\sqrt[3]{\left(x^3 - \frac{3a}{\pi}\cot g\,\alpha\right)}},\quad x = \sqrt[3]{\frac{24a\cot g\,\alpha\cos^6\frac{1}{2}\alpha}{\pi[8\cos^6\frac{1}{2}\alpha - 1]}}.$$

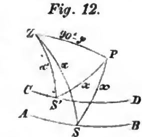
Digitized by Google

Da jetzt $(x^3 - \frac{3a}{\pi} cotg\,\alpha)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2 cos^2 \frac{1}{2}\alpha}{x}$, so ist $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\pi}{cos\,\alpha}[4 cos^2\frac{1}{2}\alpha + 32 cos^8 \frac{1}{2}\alpha - 8 cos^2 \frac{1}{2}\alpha] = \frac{4\pi cos^2 \frac{1}{2}\alpha}{cos\,\alpha}[8 cos^6 \frac{1}{2}\alpha - 1]$. Ferner ist $8 cos^6 \frac{1}{2}\alpha - 1 = (4 cos^4 \frac{1}{2}\alpha + 2 cos^2 \frac{1}{2}\alpha + 1)(2 cos^2 \frac{1}{2}\alpha - 1) = (4 cos^4 \frac{1}{2}\alpha + 2 cos^2 \frac{1}{2}\alpha + 1) cos\,\alpha$, also $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 4\pi cos^2 \frac{1}{2}\alpha [1 + 2 cos^2 \frac{1}{2}\alpha + 4 cos^4 \frac{1}{2}\alpha]$, d. h. > 0, so dass man wirklich ein Minimum hat.

XIII. Für einen Ort der Erde, dessen geographische Breite $= \varphi$ ist, soll man denjenigen Stern (von der Deklination x) angeben, der in der kürzesten Zeit von einem gegebenen, mit dem Horizonte parallelen Kreise zu einem andern ebenfalls gegebenen solchen Kreise gelangt.

Sey (Fig. 12) Z das Zenith des Ortes, P der Pol, AB und CD die zwei mit dem Horizontale parallelen Kreise, deren Zenithdistanzen $= \alpha$ und α' seyen; endlich S und S' die Lagen des fraglichen Sternes, wenn er durch die beiden Kreise geht, so dass PS = PS' = x. Der Winkel SPS' misst die Zeit und es soll derselbe also ein Minimum seyn. Ferner ist $PZ = 90^0 - \varphi$, $ZS' = \alpha'$, $ZS = \alpha$, also in den sphärischen Dreiecken ZSP, ZS'P:

Fig. 12.



$$cos\,\alpha = sin\,\varphi\, cos\,x + cos\,\varphi\, sin\,x\, cos\,ZPS,$$
$$cos\,\alpha' = sin\,\varphi\, cos\,x + cos\,\varphi\, sin\,x\, cos\,ZPS',$$

woraus, wenn man nach x differenzirt und beachtet, dass α, α', φ konstant, aber ZPS, ZPS' veränderlich sind, folgt:

$$0 = -sin\,\varphi\, sin\,x + cos\,\varphi\, cos\,x\, cos\,ZPS - cos\,\varphi\, sin\,x\, sin\,ZPS \frac{\partial(ZPS)}{\partial x}.$$
$$0 = -sin\,\varphi\, sin\,x + cos\,\varphi\, cos\,x\, cos\,ZPS' - cos\,\varphi\, sin\,x\, sin\,ZPS' \frac{\partial(ZPS')}{\partial x}.$$

Ferner ist SPS' = ZPS − ZPS' und da, indem SPS' = Minimum seyn soll, $\frac{\partial(SPS')}{\partial x} = 0$, so ist $\frac{\partial(ZPS)}{\partial x} = \frac{\partial(ZPS')}{\partial x}$. Beachtet man diess, so wie dass nach obigen Formeln:

$$\frac{\partial(ZPS)}{\partial x} = -\frac{tg\,\varphi}{sin\,ZPS} + cotg\,x\, cotg\,ZPS,\quad \frac{\partial(ZPS')}{\partial x} = -\frac{tg\,\varphi}{sin\,ZPS'} + cotg\,x\, cotg\,ZPS',$$

so hat man zur Bestimmung von x, ZPS, ZPS' die Gleichungen:

$$\frac{-tg\,\varphi}{sin\,ZPS} + cotg\,x\, cotg\,ZPS = -\frac{tg\,\varphi}{sin\,ZPS'} + cotg\,x\, cotg\,ZPS',$$
$$cos\,\alpha = sin\,\varphi\, cos\,x + cos\,\varphi\, sin\,x\, cos\,ZPS,\quad cos\,\alpha' = sin\,\varphi\, cos\,x + cos\,\varphi\, sin\,x\, cos\,ZPS'.$$

Nun ist auch (vergl. mein „Handbuch der Trigonometrie“ S. 225), wenn S, S' die Winkel an S und S':

$$cotg\,S = \frac{tg\,\varphi\, sin\,x}{sin\,ZPS} - cos\,x\, cotg\,ZPS,\quad \frac{-tg\,\varphi}{sin\,ZPS} + cotg\,x\, cotg\,ZPS = -\frac{cotg\,S}{sin\,x},$$

eben so
$$\frac{-tg\,\varphi}{sin\,ZPS'} + cotg\,x\, cotg\,ZPS' = -\frac{cotg\,S'}{sin\,x},$$ also
$$cotg\,S = cotg\,S',\ S = S'.$$

Benützt man, was bequemer ist, diese Gleichung, so ist auch $cos\,S = cos\,S'$, d. h.
$\frac{sin\,\varphi - cos\,\alpha\, cos\,x}{sin\,\alpha\, sin\,x} = \frac{sin\,\varphi - cos\,\alpha'\, cos\,x}{sin\,\alpha'\, sin\,x}$, $sin\,\varphi\,(sin\,\alpha' - sin\,\alpha) = (cos\,\alpha\, sin\,\alpha' - cos\,\alpha'\, sin\,\alpha)\, cos\,x$,

Digitized by Google

$$\cos x = \frac{\sin\varphi(\sin\alpha' - \sin\alpha)}{\cos\alpha\sin\alpha' - \cos\alpha'\sin\alpha} = \frac{2\sin\varphi . \cos\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha)\sin\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)}{\sin(\alpha'-\alpha)} = \sin\varphi\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')},$$

woraus x bestimmt ist. Will man ZPS und ZPS′ haben, so ergeben sie sich aus den betreffenden sphärischen Dreiecken.

XIV. Man soll eine Zahl a in n Theile theilen, so dass das Produkt der Theile das möglich grösste sey.

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die einzelnen Theile, so mus $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{a}{n}$ seyn. Denn gesetzt es seyen x_r und x_s ungleich, und es sey das Produkt $x_1 \ldots x_r \ldots x_s \ldots x_n$ ein Maximum, wobei $x_1 + \ldots + x_n = a$, so würde, wenn $x'_r = x'_s = \frac{1}{2}(x_r + x_s)$ das Produkt $x'_r x'_s > x_r x_s$ (Nr. I), indem das Produkt zweier Faktoren von konstanter Summe dann am grössten ist, wenn sie einander gleich sind; also wäre

$$x_1 \ldots x'_r \ldots x'_s \ldots x_n > x_1 \ldots x_r \ldots x_s \ldots x_n,$$

und auch $x_1 + \ldots x'_r + \ldots x'_s + \ldots + x_n = a$, so dass nicht $x_1, \ldots, x_n$ die Faktoren wären, die das Maximum geben können. Was von x_r, x_s gilt, lässt sich von allen einzelnen Faktoren sagen, so dass sie also alle einander gleich seyn müssen.

Ist y eine stetige Funktion von x, so wird sie sich bei kleinen Aenderungen dieser letzteren Grösse um so bedeutender ändern, je grösser $\frac{\partial y}{\partial x}$ für den betreffenden Werth von x ist (§. 20, I). Da nun, wenn y für x = a einen Maximum- oder Minimum-Werth erlangt, $\frac{\partial y}{\partial x}$ Null ist, so wird in der Nähe dieses Werthes y sich sehr langsam ändern. Diese eigenthümliche Erscheinung in dem Gange stetiger Funktionen zeigt sich den Sinnen in dem horizontalen Verlauf der Kurven in der Nähe des Maximums oder Minimums der Ordinaten; ferner erklären sich dadurch eine Menge Erscheinungen. So ändert sich bekanntlich die Deklination der Sonne (und damit auch die Tageslänge) sehr langsam in der Nähe der Solstitialpunkte, d. h. wenn die Sonne ihre grösste Entfernung vom Aequator erreicht; zur Mittagszeit nähert sich die Sonne nur langsam dem Horizonte u. s. w. Derselbe Grundsatz wird angewandt, wenn man den Regenbogen aus den Gesetzen der Reflexion und Refraktion des Lichtes erklären will, indem die parallel in den Regentropfen eintretenden farbigen Strahlen nur dann (nahezu) parallel wieder austreten, wenn für eine Aenderung des Einfallswinkels die Aenderung der Richtung der austretenden Strahlen sehr langsam geschieht. Man bestimmt desshalb für einen Einfallswinkel x den Winkel y, den der nach ein- oder zwei- oder dreimaliger u. s. w. innerer Reflexion und zweimaliger Refraktion austretende Strahl mit dem eintretenden macht, und sucht sodann denjenigen Werth von x, für den $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ ist; u. s. w.

Sechster Abschnitt.

Das unbestimmte Integral.

§. 26.

Erste Erklärungen.

I. Seither setzten wir voraus, es sey eine Funktion f(x) gegeben und man solle deren Differentialquotienten ermitteln, den wir dann durch

Digitized by Google

$\frac{\partial f(x)}{\partial x}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $f'(x)$ bezeichneten. Es kann nun aber der Fall eintreten, dass man diesen Differentialquotienten kennt, und zu wissen verlangt, aus welcher Funktion er durch Differenzirung entstanden ist.

Wir können die jetzt gestellte Aufgabe in folgender Form aussprechen: Es ist eine Funktion y von x zu suchen, so dass $\frac{\partial y}{\partial x} = f(x)$, wo $f(x)$ eine bekannte Funktion ist.

Die gesuchte Funktion y bezeichnen wir nun durch das Zeichen

$$\int f(x)\,\partial x, \tag{1}$$

das wir lesen: „Integral von $f(x)$ nach x", und sagen also, es sey $\int f(x)\,\partial x$ eine Funktion (von x), deren Differentialquotient (nach x) gleich $f(x)$ ist. Daraus ergibt sich, dass die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial y}{\partial x} = f(x), & y = \int f(x)\,\partial x \\ \text{oder} \quad \frac{\partial y}{\partial x} = z, & y = \int z\,\partial x \end{array}\right\} \tag{2}$$

gleichwerthig sind, d. h. eine aus der andern folgt.

Die Methoden, nach denen man im Stande ist, die Funktion $\int f(x)\,\partial x$ zu ermitteln, bilden nun den Gegenstand der Integralrechnung für Funktionen einer unabhängig Veränderlichen.

Das angehängte ∂x ist abermals ein blosses Zeichen (§. 11), das anzeigt, es sey x die unabhängig Veränderliche, nach der integrirt wird. — Eben so ist $\int f(u)\,\partial u$ das Integral von $f(u)$ nach u, so dass $\frac{\partial \int f(u)\,\partial u}{\partial u} = f(u)$ u. s. w.

Aus diesen Erklärungen folgt ganz unmittelbar, dass

$$\frac{\partial}{\partial x}\int f(x)\,\partial x = f(x), \quad \int \frac{\partial f(x)}{\partial x}\,\partial x = f(x), \quad \int f'(x)\,\partial x = f(x). \tag{3}$$

Denn $\int f(x)\,\partial x$ ist diejenige Grösse, deren Differentialquotient $f(x)$ ist, so dass also die erste Gleichung nichts Anderes ist, als der Ausdruck dieser Erklärung; $\int \frac{\partial f(x)}{\partial x}\,\partial x$ oder $\int f'(x)\,\partial x$ sagt, man solle diejenige Grösse suchen, deren Differentialquotient $f'(x)$ sey; diese ist aber gewiss $f(x)$, so dass die zweite (oder dritte) Gleichung eben so richtig ist.

Die willkürliche Konstante.

II. Ehe wir nun weiter gehen, haben wir uns die Frage zu stellen, ob das Zeichen $\int f(x)\,\partial x$ ein- oder vieldeutig sey, d. h. ob es nur eine einzige

Digitized by Google

Funktion von x gebe, deren Differentialquotient gleich f(x) ist, oder mehrere. Gesetzt es sey $F'(x) = f(x)$, so ist sicher $\int f(x)\,\partial x = F(x)$, und wenn es noch eine andere Funktion von x geben würde, die ebenfalls $\int f(x)\,\partial x$ wäre, so könnte man sie gewiss durch $F(x) + \varphi(x)$ vorstellen, wo $\varphi(x)$ der Unterschied von F(x) und jener andern Funktion wäre. Ist nun

$$\int f(x)\,\partial x = F(x) + \varphi(x),$$

so muss also, nach obigen Erklärungen, der Differentialquotient der zweiten Seite gleich f(x) seyn, d. h. man muss haben (§. 12, IV):

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = f(x), \quad F'(x) + \varphi'(x) = f(x),$$

oder da schon $F'(x) = f(x)$:

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = 0.$$

Demnach ist $\varphi(x)$ unabhängig von x, d. h. eine (freilich ganz) willkürliche Konstante (§. 12, I). Daraus nun folgt, dass wenn man eine Funktion von x: F(x) kennt, für welche $\frac{\partial F(x)}{\partial x} = f(x)$, man allgemein haben wird:

$$\int f(x)\,\partial x = F(x) + C, \tag{4}$$

wo C eine willkürliche Konstante bedeutet.

Was nun diese Grösse anbelangt, so wird sie, eben weil sie von x nicht abhängt, auch nicht mit x sich ändern, und wenn sie ja sich ändern sollte, so kann diess nur dadurch geschehen, dass sie plötzlich einen andern bestimmten Werth annimmt, den sie dann wieder unverändert beibehält. (Eine stetige Aenderung von C mit x, d. h. eine Aenderung um unendlich kleine Grössen widerstreitet ja eben der Annahme, dass C unabhängig ist von x.) Da die Rechnung es vorzugsweise nur mit stetigen Funktionen zu thun hat, so werden wir $\int f(x)\,\partial x$ so lange als stetig ansehen müssen, so lange f(x) endlich bleibt, was sich auch nach §. 10 von selbst versteht, da ja dann der Differentialquotient von $\int f(x)\,\partial x$ d. h. f(x) endlich ist. So lange also f(x) endlich ist, wird $\int f(x)\,\partial x$, d. h. $F(x) + C$ sich nur um unendlich wenig ändern, wenn x sich um unendlich wenig ändert, und da diess bei F(x), als einer stetigen Funktion, der Fall seyn wird, so folgt daraus, dass auch eben so lange C denselben unveränderten Werth beibehält, da diese Grösse sich plötzlich um eine bestimmte endliche Grösse ändern würde, so dass $F(x) + C$ sich alsdann nicht um unendlich wenig mit x änderte. Hat man z. B. das Integral $\int tg\,x\,\partial x$, so ist dasselbe zunächst $= -l(\cos x)$, da $\frac{\partial l(\cos x)}{\partial x} = -tg\,x$ (§. 13), also allgemein

$$\int tg\,x\,\partial x = -l(\cos x) + C.$$

Was nun hier C anbelangt, so wird diese Grösse immer denselben Werth haben, wenn x zwischen den Gränzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt; ist aber $x > \frac{\pi}{2}$ so kann ganz wohl C einen

Digitized by Google

andern Werth haben, als wenn $x < \frac{\pi}{2}$, da für $x = \frac{\pi}{2}$ ja $tg\,x$ unendlich, also unstetig wird; zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ wird freilich wieder immer C denselben Werth haben u. s. w. *

Man muss hierauf wohl achten, da man sich sonst in Schwierigkeiten verwickelt, die es nur dadurch werden, dass man nicht in den ersten Grundsätzen vollkommen klar geworden ist.

Was die Bestimmung der willkürlichen Konstanten in bestimmten Fällen betrifft, so ist sie immer sehr einfach. Weiss man nämlich, dass

---

* Es kommt diess darauf hinaus, dass man von C nur aussagen könne, es bleibe diese Grösse unverändert, so lange f(x) endlich, also $\int f(x)\,\partial x$ stetig ist. Verliert $\int f(x)\,\partial x$ die Stetigkeit, wird also f(x) nicht mehr endliche Werthe haben, so kann man von C weiter Nichts mehr behaupten, da alsdann ganz wohl diese Grösse springen, d. h. plötzlich einen andern Werth annehmen kann. — Dass aber, wenn $\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = 0$, nothwendig $\varphi(x)$ eine Konstante ist, lässt sich in folgender Art erweisen.

Sey also von $x = a$ bis $x = b$ $(b > a)$ immer $\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = 0$, so folgt aus §. 15, I, dass innerhalb dieser Gränzen:

$$\Delta \varphi(x) \text{ d. h. } \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \alpha \Delta x,$$

wo α mit Δx zu Null wird. Sey nun x_1 ein Werth von x zwischen a und b; man lege diesem Werth die Grösse Δx viele Male nach einander zu, bis man zu dem Werthe $x_2 = x_1 + n\Delta x$ gelangt, so hat man nach einander (x_2 zwischen a und b):

$$\varphi(x_1 + \Delta x) - \varphi(x_1) = \alpha_1 \Delta x,$$
$$\varphi(x_1 + 2\Delta x) - \varphi(x_1 + \Delta x) = \alpha_2 \Delta x,$$
$$\varphi(x_1 + 3\Delta x) - \varphi(x_1 + 2\Delta x) = \alpha_3 \Delta x,$$
$$\vdots$$
$$\varphi(x_1 + n\Delta x) - \varphi(x_1 + \overline{n-1}\,\Delta x) = \alpha_n \Delta x,$$

wo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ mit Δx gegen Null gehen. Die Addition aller dieser Gleichungen gibt wegen $x_1 + n\Delta x = x_2$:

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\Delta x = \frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n} n\Delta x = \frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n}(x_2 - x_1).$$

Da alle α mit Δx gegen Null gehen, so kann man Δx immer klein genug (also n gross genug) nehmen, so dass kein α seinem Werthe nach die Zahl k, die beliebig klein seyn kann, übersteigt. Daraus ergibt sich dann sofort, dass $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ die Zahl nk, d. h. $\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n}$ die Zahl k nicht übersteigen wird. — Da aber Δx ganz beliebig ist, so kann man also immer setzen (der Werth von)

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) < k(x_2 - x_1),$$

wo k beliebig klein. Aus dieser Gleichung muss aber nothwendig $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = 0$ geschlossen werden. Wäre nämlich $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \gamma$, wo γ beliebig klein, so kann man k immer so wählen, dass $k(x_2 - x_1) < \gamma$, wodurch die Gleichungen

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \gamma, \quad \varphi(x_2) - \varphi(x_1) < k(x_2 - x_1)$$

mit einander in Widerspruch kämen.

Aus $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = 0$ folgt $\varphi(x_2) = \varphi(x_1)$, so dass also $\varphi(x_2)$ denselben Werth hat wie $\varphi(x_1)$. Da diess für alle Werthe von x zwischen a und b gilt, so ist unser Satz erwiesen.

Digitized by Google

$$\int f(x)\,\partial x = F(x) + C,$$

und dass für $x = a$ die Grösse $\int f(x)\,\partial x = A$ seyn müsse, so ist

$$A = F(a) + C, \quad C = A - F(a).$$

III. Die Richtigkeit einer Gleichung $\int y\,\partial x = z + C$ wird natürlich immer dadurch bewiesen, dass man zeigt, es sey $\frac{\partial z}{\partial x} = y$, und es gibt auch keinen andern Grund dafür. Die Zufügung des Zeichens C ist auch nur in so ferne nothwendig, als man das Integral ausgemittelt hat; so lange man nur das Zeichen $\int y\,\partial x$ anwendet, versteht es sich von selbst, dass die willkürliche Konstante zuzufügen ist. So ist in $\int tg\,x\,\partial x$ erst dann C zuzufügen, wenn man $-\,l(\cos x)$ dafür schreiben will.

Dass ferner aus $\frac{\partial U}{\partial u} = v$ folgt $U = \int v\,\partial u$ ist natürlich, und die schliesslich zuzufügende Konstante ist unabhängig von u.

IV. Aus §. 12 lassen sich leicht die folgenden Sätze beweisen:

$$\int a\,f(x)\,\partial x = a \int f(x)\,\partial x, \quad \int \left[f(x) \pm \varphi(x) \pm \ldots\right]\partial x = \int f(x)\,\partial x \pm \int \varphi(x)\,\partial x \pm \ldots, \tag{5}$$

wenn a eine Konstante ist. Denn es ist etwa $\frac{\partial}{\partial x}\left[a\int f(x)\,\partial x\right] = a\frac{\partial}{\partial x}\int f(x)\,\partial x$ $= a\,f(x)$, woraus sofort folgt $a\int f(x)\,\partial x = \int a\,f(x)\,\partial x$. Die willkürliche Konstante ist bei wirklicher Bestimmung dann noch zuzufügen.

V. Aus der Zusammenstellung (6) in §. 13 ergibt sich nun hier die folgende:

$$\left.\begin{array}{l} \int x^m\,\partial x = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \quad \int \frac{1}{x}\,\partial x = l(x) + C, \quad \int e^x\,\partial x = e^x + C, \quad \int a^x\,\partial x = \frac{a^x}{l(a)} + C, \\ \int \sin x\,\partial x = -\cos x + C, \quad \int \cos x\,\partial x = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\partial x = tg\,x + C, \\ \int \frac{1}{\sin^2 x}\,\partial x = -\cot g\,x + C, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\partial x = arc(\sin = x) + C, \quad \int \frac{1}{1+x^2}\,\partial x = \\ arc\,(tg = x) + C, \end{array}\right\} (6)$$

da man durch Differenzirung der zweiten Seiten jeweils wieder die unter dem Zeichen $\int$ stehende Grösse erhält. Wir bemerken hiebei, dass man statt $\int \frac{1}{\sin^2 x}\partial x$, $\int \frac{1}{1+x^2}\partial x$, u. s. w. gewöhnlich schreibt $\int \frac{\partial x}{\sin^2 x}$, $\int \frac{\partial x}{1+x^2}, \ldots$).

Als spezielle Fälle daraus hat man etwa:

$$\int \partial x \left(= \int 1\,\partial x = \int x^0\,\partial x\right) = x + C, \quad \int x\,\partial x = \frac{x^2}{2} + C, \quad \int \frac{\partial x}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,$$

Digitized by Google

$$\int\frac{\partial x}{x^n}=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+C,\ \int\sqrt{x}\,\partial x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C,\ \int\frac{\partial x}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C,$$

$$\int\sqrt[n]{x}\,\partial x=\frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}+C,\ \int\frac{\partial x}{\sqrt[n]{x}}=\frac{n}{n-1}x^{\frac{n-1}{n}}+C,\ \int\left(5x^2+\frac{4}{x^3}\right)\partial x=\frac{5x^3}{3}-\frac{2}{x^2}+C,$$

u. s. w.

Hiebei haben wir allgemein zu bemerken, dass etwa $\int x^m\,\partial x=\frac{x^{m+1}}{m+1}+C$ und $\int x^m\,\partial x=\frac{x^{m+1}}{m+1}+a+C'$, wo a eine bestimmte Konstante, als gleich bedeutend anzusehen sind, da $a+C'$ eben eine willkürliche konstante Grösse ist, die kurzweg mit C bezeichnet werden kann. — Findet man also $\int \sin x\,\partial x=-\cos x+C$ und $\int \sin x\,\partial x=-\cos x+1+C'$, so sind beide Resultate als gleichwerthig anzusehen.

VI. Die Aufgabe, die uns nun zunächst vorliegt, besteht darin, jedes vorgelegte Integral $\int f(x)\,\partial x$ entweder auf ein einfaches in (6), oder doch auf ein schon bekanntes zurückführen. Wie bei allen umgekehrten Rechnungsarten wird diese Aufgabe nicht in allen Fällen gelöst werden können, so dass man die hauptsächlichsten Methoden angeben muss, nach denen man in einzelnen Fällen zu verfahren hat. Als fundamentale Hilfsmittel haben wir nun zunächst zwei Sätze anzugeben, die wir fortwährend anwenden werden, und ausser denen nur wenige solcher Hilfsmittel zum Ziele führen werden.

§. 27.

Theilweise Integration.

Der erste dieser beiden Sätze ist in der Gleichung

$$\int y\frac{\partial z}{\partial x}\partial x=yz-\int z\frac{\partial y}{\partial x}\partial x \tag{7}$$

ausgesprochen und heisst der Satz der theilweisen Integration. Der Beweis desselben wird nach §. 26, III geführt seyn, wenn man zeigt, dass der Differentialquotient der zweiten Seite gleich $y\frac{\partial z}{\partial x}$ ist. Dieser Differentialquotient ist aber (§. 12, IV, V, §. 26, I):

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial y}{\partial x}-z\frac{\partial y}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial x},$$

womit der Beweis der Richtigkeit geführt ist. Man sieht, dass (7) der Formel in §. 12, V entspricht, aus der der Satz auch sofort gezogen werden kann, da aus

$$\frac{\partial(yz)}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial y}{\partial x}$$

folgt (§. 26, III)

$$yz=\int y\frac{\partial z}{\partial x}\partial x+\int z\frac{\partial y}{\partial x}\partial x,\ \int y\frac{\partial z}{\partial x}\partial x=yz-\int z\frac{\partial y}{\partial x}\partial x.$$

Digitized by Google

Wir bemerken, dass man die (7) in noch mehrern andern Formen schreibt. Ist $\frac{\partial z}{\partial x} = u$, also $z = \int u\,\partial x$, so hat man auch

$$\int y u\,\partial x = y\int u\,\partial x - \int\left[\frac{\partial y}{\partial x}\int u\,\partial x\right]\partial x.$$

Gebraucht man die Bezeichnung der Differentiale:

$$\int y\frac{dz}{dx}dx = yz - \int z\frac{dy}{dx}dx,\ \int y\,dz = yz - \int z\,dy.\,^*$$

Wir wollen nun zunächst einige Beispiele zur Erläuterung des wichtigen Satzes (7) zufügen.

I. Sey $\int l(x)\,\partial x$ zu bestimmen. In (7) setze man $y = l(x)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$, so ist $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{x}$, $z = \int 1\,\partial x = x$, also $yz = x\,l(x)$, $z\frac{\partial y}{\partial x} = 1$, $\int z\frac{\partial y}{\partial x}\partial x = x$, mithin **

$$\int l(x)\,\partial x = x\,l(x) - x + C = x[l(x) - 1] + C.$$

Hat man $\int [l(x)]^2\,\partial x$, so sey wieder $y = l(x)^2$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2\,l(x)}{x}$, $z = x$, also $z\frac{\partial y}{\partial x} = 2\,l(x)$, $\int z\frac{\partial y}{\partial x}\partial x = 2\int l(x)\,\partial x = 2x[l(x) - 1]$, so dass

$$\int l(x)^2\,\partial x = x\,l(x)^2 - 2x[l(x) - 1] + C.$$

Ist vorgelegt $\int l(x)^n\partial x$, so hat man $y = l(x)^n$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{n\,l(x)^{n-1}}{x}$, $z = x$, also

$$\int l(x)^n\,\partial x = x\,l(x)^n - n\int l(x)^{n-1}\,\partial x,$$

wodurch das eine Integral auf das andere zurückgeführt ist. So hat man für $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\int l(x)\,\partial x = x\,l(x) - x + C,$$

$$\int l(x)^2\partial x = x\,l(x)^2 - 2\int l(x)\,\partial x,$$

---

* Wegen der Bezeichnung verweisen wir auf §. 28. Darnach bezeichnet $\int y\frac{\partial z}{\partial x}dx$ das vollständige Integral von $y\frac{\partial z}{\partial x}$ nach x, für uns bis jetzt dasselbe was $\int y\frac{\partial z}{\partial x}\partial x$.

** Man kann hiebei folgendes Schema sich bilden: Vorgelegt $\int l(x)\,\partial x$, also gesetzt

$y = l(x)$	$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{x}$
	woraus
$\frac{\partial z}{\partial x} = 1$	$z = x$.

Digitized by Google

$$\int l(x)^3 \partial x = x\,l(x)^3 - 3\int l(x)^2 \partial x,$$

$$\int l(x)^4 \partial x = x\,l(x)^4 - 4\int l(x)^3 \partial x, \dots.$$

II. Sey vorgelegt $\int x^n e^x \partial x$, wo n eine positive ganze Zahl ist. Man setze $y = x^n$, $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x$, also $\frac{\partial y}{\partial x} = n x^{n-1}$, $z = \int e^x \partial x = e^x$, $z\frac{\partial y}{\partial x} = n x^{n-1} e^x$ und hat

$$\int x^n e^x \partial x = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x \partial x.$$

Hieraus folgt, wenn $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$\int x e^x \partial x = x e^x - e^x + C,$$

$$\int x^2 e^x \partial x = x^2 e^x - 2\int x e^x \partial x,$$

$$\int x^3 e^x \partial x = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x \partial x, \dots.$$

III. Man soll $\int \frac{e^x}{x^n} \partial x$ bestimmen, wenn n ebenfalls eine positive ganze Zahl ist. Sey $y = e^x$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$, also $\frac{\partial y}{\partial x} = e^x$, $z = \int x^{-n} \partial x = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$, $z\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{e^x}{(n-1)x^{n-1}}$, so ist

$$\int \frac{e^x}{x^n} \partial x = -\frac{e^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{e^x}{x^{n-1}} \partial x.$$

Für $n=1$ kann man diese Formel nicht anwenden; für $n=2, 3, \dots$ aber gibt sie:

$$\int \frac{e^x}{x^2} \partial x = -\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x} \partial x, \quad \int \frac{e^x}{x^3} \partial x = -\frac{e^x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{x^2} \partial x, \dots,$$

so dass schliesslich alle diese Integrale auf $\int \frac{e^x}{x} \partial x$ zurückgeführt sind. Die Bestimmung dieses letzteren ist zunächst nicht thunlich. (Vergl. §. 166, I).

IV. Es sey $\int x^n\, l(x) \partial x$ zu bestimmen, n beliebig. Sey $y = l(x)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = x^n$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{x}$, $z = \int x^n \partial x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $\int z\frac{\partial y}{\partial x} \partial x = \int \frac{x^n}{n+1} \partial x = \frac{1}{n+1}\int x^n \partial x = \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1}$, so ist $\int x^n l(x) \partial x = \frac{x^{n+1} l(x)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + C = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left[l(x) - \frac{1}{n+1}\right] + C$.

Eben so für $\int \frac{l(x)}{x^n} \partial x$ sey $y = l(x)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = x^{-n}$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{x}$, $z = \int x^{-n} \partial x = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$, $\int z\frac{\partial y}{\partial x} \partial x = -\frac{1}{n-1}\int \frac{\partial x}{x^n} = \frac{1}{(n-1)^2} \cdot \frac{1}{x^{n-1}}$, also

$$\int \frac{l(x)}{x^n} \partial x = -\frac{l(x)}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)^2} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + C = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\left[l(x) + \frac{1}{n-1}\right] + C.$$

Digitized by Google

Für $n=1$ ist diese Formel nicht anwendbar, da sonst $n-1=0$ wäre, und auch nicht $\int x^{-n}\,\partial x = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$, sondern $= l(x)$ gesetzt werden müsste. Für $\int \frac{l(x)}{x}\,\partial x$ wird man also im Augenblick den Werth nicht angeben können (vgl. §. 28, II).

V. Seyen $\int x^n \cos x\,\partial x$, $\int x^n \sin x\,\partial x$ zu bestimmen. Man setze $y=x^n$, $\frac{\partial z}{\partial x}=\begin{cases}\cos x\\ \sin x\end{cases}$, also $\frac{\partial y}{\partial x}=n x^{n-1}$, $z=\begin{cases}\sin x\\ -\cos x\end{cases}$, und hat:

$$\int x^n \sin x\,\partial x = -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,\partial x,\ \int x^n \cos x\,\partial x = x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x\,\partial x.$$

Daraus folgt, indem man $n-1$ für n setzt:

$$\int x^{n-1}\sin x\,\partial x = -x^{n-1}\cos x + (n-1)\int x^{n-2}\cos x\,\partial x,\ \int x^{n-1}\cos x\,\partial x = x^{n-1}\sin x -$$

$-(n-1)\int x^{n-2}\sin x\,\partial x$, also

$$\int x^n \sin x\,\partial x = -x^n\cos x + n x^{n-1}\sin x - n(n-1)\int x^{n-2}\sin x\,\partial x,$$

$$\int x^n \cos x\,\partial x = x^n \sin x + n x^{n-1}\cos x - n(n-1)\int x^{n-2}\cos x\,\partial x.$$

Für $n=1$: $\int x\sin x\,\partial x = -x\cos x + \sin x + C$, $\int x\cos x\,\partial x = x\sin x + \cos x + C$, so dass allgemein $\int x^n \cos x\,\partial x$ und $\int x^n \sin x\,\partial x$ bestimmt werden können in derselben Weise, wie oben in ähnlichen Fällen. Man hat etwa

$$\int x^2 \sin x\,\partial x = -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x\,\partial x,$$

$$\int x^3 \sin x\,\partial x = -x^3\cos x + 3x^2\sin x - 3.2\int x\sin x\,\partial x,$$

$$\int x^4 \sin x\,\partial x = -x^4\cos x + 4x^3\sin x - 4.3\int x^2\sin x\,\partial x, \text{ u. s. w.}$$

VI. Um $\int \frac{e^x x\,\partial x}{(1+x)^2}$ zu bestimmen, sey $y=e^x x$, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{(1+x)^2}$, also $\frac{\partial y}{\partial x} = e^x + x e^x = e^x(1+x)$, $z=\int\frac{\partial x}{(1+x)^2} = -\frac{1}{1+x}$, $\left[\text{da } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\frac{1}{(1+x)^2}\right]$, und mithin

$$\int\frac{x e^x\,\partial x}{(1+x)^2} = -\frac{x e^x}{x+1} + \int\frac{e^x(1+x)}{1+x}\,\partial x = -\frac{x e^x}{1+x} + \int e^x\,\partial x = -\frac{x e^x}{1+x} + e^x + C =$$

$$e^x\left(1-\frac{x}{1+x}\right) + C = \frac{e^x}{1+x} + C.$$

Digitized by Google

§. 28.

Integration durch Umformung.

Der zweite Satz (§. 26, VI) ist der der Integration durch Umformung. Hat man nämlich das Integral $\int f(x)\partial x$ zur Bestimmung vorgelegt erhalten, und man vermuthet, dass durch Einführung einer neuen Veränderlichen z für x man seinen Zweck leichter erreichen könne, so wird man statt des Integrals nach x eines nach z zu bilden haben. Soll diess möglich seyn, so muss zwischen x und z eine Beziehung (Gleichung) gegeben seyn, die uns in Stand setzt, x durch z und z durch x auszudrücken. Drückt man nun x durch z aus, sieht also x als Funktion von z an, so ist die Grösse $\int f(x)\partial x$, die wir durch U bezeichnen wollen, zunächst eine Funktion von x, also dann auch Funktion von z. Demnach (§. 13):

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z},\ \text{wo}\ \frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\int f(x)\,\partial x=f(x),$$

so dass
$$\frac{\partial U}{\partial z}=f(x)\frac{\partial x}{\partial z},\quad U=\int f(x)\frac{\partial x}{\partial z}\partial z,\quad (§. 26, III)$$

und also
$$\int f(x)\,\partial x=\int f(x)\frac{\partial x}{\partial z}\partial z, \tag{8}$$

wo in $f(x)\frac{\partial x}{\partial z}$ die Grösse x durch z zu ersetzen ist. Kann man $\int f(x)\frac{\partial x}{\partial z}\partial z$ (nach z) integriren, und ersetzt dann z wieder durch x, so hat man auch $\int f(x)\partial x$. Die etwa beizugebende Konstante lässt sich am Schlusse der Rechnung immer zusetzen. Man sieht, dass (8) dem Satze (5) in §. 13 unmittelbar entspricht, wie denn auch die Richtigkeit von (8) geradezu mittelst jenes Satzes bewiesen wurde.

Beispiele mögen den Gebrauch des Satzes erläutern.

I. Man soll $\int\frac{\partial x}{a^2+b^2x^2}$ bestimmen. — Man setze, gemäss (8), $b\,x=a\,z$, $x=\frac{a\,z}{b}$, $\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{a}{b}$, so ist $\int\frac{\frac{\partial x}{\partial z}\partial z}{a^2+b^2x^2}=\frac{a}{b}\int\frac{\partial z}{a^2+a^2z^2}=\frac{1}{ab}\int\frac{\partial z}{1+z^2}=\frac{1}{ab}arc(tg=z)$ $=\frac{1}{ab}arc\left(tg=\frac{bx}{a}\right)$, so dass

$$\int\frac{\partial x}{a^2+b^2x^2}=\frac{1}{ab}arc\left(tg=\frac{bx}{a}\right)+C,$$

wovon man sich durch unmittelbare Differenzirung sehr leicht überzeugen kann.

Setzt man in $\int cos\,a\,x\,\partial x : a\,x=z$, $a\frac{\partial x}{\partial z}=1$, $\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{a}$, so ist $cos\,a\,x\,\frac{\partial x}{\partial z}=$ $cos\,z\,\frac{1}{a}$, also

$$\int cos\,a\,x\,\partial x=\frac{1}{a}\int cos\,z\,\partial z=\frac{1}{a}sin\,z+C=\frac{1}{a}sin\,a\,x+C.$$

Digitized by Google

Eben so

$$\int sin\, a\, x\, \partial x = -\frac{1}{a} cos\, a\, x + C,\ \int \frac{\partial x}{1+a^2x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial z}{1+z^2} = \frac{1}{a} arc\,(tg = z) + C = \frac{1}{a} arc\,(tg = a\, x) + C.$$

II. Um $\int x^{m-1}\, sin\,(a + b\, x^m)\, \partial x$ zu bestimmen, setze man $a + b\, x^m = z$, $m\, b\, x^{m-1} \frac{\partial x}{\partial z} = 1$, $x^{m-1} \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{m\, b}$, $x^{m-1}\, sin\,(a+b\, x^m) \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{m\, b} sin\, z$, also (8)

$$\int x^{m-1}\, sin\,(a+b\, x^m)\, \partial x = \frac{1}{m\, b}\int sin\, z\, \partial z = -\frac{cos\, z}{m\, b} + C = -\frac{cos\,(a+b\, x^m)}{m\, b} + C.$$

Für $\int sin^2 x\, cos\, x\, \partial x$ setze man $sin\, x = z$, also $cos\, x \frac{\partial x}{\partial z} = 1$ und $sin^2 x\, cos\, x \frac{\partial x}{\partial z} = z^2$, mithin

$$\int sin^2 x\, cos\, x\, \partial x = \int z^2\, \partial z = \frac{z^3}{3} + C = \frac{sin^3 x}{3} + C.$$

Diese Gattung von Integralen lässt sich allgemein darstellen. Ist nämlich y eine Funktion von x, so heissen sie

$$\int f(y) \frac{\partial y}{\partial x} \partial x$$

und wenn man die Umformungsformel (8) beachtet, so ist

$$\int f(y) \frac{\partial y}{\partial x} \partial x = \int f(y)\, \partial y.\ ^*$$

So wäre $\int \frac{l(x)}{x} \partial x = \frac{1}{2} l(x)^2 + C$, $[y = l(x)$, vergl. §. 27, Nr. IV$]$.

$$\int cos^3 x\, sin\, x\, \partial x = -\frac{cos^4 x}{4} + C,\ (y = -cos\, x),$$

$$\int \frac{arc\,(sin = x)}{\sqrt{1-x^2}} \partial x = \frac{1}{2} arc^2\,(sin = x) + C,\ [y = arc\,(sin = x)],\ \text{u. s. w.}$$

III. Um $\int \frac{x\, \partial x}{a^2 + x^2}$ zu bestimmen, sey $a^2 + x^2 = z$, $2\, x \frac{\partial x}{\partial z} = 1$, $x \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2}$, $\frac{x}{a^2+x^2} \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{1}{z}$, also

$$\int \frac{x\, \partial x}{a^2+x^2} = \int \frac{x \frac{\partial x}{\partial z}}{a^2+x^2} \partial z = \frac{1}{2}\int \frac{\partial z}{z} = \frac{1}{2} l(z) + C = \frac{1}{2} l(a^2+x^2) + C = l\,(\sqrt{a^2+x^2}) + C.$$

Eben so für $\int \frac{\partial x}{x\, l(x)}$ sey $l(x) = z$, $\frac{1}{x} \frac{\partial x}{\partial z} = 1$, $\frac{1}{x\, l(x)} \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{z}$, also

$$\int \frac{\partial x}{x\, l(x)} = \int \frac{\frac{\partial x}{\partial z}}{x\, l(x)} \partial z = \int \frac{\partial z}{z} = l(z) + C = l[l(x)] + C.$$

Auch diese Integrale lassen sich allgemeiner darstellen. Ist nämlich z eine Funktion von x, so sind sie

---

* Kennt man $\int f(x)\, \partial x$, so ergibt sich $\int f(y)\, \partial y$, wenn man x mit y vertauscht.

Digitized by Google

$$\int \frac{h \frac{\partial z}{\partial x} \partial x}{z} = h \int \frac{\partial z}{z} = h\, l(z) + C.$$

So ist $\int tg\, x\, \partial x = \int \frac{sin\, x}{cos\, x} \partial x = -l(cos\, x) + C, \; (z = cos\, x, \; h = -1);$

$$\int cotg\, x\, \partial x = \int \frac{cos\, x}{sin\, x} \partial x = l(sin\, x) + C, \; (z = sin\, x, \; h = 1);$$

$$\int \frac{\partial x}{a + b x} = \frac{1}{b} l(a + b x) + C, \left(z = a + b x, \; h = \frac{1}{b}\right);$$

$$\int \frac{x\, \partial x}{a + b x^2} = \frac{1}{2b} l(a + b x^2) + C, \left(z = a + b x^2, \; h = \frac{1}{2b}\right) \text{ u. s. w.}$$

IV. In $\int \frac{x\, \partial x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ sey $a^2 + x^2 = z$, $2x \frac{\partial x}{\partial z} = 1$, $x \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2}$, $\frac{x \frac{\partial x}{\partial z}}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$,

so ist $\int \frac{x\, \partial x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{x \frac{\partial x}{\partial z} \partial z}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{\partial z}{\sqrt{z}} = \frac{1}{2} \int z^{-\frac{1}{2}}\, \partial z = z^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{a^2 + x^2} + C.$

Eben so $\int \frac{x\, \partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} + C, \; (z = a^2 - x^2);$ $\int \frac{e^x\, \partial x}{1 + e^{2x}} = arc\,(tg = e^x) + + C, \; (z = e^x);$

$$\int \frac{cos\, x}{sin^2\, x} \partial x = -\frac{1}{sin\, x} + C, \; (z = sin\, x); \int \frac{sin\, x}{cos^2\, x} \partial x = \frac{1}{cos\, x} + C, \; (z = cos\, x);$$

$$\int \frac{\partial x}{x\, l(x)^m} = -\frac{1}{(m-1)\, l(x)^{m-1}} + C, \; [z = l(x)]. \text{ (vergl. Nr. II).} *$$

Bezeichnungen.

Wir müssen hier auf diejenige Art der Bezeichnung von Integralen hinweisen, die der in §. 15, III aufgestellten entspricht.

Ist y eine Funktion von x, so ist $f(x, y)$ ebenfalls als Funktion von x anzusehen, und es könnte sich ereignen, dass man das Integral von $f(x, y)$ partiell nach x erhalten wollte, wobei also y als konstant angesehen wäre. Dieses würden wir durch $\int f(x, y)\, \partial x$ bezeichnen. — Will man aber

* Wir haben bereits schon auf einzelne Regeln in II und III aufmerksam gemacht. Die wesentliche davon ist die in der Gleichung $\int f(y) \frac{\partial y}{\partial x} \partial x = \int f(y)\, \partial y$ ausgesprochene, die im Grunde nur die Gleichung (8) ist. So ist in $\int \frac{h \frac{\partial y}{\partial x}}{y} \partial x : f(y) = \frac{h}{y}$, also $\int \frac{h \frac{\partial y}{\partial x}}{y} \partial x = \int \frac{h\, \partial y}{y} = h\, l(y)$; in IV ist $y = a^2 + x^2$, $f(y) = y^{-\frac{1}{2}}$, $h = \frac{1}{2}$ also $\int \frac{x\, \partial x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{\frac{1}{2} 2x\, \partial x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{1}{2} \frac{\partial y}{\sqrt{y}} = \int \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}\, \partial y = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2 + x^2}$. Für $\int \frac{\partial x}{x\, l(x)^m}$ ist $y = l(x)$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{x}$, $f(y) = y^{-m}$, $h = 1$, also $\int \frac{\partial x}{x\, l(x)^m} = \int \frac{\partial y}{y^m} = -\frac{1}{(m-1)\, y^{m-1}} = -\frac{1}{(m-1)\, l(x)^{m-1}}$ u. s. w.

Digitized by Google

das vollständige Integral von f (x, y), so bezeichnen wir dasselbe durch $\int f(x, y)\, dx$.

Demnach wäre

$$\int x y\, \partial x = \frac{x^2}{2} y, \quad \int \frac{y}{x}\, \partial x = y\, l(x), \text{ u. s. w.},$$

während $\int x y\, dx$ erst angegeben werden kann, wenn man y als Funktion von x kennt.

In III würde man also schreiben können:

$$\int \frac{x\, dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{x \frac{\partial x}{\partial z}}{a^2 + x^2} dz = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \int \frac{\partial z}{z}.$$

Dass $\int \frac{x\, \partial x}{a^2 + x^2}$ und $\int \frac{x\, dx}{a^2 + x^2}$, eben so $\int \frac{dz}{z}$ und $\int \frac{\partial z}{z}$ dasselbe bezeichnen, ist klar (§. 15, III).

Eben so kann $\int y z\, \partial x$ nichts Anderes bezeichnen als $\int y z\, dx$ auch bezeichnet, da x in y z nicht entwickelt steht und also von partieller Integration nach x keine Rede seyn kann.

$\int y z\, \partial y$ bedeutet nothwendig das partielle Integral von y z nach y, das gleich $\frac{y^2 z}{2}$ ist, u. s. w.

Wo keine Zweideutigkeit zu befürchten steht, werden wir immer das Zeichen ∂ anwenden; im Falle aber Zweifel entstehen sollten, so wird dieses Zeichen nur partielle Integrale vorstellen.

§. 29.

Zerfällung in Partialbrüche.

Funktionen von x, welche die Form $a + bx + cx^2 + \ldots$ haben, heissen ganze Funktionen von x; der höchste Exponent von x gibt den Grad der Funktion an. So ist $12 + 8x^2 - 9x^4 + 7x^6$ eine ganze Funktion von x des sechsten Grades. Seyen nun f(x), F(x) ganze Funktionen von x, so soll es sich um Bestimmung von

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} \partial x \qquad \text{(a)}$$

handeln. Zunächst ist es nun allgemein genug anzunehmen, f(x) sey von niedererem Grade als F(x). Denn wenn diess nicht der Fall ist, so dividire man mit F(x) in f(x), und erhalte als Quotienten $\varphi(x)$, als Rest $\psi(x)$, wo $\psi(x)$ von niedererem Grade ist als F(x), so ist (§. 26, IV)

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} \partial x = \int \varphi(x)\, \partial x + \int \frac{\psi(x)}{F(x)} \partial x,$$

worin $\varphi(x)$ von der Form $A + Bx + Cx^2 + \ldots$ ist und also integrirt werden

Digitized by Google

kann; mithin das gesuchte Integral auf ein anderes zurückgeführt ist, in welchem der Zähler von niedererem Grade ist als der Nenner. Können wir solche Integrale bestimmen, so können wir überhaupt alle Integrale dieser Gattung bestimmen.

Nun weiss man aus der Analysis („Grundzüge" S. 138), dass $F(x)$ immer in ein Produkt von reellen Faktoren zerfällt werden kann, die vom ersten oder zweiten Grade sind. Die Faktoren des ersten Grades haben die Form $x-a$, oder $(x-a)^m$ und entsprechen: die erste der reellen Wurzel a der Gleichung $F(x)=0$, wenn diese nur einmal vorhanden ist, die zweite derselben reellen Wurzel a, wenn sie m mal vorkömmt. Die Faktoren zweiten Grades haben die Form $[(x-\alpha)^2+\beta^2]$ oder $[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m$ und entsprechen: die erste den beiden imaginären Wurzeln $\alpha \pm \beta i$, wenn sie nur einfach vorkommen, die zweite denselben imaginären Wurzeln, die jedoch m mal vorkommen. *

Daraus folgt, dass man setzen könne:

$$F(x) = c(x-a)\ldots(x-b)^m\ldots[(x-\alpha)^2+\beta^2]\ldots[(x-\gamma)^2+\delta^2]^n\ldots,$$

wo ganz wohl nur Faktoren der einen oder anderen Art vorkommen können; ausser diesen vier Arten aber keine anderen vorkommen, und die Grösse c der Koeffizient der höchsten Potenz von x in $F(x)$ ist. Diess vorausgesetzt, geben wir nun die nachstehende Vorschrift:

„Man setze $\frac{f(x)}{F(x)}$ gleich einer Summe von Brüchen, die nach folgender Weise gebildet werden:

1) für jeden reellen Faktor des ersten Grades in $F(x)$, wie $x-a$, der nur einmal vorkommt, setze man einen Bruch $\frac{A}{x-a}$, wo A eine noch zu bestimmende Konstante;

2) für jeden reellen Faktor $x-b$, der aber m mal vorkommt, setze man eine Summe von m Brüchen

$$\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_m}{(x-b)^m},$$

wo $B_1, B_2, \ldots, B_m$ noch zu bestimmende (m) Konstanten sind;

---

* Man kann in Versuchung kommen, die Form $a+bx+cx^2$ als allgemein für die Faktoren des zweiten Grades zu erklären. Allein es ist $a+bx+cx^2 = c\left[x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}\right] = c\left[\left(x+\frac{b}{2c}\right)^2-\frac{b^2}{4c^2}+\frac{a}{c}\right] = c\left[\left(x+\frac{b}{2c}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4c^2}\right]$. Ist nun $b^2-4ac>0$, so kann man diese Grösse in zwei **reelle** Faktoren des ersten Grades zerfällen, da sie dann ist: $c\left[x+\frac{b}{2c}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4c^2}}\right]\left[x+\frac{b}{2c}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4c^2}}\right]$. Ist dagegen $b^2-4ac<0$, so hat obige Grösse die Form $(x-\alpha)^2+\beta^2$, wo $\alpha=-\frac{b}{2c}$, $\beta^2=\frac{4ac-b^2}{4c^2}$. Nur also wenn $b^2-4ac<0$, gehört die Form $a+bx+cx^2$ zu den wirklich quadratischen. Für $b^2-4ac=0$ ist sie übrigens ein vollkommenes Quadrat.

Digitized by Google

3) für jeden Faktor des zweiten Grades $(x-\alpha)^2+\beta^2$, der nur einmal vorkommt, setze man einen Bruch $\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$, wo M und N noch zu bestimmende Konstanten sind;

4) für jeden Faktor des zweiten Grades, $(x-\gamma)^2+\delta^2$, der n mal vorkommt, setze man n Brüche

$$\frac{P_1 x+Q_1}{(x-\gamma)^2+\delta^2}+\frac{P_2 x+Q_2}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^2}+\ldots+\frac{P_n x+Q_n}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^n},$$

wo P_1, Q_1, P_2, Q_2, ..., P_n, Q_n, noch zu bestimmende Konstanten sind. So ist also

$$\left.\begin{aligned}\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}&+\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots\ldots+\frac{B_m}{(x-b)^m}\\ &+\ldots\ldots\\ &+\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{P_1 x+Q_1}{(x-\gamma)^2+\delta^2}+\frac{P_2 x+Q_2}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^2}+\ldots\ldots+\frac{P_n x+Q_n}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^n}\end{aligned}\right\}\text{(b)}$$

wo jedem Faktor der Form $x-a$ ein ähnliches Glied wie $\frac{A}{x-a}$, jedem Faktor $(x-b)^m$ eine ähnliche Summe von m Gliedern u. s. w. zugehört. Die Grössen $A,\ldots$; B_1, $B_2,\ldots$, $B_m,\ldots$; $M, N,\ldots$; P_1, $Q_1,\ldots$, P_n, $Q_n,\ldots$ sind noch zu bestimmende Konstanten. Man wird sich leicht überzeugen, dass dieselben der Anzahl nach genau eben so viele sind, als der Grad von $F(x)$ ist. Ist man nun im Stande, diese Konstanten so zu bestimmen, dass die Gleichung (b) eine identische wird, d. h. dass sie richtig ist, x mag irgend welchen Werth haben, so kann man statt $\frac{f(x)}{F(x)}$ die Summe der zweiten Seite setzen. Um aber diese Konstanten zu bestimmen, multiplizire man beiderseits mit $F(x)$, so werden dadurch auf der zweiten Seite alle Nenner, da sie sämmtlich in $F(x)$ enthalten sind, wegfallen, und es wird eine ganze Funktion von x zum Vorschein kommen, deren Grad um 1 niedriger ist, als der von $F(x)$, da in einer gewissen Anzahl von Gliedern der zweiten Seite nur je ein Faktor aus $F(x)$ ausfällt. Diese Funktion hat also, wenn man sie nach den Potenzen von x ordnet, genau eben so viele Glieder, als der Grad von $F(x)$ beträgt,* und deren Koeffizienten die zu bestimmenden Konstanten, jedoch alle in der ersten Potenz und nicht mit einander multiplizirt, enthalten; höchstens eben so viele Glieder hat $f(x)$, da diese Funktion von niedererem Grade ist als $F(x)$. Man setze nun in den beiden Seiten dieser Gleichung die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x einander gleich, so erhält man genau eben so viele Gleichungen,

* Die allgemeinste ganze Funktion des vierten Grades: $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$ hat fünf Glieder u. s. w.

Digitized by Google

als zu bestimmende Konstanten, und kann dieselben also ermitteln. Da nunmehr die Gleichung eine identische ist, d. h. da die beiden Seiten derselben genau dasselbe sind, so ist auch (b) eine identische Gleichung. Einige Beispiele mögen das Verfahren erläutern.

1) Sey $\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}$ vorgelegt. $x^3+x^2-6x=x(x+3)(x-2)$,

$$\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-2},$$

$$\begin{aligned}7x-5&=A(x+3)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+3)\\&=A(x^2+x-6)+B(x^2-2x)+C(x^2+3x)\\&=x^2(A+B+C)+x(A-2B+3C)-6A,\end{aligned}$$

$$A+B+C=0,\quad A-2B+3C=7,\quad -6A=-5,$$

$$A=\frac{5}{6},\ B=-\frac{26}{15},\ C=\frac{9}{10}:$$

$$\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}=\frac{5}{6x}-\frac{26}{15(x+3)}+\frac{9}{10(x-2)}.$$

2) $$\frac{5x^3-2}{x^4-8x^3+18x^2-27}=\frac{5x^3-2}{(x-3)^3(x+1)}.\quad \text{Also}$$

$$\frac{5x^3-2}{x^4-8x^3+18x^2-27}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{(x-3)^3}+\frac{D}{x+1},$$

$$\begin{aligned}5x^3-2&=A(x-3)^2(x+1)+B(x-3)(x+1)+C(x+1)+D(x-3)^3\\&=A(x^3-5x^2+3x+9)+B(x^2-2x-3)+C(x+1)+D(x^3-9x^2\\&\qquad+27x-27)\\&=x^3[A+D]+x^2[-5A+B-9D]+x[3A-2B+C+27D]+\\&\qquad 9A-3B+C-27D,\end{aligned}$$

$$A+D=5,\ -5A+B-9D=0,\ 3A-2B+C+27D=0,\ 9A-3B+C-27D=-2,$$

$$A=\frac{313}{64},\ B=\frac{407}{16},\ C=\frac{133}{4},\ D=\frac{7}{64},$$

$$\frac{5x^3-2}{x^4-8x^3+18x^2-27}=\frac{313}{64(x-3)}+\frac{407}{16(x-3)^2}+\frac{133}{4(x-3)^3}+\frac{7}{64(x+1)}.$$

3) $$\frac{x^4-3x^3-2x^2+5x+2}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}=\frac{x^4-3x^3-2x^2+5x+2}{(x+1)^3(x-1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}$$
$$+\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{D}{x-1}+\frac{E}{(x-1)^2};$$

$$\begin{aligned}x^4-3x^3-2x^2+5x+2&=A(x+1)^2(x-1)^2+B(x+1)(x-1)^2+C(x-1)^2\\&\qquad+D(x+1)^3(x-1)+E(x+1)^3\\&=A(x^4-2x^2+1)+B(x^3-x^2-x+1)+C(x^2-2x+1)\\&\qquad+D(x^4+2x^3-2x-1)+E(x^3+3x^2+3x+1)\\&=x^4(A+D)+x^3(B+2D+E)+x^2(-2A-B+C+3E)\\&\qquad+x(-B-2C-2D+3E)+A+B+C-D+E;\end{aligned}$$

$$A+D=1,\ B+2D+E=-3,\ -2A-B+C+3E=-2,\ -B-2C-2D+3E=5,$$
$$A+B+C-D+E=2;$$

$$A=\frac{33}{16},\ B=-\frac{5}{4},\ C=-\frac{1}{4},\ D=-\frac{17}{16},\ E=\frac{3}{8};$$

$$\frac{x^4-3x^3-2x^2+5x+2}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}=\frac{33}{16(x+1)}-\frac{5}{4(x+1)^2}-\frac{1}{4(x+1)^3}-\frac{17}{16(x-1)}+\frac{3}{8(x-1)^2}.$$

Digitized by Google

4) $$\frac{3x^4-5x^3}{(x^2+4)^2(x-5)}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{Cx+D}{(x^2+4)^2}+\frac{E}{x-5},$$

$$3x^4-5x^3=(Ax+B)(x^2+4)(x-5)+(Cx+D)(x-5)+E(x^2+4)^2$$
$$=(Ax+B)(x^3-5x^2+4x-20)+(Cx+D)(x-5)+E(x^4+8x^2+16)$$
$$=x^4[A+E]+x^3[-5A+B]+x^2[4A-5B+C+8E]+x[-20A+4B-5C+D]-20B-5D+16E;$$

$A+E=3$, $-5A+B=-5$, $4A-5B+C+8E=0$, $-20A+4B-5C+D=0$, $-20B-5D+16E=0$;

$$A=\frac{1273}{841},\ B=\frac{2160}{841},\ C=-\frac{148}{29},\ D=-\frac{160}{29},\ E=\frac{1250}{841};$$

$$\frac{3x^4-5x^3}{(x^2+4)^2(x-5)}=\frac{1273x+2160}{841(x^2+4)}-\frac{148x+160}{29[x^2+4]^2}+\frac{1250}{841(x-5)}.$$

5) $$\frac{8x^4-3x^3+5}{(x^2+2x+3)^3x}=\frac{8x^4-3x^3+5}{[(x+1)^2+2]^3x}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+3}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+3)^2}+\frac{Ex+F}{(x^2+2x+3)^3}+\frac{G}{x},$$

$$8x^4-3x^3+5=(Ax+B)x(x^2+2x+3)^2+(Cx+D)x(x^2+2x+3)+(Ex+F)x+G(x^2+2x+3)^3$$
$$=(Ax+B)(x^5+4x^4+10x^3+12x^2+9x)+(Cx+D)(x^3+2x^2+3x)+Ex^2+Fx+G(x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27)$$
$$=x^6(A+G)+x^5(4A+B+6G)+x^4(10A+4B+C+21G)+x^3(12A+10B+2C+D+44G)+x^2(9A+12B+3C+2D+E+63G)+x(9B+3D+F+54G)+27G;$$

$A+G=0$, $4A+B+6G=0$, $10A+4B+C+21G=8$, $12A+10B+2C+D+44G=-3$, $9A+12B+3C+2D+E+63G=0$, $9B+3D+F+54G=0$, $27G=5$;

$$A=-\frac{5}{27},\ B=-\frac{10}{27},\ C=\frac{67}{9},\ D=-\frac{181}{9},\ E=\frac{37}{3},\ F=\frac{161}{3},\ G=\frac{5}{27}.$$

$$\frac{8x^4-3x^3+5}{(x^2+2x+3)^3x}=-\frac{5x+10}{27(x^2+2x+3)}+\frac{67x-181}{9(x^2+2x+3)^2}+\frac{37x+161}{3(x^2+2x+3)^3}+\frac{5}{27x}.$$

Die hier angewandte Methode zur Bestimmung der Konstanten A, B, ... reicht allerdings unbedingt aus, und ist in so ferne zu empfehlen. Doch lässt sich in manchen Fällen rascher zum Ziele gelangen.

Ist in der Gleichung (b) der Bruch mit dem Nenner $x-a$ nur einmal vorhanden, d. h. ist $x-a$ einfacher Faktor von $F(x)$, so erhält man aus (b):

$$\frac{(x-a)f(x)}{F(x)}=A+\ldots.,$$

wo die nach A kommenden Grössen sämmtlich den Faktor $x-a$ haben. Auf der ersten Seite ist der Faktor $x-a$ im Zähler und Nenner enthalten, man kann ihn also weglassen. Da aber die Gleichung für alle Werthe von x gilt, so setze man $x=a$; dadurch bleibt auf der zweiten Seite bloss A, so dass der Werth, den man auf der ersten Seite erhält, der gesuchten Grösse A gleich ist. — So im ersten Beispiel:

$$\frac{7x-5}{x(x+3)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-2}.$$

$$\frac{7x-5}{(x+3)(x-2)}=A+\ldots;\ \text{für } x=0: \frac{-5}{-6}=A=\frac{5}{6};$$

$$\frac{7x-5}{x(x-2)}=B+\ldots;\ \text{für } x=-3: \frac{-26}{15}=B=-\frac{26}{15};$$

$$\frac{7x-5}{x(x+3)}=C+\ldots;\ \text{für } x=2: \frac{9}{10}=B=\frac{9}{10}.$$

Digitized by Google

Diese Methode ist allgemein und lässt sich auch mittelst Anwendung der Differentialrechnung leicht in Regeln fassen, wie wir nun zeigen wollen.

§. 30.

Zweite Bestimmung der Konstanten in den Zählern der Partialbrüche.

I. Enthält (§. 29) F(x) den reellen Faktor des ersten Grades $x - a$ nur einmal, so entspricht ihm in der Summe (b) nur ein Partialbruch der Form $\frac{A}{x - a}$. Fasst man alle übrigen Brüche zusammen und ist deren Summe $= \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, so enthält $\varphi(x)$ die sämmtlichen Faktoren von F(x) ausser $x - a$, d. h. es ist $F(x) = (x - a)\varphi(x)$.

Die (b) ist also

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}, \quad f(x) = A\frac{F(x)}{x - a} + \psi(x)(x - a).$$

Setzt man hier $x = a$, so erscheint $\frac{F(x)}{x - a}$ unter der Form $\frac{0}{0}$, deren Werth (§. 22, I) gleich $F'(a)$ ist, indem $x - a$ als Differentialquotienten 1 gibt. Daraus folgt

$$f(a) = A\,F'(a), \quad A = \frac{f(a)}{F'(a)}. \qquad \text{(c)}$$

Hiebei tritt die Aufgabe auf, den Werth einer ganzen Funktion für $x = a$ zu berechnen. Hiefür gibt es einen sehr einfachen Mechanismus, der im Folgenden besteht.

Man schreibe die Koeffizienten der Potenzen von x, von der höchsten angefangen, in eine Horizontalreihe, ohne einen auszulassen, so dass, wenn einzelne Potenzen fehlen sollten, die ihnen entsprechenden Glieder in der Horizontalreihe mit 0 einzutragen sind. Nun bilde man eine zweite Horizontalreihe, deren Glieder vertikal unter den ersten stehen und derart beschaffen sind, dass jedes Glied der zweiten Reihe aus dem darüber stehenden der ersten erhalten wurde, indem man zu diesem Gliede der ersten Reihe das Produkt aus a und dem vorhergehenden Gliede der zweiten Reihe addirte.

Das erste Glied der zweiten Reihe ist dem ersten der ersten Reihe gleich. Das letzte Glied der zweiten Reihe ist der gesuchte Werth.

Einige Beispiele mögen das Verfahren klar machen.

1) $5x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 10x + 8$ für $x = 3$ zu berechnen.

	5	7	−2	−10	8	
3		15	66	192	546	Werth = 554.
	5	22	64	182	554	

2) $3x^4 - 7x^2 + 12$ für $x = -4$.

	3	0	−7	0	12	
−4		−12	48	−164	656	Werth = 668.
	3	−12	41	−164	668	

3) $4x^5 + 80x^4 + 7x - 12$ für $x = -20$.

	4	80	0	0	7	−12	
−20		−80	0	0	0	−140	Werth −152.
	4	0	0	0	7	−152	

Der Beweis der Richtigkeit kann etwa so geführt werden. Sind $a_0, a_1, \ldots, a_n$ die Koeffizienten der ersten, $b_0, b_1, \ldots, b_n$ die der zweiten Reihe, so ist also: $b_n = a_n + b_{n-1}a$,

Digitized by Google

$b_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-2}a$, $b_{n-2} = a_{n-2} + b_{n-3}a$, ..., $b_2 = a_2 + b_1 a$, $b_1 = a_1 + b_0 a$, $b_0 = a_0$. Daraus folgt $b_n = a_n + a_{n-1}a + a_{n-2}a^2 + \ldots + a_0 a^n$, was den Satz beweist.

II. Es enthalte $F(x)$ den Faktor $(x-a)^m$, d. h. $x=a$ sey m mal Wurzel der Gleichung $F(x)=0$, so dass $F(x)=(x-a)^m \varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ nicht den Faktor $x-a$ enthält. Alsdann ist.

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

$$f(x) = A_1 \frac{F(x)}{x-a} + A_2 \frac{F(x)}{(x-a)^2} + \ldots + A_m \frac{F(x)}{(x-a)^m} + \psi(x)(x-a)^m$$

$$= A_1 \varphi(x)(x-a)^{m-1} + A_2 \varphi(x)(x-a)^{m-2} + \ldots + A_m \varphi(x) + \psi(x)(x-a)^m.$$

Ferner:

$$\frac{f(x) - A_m \varphi(x)}{x-a} = A_{m-1}\varphi(x) + A_{m-2}(x-a)\varphi(x) + \ldots + A_1 \varphi(x)(x-a)^{m-2}$$
$$+ \psi(x)(x-a)^{m-1},$$

$$\frac{f(x) - A_m \varphi(x) - A_{m-1}(x-a)\varphi(x)}{(x-a)^2} = A_{m-2}\varphi(x) + \ldots + A_1 \varphi(x)(x-a)^{m-3}$$
$$+ \psi(x)(x-a)^{m-2},$$

$$\vdots$$

$$\frac{f(x) - A_m\varphi(x) - A_{m-1}(x-a)\varphi(x) - \ldots - A_2(x-a)^{m-2}\varphi(x)}{(x-a)^{m-1}} = A_1\varphi(x) + \psi(x)(x-a).$$

Setzt man in dieser Reihe von Gleichungen nach einander $x=a$, so beachte man, dass in der Regel auf den ersten Seiten die Nenner 0 werden, so dass, weil für $x=a$ auf der zweiten Seite etwas Bestimmtes zum Vorschein kommt, auch der Zähler 0 werden muss*, und in

$$\frac{f(x) - A_m\varphi(x) - A_{m-1}(x-a)\varphi(x) - \ldots + A_r(x-a)^{m-r}\varphi(x)}{(x-a)^{m-r+1}}$$

für $x=a$ nicht nur Zähler und Nenner 0 werden, sondern auch die $m-r$ ersten Differentialquotienten des Nenners, also nothwendig auch die $m-r$ ersten Differentialquotienten des Zählers, man zu den $m-r+1^{ten}$ Differentialquotienten gehen muss. Aus §. 18′ Formel (19) folgt nun leicht, dass für $x=a$:

$$\frac{\partial^{m-r+1}}{\partial x^{m-r+1}}[f(x) - A_m\varphi(x) - A_{m-1}(x-a)\varphi(x) - \ldots, - A_r(x-a)^{m-r}\varphi(x)]$$
$$= f^{m-r+1}(a) - A_m\varphi^{m-r+1}(a) - A_{m-1}(m-r+1)\varphi^{m-r}(a) - A_{m-2}(m-r+1) \times$$
$$(m-r)\varphi^{m-r-1}(a) - \ldots - A_r(m-r+1)\ldots 2\varphi'(a),$$

$$\frac{\partial^{m-r+1}(x-a)^{m-r+1}}{\partial x^{m-r+1}} = (m-r+1)(m-r)\ldots 1,$$

Demnach hat man:

$f(a) = A_m\varphi(a)$,

---

* Ist überhaupt $\frac{f(x)}{F(x)}$ eine Grösse, von der man weiss, dass sie für $x=a$ einen endlichen Werth A hat, und sind $F(a)$, $F'(a)$, ..., $F^n(a)$ Null, nicht aber $F^{n+1}(a)=0$, so müssen auch $f(a)$, $f'(a)$, ..., $f^n(a)$ Null seyn, da sonst $\frac{f(a)}{F(a)}$ nach §. 22 nicht endlich wäre, was gegen die Annahme streitet.

Digitized by Google

$$f'(a) - A_m \varphi'(a) = A_{m-1}\varphi'(a),$$
$$\frac{f''(a) - A_m\varphi''(a) - 2A_{m-2}\varphi'(a)}{1.2} = A_{m-2}\varphi(a),$$
$$\frac{f^3(a) - A_m\varphi^3(a) - 3A_{m-1}\varphi''(a) - 3.2A_{m-2}\varphi'(a)}{1.2.3} = A_{m-3}\varphi(a),$$
$$\vdots$$
$$\frac{\begin{array}{c}f^{m-1}(a) - A_m\varphi^{m-1}(a) - (m-1)A_{m-1}\varphi^{m-2}(a) - (m-1)(m-2)A_{m-2}\varphi^{m-3}(a) - \ldots \\ \ldots - (m-1)(m-2)\ldots 2A_2\varphi'(a)\end{array}}{1.2\ldots(m-1)} = A_1\varphi(a).$$

Nun ist $\varphi(x) = \frac{F(x)}{(x-a)^m}$, $F(x) = (x-a)^m\varphi(x)$,

also nach §. 18′:

$$F^m(a) = m(m-1)\ldots 1\varphi(a),\ F^{m+1}(a) = (m+1)m\ldots 2\varphi'(a),\ F^{m+2}(a) = (m+2)(m+1)\ldots 3\varphi''(a),\ldots,\ F^{2m-1}(a) = (2m-1)(m-2)\ldots m\varphi^{m-1}(a).$$

Zieht man hieraus $\varphi(a)$, $\varphi'(a)$, ..., $\varphi^{m-1}(a)$ und setzt diese Werthe in obige Gleichungen, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l}
m(m-1)\ldots 1 f(a) = A_m F^m(a),\\
(m+1)m\ldots 2f'(a) = A_m F^{m+1}(a) + (m+1)A_{m-1}F^m(a),\\
(m+2)(m+1)\ldots 3f''(a) = A_m F^{m+2}(a) + (m+2)A_{m-1}F^{m+1}(a) + (m+2)(m+1)\\
\qquad A_{m-2}F^m(a),\\
\quad\vdots\\
(2m-1)(2m-2)\ldots m f^{m-1}(a) = A_m F^{2m-1}(a) + (2m-1)A_{m-1}F^{2m-2}(a)\\
+ (2m-1)(2m-2)A_{m-2}F^{2m-3}(a) + \ldots + (2m-1)(2m-2)\ldots(m+1)A_1F^m(a),
\end{array}\right\}(c')$$

aus welchen Gleichungen nun A_m, A_{m-1}, ..., A_1 nach einander gefunden werden.

Diese Bestimmung ist hiernach eine sogenannte rekurrirende (rücklaufende), da erst A_m bestimmt seyn muss, ehe A_{m-1} erhalten werden kann u. s. w. — Thatsächlich mag also das Verfahren in §. 29 jetzt vorzuziehen seyn.

III. Was nun die Faktoren des zweiten Grades anbelangt, so ist

$$(x-\alpha)^2 + \beta^2 = [x - (\alpha + \beta i)][x - (\alpha - \beta i)],$$

so dass jeder reelle Faktor des zweiten Grades zwei imaginären Faktoren des ersten Grades gleich kommt. Man kann also, wenn man imaginäre Faktoren in F(x) zulässt, sich mit Faktoren des ersten Grades begnügen, d. h. in der Formel (b) des §. 29 nur Partialbrüche der beiden ersten Arten zulassen, in denen dann freilich a und b auch imaginär seyn können.

Da die in I und II aufgestellten Formeln (c) und (c′) auch für imaginäre a gelten, so ist damit die Aufgabe vollständig erledigt.

Allerdings kommen hiedurch scheinbar imaginäre Ergebnisse zum Vorschein. Wegen der Eigenthümlichkeit der imaginären Faktoren, wornach immer zwei zusammen gehören, die sich nur durch das Zeichen von i unterscheiden, heben sich die imaginären Theile von selbst auf. *

* So erhält man zwei Brüche $\frac{A+Bi}{x-(\alpha+\beta i)}$, $\frac{A-Bi}{x-(\alpha-\beta i)}$, deren Summe $=2\frac{A(x-\alpha)-B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$;

Digitized by Google

IV. Aus der Formel (c) lässt sich ein analytisch interessanter Satz ableiten, den wir noch angeben wollen. Gesetzt nämlich, es bestehe $F(x)$ blos aus den einfachen Faktoren $x-a$, $x-b$, $x-c$, ..., und es sey

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots,$$

so ist $A=\frac{f(a)}{F'(a)}$, $B=\frac{f(b)}{F'(b)}$, $C=\frac{f(c)}{F'(c)}$, ..., also

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(a)}{(x-a)F'(a)}+\frac{f(b)}{(x-b)F'(b)}+\frac{f(c)}{(x-c)F'(c)}+\ldots,$$

Bezeichnet man nun mit $\Sigma\frac{f(x)}{(x-\alpha)F'(x)}$ die Summe $\frac{f(a)}{(a-\alpha)F'(a)}+\frac{f(b)}{(b-\alpha)F'(b)}+\frac{f(c)}{(c-\alpha)F'(c)}+\ldots$, so ist hiernach

$$\Sigma\frac{f(x)}{(x-\alpha)F'(x)}=-\frac{f(\alpha)}{F(\alpha)}. \qquad \text{(d)}$$

Speziell für $f(x)=1$:

$$\Sigma\frac{1}{(x-\alpha)F'(x)}=-\frac{1}{F(\alpha)}. \qquad \text{(e)}$$

Entwickelt man nun die erste Seite nach fallenden Potenzen von α, so hat man

$$\Sigma-\frac{1}{F'(x)}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{x}{\alpha^2}+\frac{x^2}{\alpha^3}+\ldots\right),$$

welche Grösse der nach fallenden Potenzen α entwickelten zweiten Seiten identisch seyn muss. Daraus folgt, dass

$$\Sigma\frac{x^r}{F'(x)} \qquad \text{(f)}$$

gleich ist dem Koeffizienten von $\frac{1}{\alpha^{r+1}}$ in der Reihe, die entsteht, wenn man $\frac{1}{F(\alpha)}$ nach fallenden Potenzen von α entwickelt. Dabei bezeichnet $\Sigma\frac{x^r}{F'(x)}$ die Summe derjenigen Werthe, welche man erhält, wenn man in $\frac{x^r}{F'(x)}$ für x die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $F(x)=0$ setzt, vorausgesetzt, dass diese Gleichung nur einfache Wurzeln habe.

Ist nun n der Grad der (ganzen) Funktion $F(x)$, also $n-1$ der von $F'(x)$, so kommt in $\frac{1}{F(\alpha)}$, entwickelt nach fallenden Potenzen, zuerst das Glied $\frac{1}{\alpha^n}$ vor. Daraus folgt, dass wenn $r<n-1$:

$$\Sigma\frac{x^r}{F'(x)}=0 \qquad \text{(g)}$$

seyn wird. Ist mithin $f(x)$ eine ganze Funktion, deren Grad $<n-1$, so ist auch nothwendig

$$\Sigma\frac{f(x)}{F'(x)}=0. \qquad \text{(h)}$$

---

sodann $\frac{A+Bi}{[x-(\alpha+\beta i)]^n}$, $\frac{A-Bi}{[x-(\alpha-\beta i)]^n}$, deren Summe ebenfalls reell ist, wie sich aus den Formeln des §. 4 zeigen lässt. Ist $A+Bi=R[\cos\Phi+i\sin\Phi]$, $x-(\alpha+\beta i)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, so ist diese Summe

$$=\frac{R(\cos\Phi+i\sin\Phi)r^n(\cos n\varphi-i\sin n\varphi)+R(\cos\Phi-i\sin\Phi)r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}$$

$$=\frac{2Rr^n\cos(n\varphi-\Phi)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n},$$

Digitized by Google

da alle Glieder, wegen der vorhergehenden Gleichung, Null sind. Ist $F(x) = a x^n + b x^{n-1} + \ldots + k$, $f(x) = A x^{n-1} + B x^{n-2} + \ldots + K$, so ist hiernach

$$\Sigma \frac{A x^{n-1} + B x^{n-2} + \ldots + K}{n a x^{n-1} + (n-1) b x^{n-2} + \ldots} = \Sigma \frac{A x^{n-1}}{F'(x)}.$$

Aber wegen (f) ist $\frac{1}{F(\alpha)} = \frac{1}{a \alpha^n} + \ldots$, also der Koeffizient von $\frac{1}{\alpha^n}$ gleich $\frac{1}{a}$, so dass

$$\Sigma \frac{x^{n-1}}{F'(x)} = \frac{1}{a}, \quad \Sigma \frac{A x^{n-1}}{F'(x)} = \frac{A}{a},$$

d. h. $$\Sigma \frac{A x^{n-1} + B x^{n-2} + \ldots + K}{F'(x)} = \frac{A}{a}, \quad F(x) = a x^n + \ldots + k. \qquad (k)$$

§. 31.

Integration der Partialbrüche.

Hat man in einer oder der andern Weise die einzelnen Brüche bestimmt, in welche der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ zerlegt werden kann, so wird man statt des Integrals $\int \frac{f(x)}{F(x)} \partial x$ Integrale erhalten, welche eine der folgenden vier Formen haben:

$$\int \frac{A \partial x}{x - a}, \quad \int \frac{B \partial x}{(x-a)^m}, \quad \int \frac{M x + N}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} \partial x, \quad \int \frac{P x + Q}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^n} \partial x,$$

welche vier Integrale zu ermitteln sind.

Ermittlung der zwei ersten.

I. Die beiden ersten obigen Integrale werden unmittelbar nach den Formeln des §. 28 erhalten, wenn man $x - a = z$, $x = a + z$ setzt. Dadurch ergibt sich:

$$\int \frac{A \partial x}{x - a} = A \int \frac{1}{x-a} \frac{\partial x}{\partial z} \partial z = A \int \frac{1}{z} \partial z = A\, l(z) = A\, l(x-a); \qquad (a)$$

$$\int \frac{B \partial x}{(x-a)^m} = B \int (x-a)^{-m} \frac{\partial x}{\partial z} \partial z = B \int z^{-m} \partial z = \frac{-B}{(m-1) z^{m-1}} = \frac{-B}{(m-1)(x-a)^{m-1}}. \quad (b).$$

Ermittlung des dritten Integrals.

II. Es ist identisch

$$\int \frac{M x + N}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} \partial x = \int \frac{M(x-\alpha) + M\alpha + N}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} \partial x = M \int \frac{x - \alpha}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} \partial x + (M\alpha + N) \int \frac{\partial x}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}.$$

Das erste dieser beiden gibt, wenn (§. 28, III) $(x - \alpha)^2 + \beta^2 = z$, also

$$2(x-\alpha) \frac{\partial x}{\partial z} = 1, \quad (x-\alpha) \frac{\partial x}{\partial z} = \tfrac{1}{2}: \int \frac{x - \alpha}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} \partial x = \int \frac{(x-\alpha) \frac{\partial x}{\partial z}}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} \partial z = \tfrac{1}{2} \int \frac{\partial z}{z}$$
$$= \tfrac{1}{2} l(z) = \tfrac{1}{2} l[(x-\alpha)^2 + \beta^2].$$

Für das zweite ist zuerst

$$\int \frac{\partial x}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{1}{\beta^2} \int \frac{\partial x}{1 + \left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2}.$$

Digitized by Google

Man setze nun $\frac{x-\alpha}{\beta} = z$, $x = \alpha + \beta z$, $\frac{\partial x}{\partial z} = \beta$, so ist

$$\int \frac{\partial x}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{1}{\beta^2} \int \frac{\frac{\partial x}{\partial z}}{1 + \left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2} \partial z = \frac{1}{\beta} \int \frac{\partial z}{1 + z^2} = \frac{1}{\beta} \, arc\,(tg = z)$$

$$= \frac{1}{\beta} \, arc\left(tg = \frac{x-\alpha}{\beta}\right).$$

Daraus endlich

$$\int \frac{Mx + N}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} \partial x = \frac{M}{2} l\,[(x-\alpha)^2 + \beta^2] + \frac{M\alpha + N}{\beta} \, arc\left(tg = \frac{x-\alpha}{\beta}\right). \quad \text{(c)}$$

Ermittlung des vierten Integrals.

III. Es ist

$$\int \frac{Px + Q}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^n} \partial x = \int \frac{P(x-\alpha) + P\alpha + Q}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^n} \partial x = P \int \frac{x-\alpha}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^n} \partial x +$$

$$(P\alpha + Q) \int \frac{\partial x}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^n}.$$

Auf diese beiden Integrale wendet man nun dieselben Umformungen, wie in II an, setzt also für's erste $(x-\alpha)^2 + \beta^2 = z$, für's zweite $x - \alpha = \beta z$ und erhält:

$$\int \frac{(x-\alpha)\,\partial x}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^n} = \frac{1}{2} \int \frac{\partial z}{z^n} = \frac{-1}{2(n-1)\,[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{n-1}}.$$

$$\int \frac{\partial x}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^n} = \frac{1}{\beta^{2n}} \int \frac{\beta\,\partial z}{(1+z^2)^n} = \frac{1}{\beta^{2n-1}} \int \frac{\partial z}{(1+z^2)^n}.$$

Sind wir also im Stande, letzteres Integral zu ermitteln, so ist die Aufgabe als erledigt anzusehen.

Aber aus §. 27 folgt, wenn man die dortige Formel (7) auch schreibt

$$\int u \frac{\partial v}{\partial z} \partial z = uv - \int v \frac{\partial u}{\partial z} \partial z$$

und nun setzt

$$u = (1+z^2)^{-(n-1)}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 1, \text{ also } \frac{\partial u}{\partial z} = -2z(n-1)(1+z^2)^{-n}, \quad v = z:$$

$$\int \frac{\partial z}{(1+z^2)^{n-1}} = \frac{z}{(1+z^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{z^2\,\partial z}{(1+z^2)^n}.$$

Da aber $z^2 = 1 + z^2 - 1$, so heisst diese Gleichung auch

$$\int \frac{\partial z}{(1+z^2)^{n-1}} = \frac{z}{(1+z^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{\partial z}{(1+z^2)^{n-1}} - 2(n-1) \int \frac{\partial z}{(1+z^2)^n},$$

woraus

$$\int \frac{\partial z}{(1+z^2)^n} = \frac{z}{2(n-1)(1+z^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{\partial z}{(1+z^2)^{n-1}}. \quad \text{(d)}$$

Diese Formel ist eine **Reduktionsformel**, welche das gesuchte Integral durch eines derselben Art, aber einfacherer Gestalt liefert.

Setzt man in (d) nach einander $n-1$, $n-2$, ... für n, so erhält man:


Digitized by Google

$$\int\frac{\partial z}{(1+z^2)^{n-1}}=\frac{z}{2(n-2)(1+z^2)^{n-2}}+\frac{2n-5}{2n-4}\int\frac{\partial z}{(1+z^2)^{n-2}},$$

$$\int\frac{\partial z}{(1+z^2)^{n-2}}=\frac{z}{2(n-3)(1+z^2)^{n-3}}+\frac{2n-7}{2n-6}\int\frac{\partial z}{(1+z^2)^{n-3}},$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\int\frac{\partial z}{(1+z^2)^2}=\frac{z}{2(1+z^2)}+\frac{1}{2}\,arc\,(tg=z).$$

Daraus, wenn man in (d) nach einander einsetzt:

$$\int\frac{\partial z}{1+z^2)^n}=\frac{z}{2(n-1)(1+z^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{z}{2(n-2)(1+z^2)^{n-2}}$$

$$+\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdot\frac{z}{2(n-3)(1+z^2)^{n-3}}$$

$$+\ldots\ldots\ldots+\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdots\frac{3}{4}\,\frac{z}{2(1+z^2)}+\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdots\frac{1}{2}\,arc\,(tg=z).$$

Setzt man hier $z=\frac{x-\alpha}{\beta}$, so hat man das Integral, das gesucht wurde.

So erhält man:

$$\int\frac{Px+Q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,\partial x=-\frac{P}{2(n-1)}\,\frac{1}{\mu^{n-1}}$$

$$+\frac{P\alpha+Q}{2}\Big[\frac{x-\alpha}{(n-1)\beta^2\mu^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{x-\alpha}{(n-2)\beta^4\mu^{n-2}}+\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdot\frac{x-\alpha}{(n-3)\beta^6\mu^{n-3}}+\ldots$$

$$+\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdots\frac{3}{4}\,\frac{x-\alpha}{\beta^{2n-2}\mu}+\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdots\frac{3}{4}\,\frac{1}{\beta^{2n-1}}\,arc\left(tg=\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\Big],\ (e)$$

wo $\mu=(x-\alpha)^2+\beta^2$.

Beispiele.

1) $$\int\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}\,\partial x\ (\S.\ 29)=\frac{5}{6}\int\frac{\partial x}{x}-\frac{26}{15}\int\frac{\partial x}{x+3}+\frac{9}{10}\int\frac{\partial x}{x-2}$$
$$=\frac{5}{6}\,l(x)-\frac{26}{15}\,l(x+3)+\frac{9}{10}\,l(x-2)+C.$$

2) $$\int\frac{5x^3-2}{x^4-8x^3+18x^2-27}\,\partial x=\frac{313}{64}\int\frac{\partial x}{x-3}+\frac{407}{16}\int\frac{\partial x}{(x-3)^2}+\frac{133}{4}\int\frac{\partial x}{(x-3)^3}+\frac{7}{64}\int\frac{\partial x}{x+1}$$
$$=\frac{313}{64}\,l(x-3)-\frac{407}{16}\,\frac{1}{x-3}-\frac{133}{8}\,\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{7}{64}\,l(x+1)+C.$$

3) $\int\frac{5x+3}{x^2+4}\,\partial x$ nach (c), wo $M=5$, $N=3$, $\alpha=0$, $\beta=2$:
$$\int\frac{5x+3}{x^2+4}\,\partial x=\frac{5}{2}\,l(x^2+4)+\frac{3}{2}\,arc\left(tg=\frac{x}{2}\right)+C.$$

4) $$\int\frac{5x^3+7x^2+2}{x(x+3)}\,\partial x=\int\Big[5x-8+\frac{24x+2}{x(x+3)}\Big]\partial x=\int\Big[5x-8+\frac{2}{3}\,\frac{1}{x}+\frac{70}{3}\,\frac{1}{x+3}\Big]\partial x$$
$$=\frac{5x^2}{2}-8x+\frac{2}{3}\,l(x)+\frac{70}{3}\,l(x+3)+C$$
$$=\frac{5x^2}{2}-8x+\frac{1}{3}\,l(x^2)+\frac{1}{3}\,l[(x+3)^{70}]+C$$
$$=\frac{5x^2}{2}-8x+\frac{1}{3}\,l[x^2(x+3)^{70}]+C.$$

Digitized by Google

5) $\int \frac{8x^4-3x^3+5}{(x^2+2x+3)^3x}\partial x$ (§. 29) $= -\frac{5}{27}\int\frac{x+2}{x^2+2x+3}\partial x + \frac{1}{9}\int\frac{67x-181}{(x^2+2x+3)^2}\partial x$
$+\frac{1}{3}\int\frac{37x+161}{(x^2+2x+3)^3}\partial x + \frac{5}{27}\int\frac{\partial x}{x}$.

Da ferner $x^2+2x+3=(x+1)^2+2$, so ist $\alpha=-1$, $\beta=\sqrt{2}$, also nach (c) und (e):

$$\int\frac{x+2}{x^2+2x+3}\partial x = \frac{1}{2}l(x^2+2x+3)+\frac{1}{\sqrt{2}}arc\left(tg=\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\int\frac{67x-181}{(x^2+2x+3)^2}\partial x = -\frac{67}{2[x^2+2x+3]}-\frac{62(x+1)}{x^2+2x+3}-\frac{62}{\sqrt{2}}arc\left(tg=\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\int\frac{37x+161}{(x^2+2x+3)^3}\partial x = -\frac{37}{4(x^2+2x+3)^2}+\frac{31(x+1)}{(x^2+2x+3)^2}\left[\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\frac{x^2+2x+3}{2}\right]+$$
$$\frac{31}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3.1}{4.2}arc\left(tg=\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right),\quad \int\frac{\partial x}{x}=l(x).$$

Demnach

$$\int\frac{8x^4-3x^3+5}{(x^2+2x+3)^3x}\partial x = -\frac{5}{27}l\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x}\right)-\frac{5}{27\sqrt{2}}arc\left(tg=\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{9}$$
$$\frac{191+124x}{2(x^2+2x+3)}-\frac{62}{9\sqrt{2}}arc\left(tg=\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{3}\frac{25+62x}{4(x^2+2x+3)^2}+\frac{31(x+1)}{8(x^2+2x+3)}+\frac{31}{8\sqrt{2}}$$
$$arc\left(tg=\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{5}{27}l\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x}\right)-\frac{485+217x}{72(x^2+2x+3)}+\frac{25+62x}{12(x^2+2x+3)^2}$$
$$-\frac{691}{216\sqrt{2}}arc\left(tg=\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

6) Eben so

$$\int\frac{x^4-3x^3-2x^2+5x+2}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}\partial x=\frac{33}{16}l(x+1)+\frac{5}{4(x+1)}+\frac{1}{8(x+1)^2}-\frac{17}{16}l(x-1)$$
$$-\frac{3}{8(x-1)}+C.$$

7) Zur Uebung mögen etwa dienen:

$$\int\frac{(x^3+1)\partial x}{x^4-3x^3+3x^2-x}=-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+2l(x-1)-l(x)+C,\ [x^4-3x^3+3x^2-x$$
$$=(x-1)^3x],$$

$$\int\frac{\partial x}{x^8+x^7-x^4-x^3}=-\frac{5x^2+2x-2}{4x^2(x+1)}+\frac{1}{8}l\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)+l\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{4}arc\ (tg=x)$$
$$+C,\ [x^8+x^7-x^4-x^3=x^3(x^2+1)(x+1)^2(x-1)],$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{1+3x}=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{27}x^3+\frac{1}{54}x^2-\frac{1}{81}x+\frac{1}{243}l\left(\frac{3x+1}{3}\right)+C.$$

IV. Sobald nunmehr ein Integral auf die hier betrachtete Form reduzirt ist, so kann es als bestimmt angesehen werden, da wir im Vorstehenden alle möglichen Fälle erledigt haben.

Auf die vorstehende Form lassen sich diejenigen Integrale zurückführen, welche Potenzen mit negativen oder Bruchexponenten enthalten. So wird das Integral

$$\int\frac{ax+bx^{-3}+cx^5}{mx^{-2}+nx+px^{-6}}\partial x$$

Digitized by Google

die frühere Form annehmen, indem man Zähler und Nenner mit x^6 multiplizirt. Eben so wird das Integral.

$$\int \frac{a\sqrt{x}+b\sqrt[3]{x}+cx}{e\sqrt[4]{x}+f\sqrt{x}+g\sqrt[3]{x}}\,\partial x,$$

wenn man $x=z^{12}$, also $\frac{\partial x}{\partial z}=12z^{11}$ setzt, werden:

$$12\int \frac{az^6+bz^4+cz^{12}}{ez^3+fz^6+gz^4}z^{11}\partial z=12\int\frac{az^2+b+cz^8}{e+fz^3+gz}z^{12}\partial z,$$

und hat nun die frühere Form. Wie man sich in andern ähnlichen Fällen zu helfen hat, ist hiernach leicht zu übersehen.

§. 32.

Irrationale Integrale.

Auf die in den vorstehenden §§. näher betrachtete Form lassen sich nun leicht diejenigen Integrale bringen, die ausser ganzen Potenzen von x noch die Grösse $\sqrt{a+bx+cx^2}$ enthalten. Ein solches Integral wäre etwa:

$$\int\frac{5x^2+3\sqrt{a+bx+cx^2}}{7x-12\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}}\,\partial x.$$

Wir setzen dabei voraus, dass ausser dieser Grösse keine andere ähnlicher Art mehr in dem Integrale vorkomme. Dabei müssen wir drei Fälle unterscheiden.

I. $c=0$, d. h. die vorkommende Quadratwurzel ist bloss $\sqrt{a+bx}$. Man setze nun (§. 28):

$$\sqrt{a+bx}=z,\ a+bx=z^2,\ b\frac{\partial x}{\partial z}=2z,\ \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{2z}{b},\ x=\frac{z^2-a}{b},$$

so wird das Integral nach z bloss Potenzen von z enthalten. Käme übrigens $\sqrt[n]{a+bx}$ vor, so hätte man zu setzen

$$\sqrt[n]{(a+bx)}=z,\ a+bx=z^n,\ x=\frac{z^n-a}{b},\ \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{nz^{n-1}}{b}.$$

Sey z. B. $\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx}}$ zu integriren, so ist

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx}}=\int\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\frac{\partial x}{\partial z}\partial z=\frac{2}{b}\int\frac{z}{z}\partial z=\frac{2}{b}z+C=\frac{2\sqrt{a+bx}}{b}+C.$$

Eben so

$$\int x\sqrt{a+bx}\,\partial x=\int x\sqrt{a+bx}\frac{\partial x}{\partial z}\partial z=\frac{2}{b^2}\int(z^2-a)z^2\partial z=\frac{2}{b^2}\left(\frac{z^5}{5}-\frac{az^3}{3}\right)+C$$

$$=\frac{2}{b^2}\left[\frac{1}{5}\sqrt{(a+bx)^5}-\frac{a}{3}\sqrt{(a+bx)^3}\right]+C.$$

$$\int\sqrt[3]{a+bx}\,\partial x=\frac{3}{b}\int z^3\partial x=\frac{3z^4}{4b}+C=\frac{3\sqrt[3]{(a+bx)^4}}{4b}+C.$$

Digitized by Google

II. $c > 0$. Man setze

$$\sqrt{a+bx+cx^2} = z - x\sqrt{c},\ a+bx+cx^2 = z^2 - 2zx\sqrt{c} + cx^2,\ a+bx = z^2 - 2zx\sqrt{c},$$

$$x = \frac{z^2-a}{b+2z\sqrt{c}},\ \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{2(z^2\sqrt{c}+bz+a\sqrt{c})}{(b+2z\sqrt{c})^2},\ z = x\sqrt{c}+\sqrt{a+bx+cx^2},\ \sqrt{a+bx+cx^2}$$

$$= z - \frac{z^2-a}{b+2z\sqrt{c}}\sqrt{c} = \frac{bz+z^2\sqrt{c}+a\sqrt{c}}{b+2z\sqrt{c}},$$ so wird das Integral auf die Form in §. 29 zurückkommen.

Also z. B. für $c > 0$:

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \int\frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\frac{\partial x}{\partial z}\partial z = 2\int\frac{b+2z\sqrt{c}}{bz+z^2\sqrt{c}+a\sqrt{c}}\cdot\frac{z^2\sqrt{c}+bz+a\sqrt{c}}{(b+2z\sqrt{c})^2}\partial z$$

$$= 2\int\frac{\partial z}{b+2z\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{c}}l(b+2z\sqrt{c}) + C = \frac{1}{\sqrt{c}}l[b+2cx+2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}] + C.$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{1+x^2}} = \int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\partial x}{\partial z}\partial z = \int\frac{2z}{z^2+1}\,\frac{2(z^2+1)}{4z^2}\partial z = \int\frac{\partial z}{z} = l(z)+C = l[x+\sqrt{1+x^2}]$$
$$+ C.$$

III. $c < 0$, d. h. negativ. Setzen wir, um diess klar zu machen, $-c$ für c, wo nun c als positiv anzusehen ist, so kommt also in dem Integrale die Grösse $\sqrt{a+bx-cx^2}$ vor. Es ist aber (vergl. §. 29, Note)

$$a+bx-cx^2 = -c\left[x^2 - \frac{b}{c}x - \frac{a}{c}\right] = -c\left[\left(x-\frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{b^2+4ac}{4c^2}\right].$$

Ist nun $b^2+4ac < 0$, so ist die Grösse $\left(x+\frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{b^2+4ac}{4c^2}$ für alle möglichen (reellen) Werthe von x positiv, also $-c\left[\left(x-\frac{b}{2c}\right) - \frac{b^2+4ac}{4c^2}\right]$ immer negativ, d. h. alsdann ist $\sqrt{a+bx-cx^2}$ für alle Werthe von x imaginär. Derartige Integrale können in den Anwendungen nicht vorkommen, da dort nur reelle Grössen betrachtet werden. Wir werden also den Fall, da $b^2+4ac < 0$ ist, gar nicht beachten.

Ist nun aber $b^2+4ac > 0$, so lässt sich $\left(x-\frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{b^2+4ac}{4c^2}$ in ein Produkt zweier reeller Faktoren des ersten Grades zerfällen, da

$$\left(x-\frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{b^2+4ac}{4c^2} = \left[x-\frac{b}{2c}+\sqrt{\frac{b^2+4ac}{4c^2}}\right]\left[x-\frac{b}{2c}-\sqrt{\frac{b^2+4ac}{4c^2}}\right].$$

Aber auch nur in diesem Falle ist eine solche Zerfällung möglich, da im andern Falle $\sqrt{\frac{b^2+4ac}{4c^2}}$ imaginär ist.

Kommt also in dem Integrale die Grösse $\sqrt{a+bx-cx^2}$ $(c > 0)$ vor, so werden wir dasselbe nur dann einer Betrachtung unterziehen, wenn $a+bx-cx^2$ sich in zwei Faktoren des ersten Grades zerfällen lässt. *

Sey nun

$$a+bx-cx^2 = (\alpha x+\beta)(\alpha' x+\beta'),\ \alpha\alpha' = -c,$$

* Der andere Fall käme auf $i\sqrt{cx^2-bx-a}$ zurück, und gehörte dann zu II. Natürlich wäre das Integral jetzt imaginär.

Digitized by Google

wo $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ bekannte reelle Zahlen sind. Alsdann setzen wir

$$\sqrt{a+bx-cx^2}=z(\alpha' x+\beta')$$

und erhalten, da $\sqrt{a+bx-cx^2}=\sqrt{(\alpha x+\beta)(\alpha' x+\beta')}$:

$$(\alpha x+\beta)(\alpha' x+\beta')=z^2(\alpha' x+\beta')^2,\ \alpha x+\beta=z^2(\alpha' x+\beta').$$

Hieraus findet sich

$$x=\frac{\beta' z^2-\beta}{\alpha-\alpha' z^2},\ \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{2(\alpha\beta'-\alpha'\beta)z}{(\alpha-\alpha' z^2)^2},\ \sqrt{a+bx-cx^2}=\frac{(\alpha\beta'-\alpha'\beta)z}{\alpha-\alpha' z^2},$$

so dass das umgeformte Integral rational ausfällt. — Endgiltig ist dann

$$z=\frac{\sqrt{a+bx-cx^2}}{\alpha' x+\beta'}=\frac{\sqrt{(\alpha x+\beta)(\alpha' x+\beta')}}{\alpha' x+\beta'}.$$

Letztere Grösse darf $=\sqrt{\frac{(\alpha x+\beta)(\alpha' x+\beta')}{(\alpha' x+\beta')^2}}=\sqrt{\frac{\alpha x+\beta}{\alpha' x+\beta'}}$ gesetzt werden, wenn $\alpha' x+\beta'$ positiv ist, d. h. wenn die Werthe von x, die man hier anwenden darf, und welche jedenfalls $(\alpha x+\beta)(\alpha' x+\beta')$ positiv machen müssen, auch $\alpha' x+\beta'$ positiv machen. Im andern Falle wäre $z=-\sqrt{\frac{\alpha x+\beta}{\alpha' x+\beta'}}$. Die beiden Faktor $\alpha x+\beta$, $\alpha' x+\beta'$ haben übrigens nothwendig dasselbe Zeichen, da ihr Produkt positiv seyn muss.

Als Beispiele wählen wir

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=\int\frac{\frac{\partial x}{\partial z}\partial z}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=2\int\frac{(\alpha\beta'-\alpha'\beta)z}{(\alpha-\alpha' z^2)^2}\,\frac{\alpha-\alpha' z^2}{(\alpha\beta'-\alpha'\beta)z}\partial z=2\int\frac{\partial z}{\alpha-\alpha' z^2}.$$

Da aber $\alpha\alpha'=-c$, $\alpha'=-\frac{c}{\alpha}$, so ist (wenn α positiv)

$$\int\frac{\partial z}{\alpha-\alpha' z^2}=\alpha\int\frac{\partial z}{\alpha^2+cz^2}=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 c}}\,arc\left(tg=z\sqrt{\frac{c}{\alpha^2}}\right)$$

(§. 28, I) $=\frac{1}{\sqrt{c}}\,arc\left(tg=\frac{z\sqrt{c}}{\alpha}\right)$.* Demnach

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=\frac{2}{\sqrt{c}}\,arc\left(tg=\frac{\sqrt{c}\sqrt{a+bx-cx^2}}{\alpha(\alpha' x+\beta')}\right)+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{c}}\,arc\left(tg=\frac{\sqrt{c}\sqrt{a+bx-cx^2}}{-cx+\alpha\beta'}\right)+C.$$

Daraus

$\int\frac{\partial x}{\sqrt{5x-3x^2}}$ wo $5x-3x^2=x(5-3x)$, also $\alpha=1$, $\beta=0$, $\alpha'=-3$, $\beta'=5$, $c=3$:

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{5x-3x^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,arc\left(tg=\frac{\sqrt{3}\sqrt{5x-3x^2}}{-3x+5}\right)+C.$$

---

* Wäre α negativ, so hätte man $\sqrt{\frac{c}{\alpha^2}}=-\frac{\sqrt{c}}{\alpha}$, da immer $\sqrt{\frac{c}{\alpha^2}}$ positiv ausfallen muss. Also wäre $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 c}}\,arc\left(tg=z\sqrt{\frac{c}{\alpha^2}}\right)=-\frac{\alpha}{\alpha\sqrt{c}}\,arc\left(tg=-\frac{z\sqrt{c}}{\alpha}\right)=-\frac{1}{\sqrt{c}}\,arc$ $\left(tg=-\frac{z\sqrt{c}}{\alpha}\right)=\frac{1}{\sqrt{c}}\,arc\left(tg=\frac{z\sqrt{c}}{\alpha}\right)$ (§. 3, IV), so dass das erhaltene Resultat unbedingt gilt.

Digitized by Google

Da aber $5x - 3x^2 = x(5 - 3x)$ immer positiv seyn muss, so kann x nicht negativ seyn; für positive Werthe wird $5 - 3x$ negativ, wenn $x > \frac{5}{3}$, so dass also x zwischen 0 und $\frac{5}{3}$ liegen muss. Da hiernach $-3x + 5 > 0$ ist, so hat man

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{5x - 3x^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} arc\left(tg = \frac{\sqrt{3}\sqrt{x(5-3x)}}{\sqrt{(5-3x)^2}}\right) + C$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arc\left(tg = \sqrt{\frac{3x}{5-3x}}\right) + C.$$

Zur Theorie der Grössen $arc(sin = x)$, $arc(tg = x)$.

IV. Wir sind bei diesen Beispielen vorzugsweise auf die goniometrischen Funktionen gelangt, von denen wir in §. 3, IV kurz sprachen, und es mag gestattet seyn, hier Einiges in Bezug auf dieselben aufzuführen, wobei wir, aus den in §. 3 angeführten Gründen, nur von zweien derselben handeln wollen.

Wir haben bereits dort schon angeführt, dass immer

$$arc(sin = -\alpha) = -arc(sin = \alpha),\quad arc(tg = -\alpha) = -arc(tg = \alpha) \qquad (a)$$

sey, welche Gleichungen aus der Erklärung sofort hervorgehen.

Wir wollen uns aber jetzt die Aufgabe stellen, die Grössen

$$arc(sin = \alpha) + arc(sin = \beta),\quad arc(tg = \alpha) + arc(tg = \beta)$$

zu ermitteln. Sey

$$arc(sin = \alpha) = a,\quad arc(sin = \beta) = b,\ \text{also}\ sin\, a = \alpha,\ sin\, b = \beta,$$

so ist

$$sin(a + b) = sin\, a\, cos\, b + cos\, a\, sin\, b = \alpha\sqrt{1-\beta^2} + \beta\sqrt{1-\alpha^2},$$

da $cos\, b$ und $cos\, a$ immer positiv sind, weil a und b zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegen. Aus $sin\, k = h$ folgt aber nicht geradezu $k = arc(sin = h)$, es müsste denn k zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegen. Ist also $a + b$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, so ist $a + b = arc(sin = \alpha\sqrt{1-\beta^2} + \beta\sqrt{1-\alpha^2})$, d. h. $arc(sin = \alpha) + arc(sin = \beta) = arc(sin = \alpha\sqrt{1-\beta^2} + \beta\sqrt{1-\alpha^2})$. Da aber a und b zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegen, so kann $a + b$ von $-\pi$ bis $+\pi$ gehen, so dass man in Wahrheit drei Fälle unterscheiden muss.

1) $a + b$ zwischen $-\pi$ und $-\frac{\pi}{2}$.

Dazu gehört, dass sowohl a als b negativ sind, d. h. dass α und β es sind. Ueberdiess muss $cos(a + b)$ jetzt negativ ausfallen, d. h. $\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2} - \alpha\beta$ muss negativ seyn. Ist diess aber der Fall und sind α, β beide negativ, so liegt auch nothwendig $a + b$ zwischen $-\pi$ und $-\frac{\pi}{2}$.

In unserem Falle also ist $arc(sin = \alpha\sqrt{1-\beta^2} + \beta\sqrt{1-\alpha^2})$ negativ, so dass wir nur setzen können:

$$a + b = -\pi - arc(sin = \alpha\sqrt{1-\beta^2} + \beta\sqrt{1-\alpha^2}),$$

da jetzt die zweite Seite zwischen $-\pi$ und $-\frac{\pi}{2}$ liegt, und überdiess ihr Sinus gleich $\alpha\sqrt{1-\beta^2} + \beta\sqrt{1-\alpha^2}$ ist, wie verlangt.

Digitized by Google

2) $a + b$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$.

Jetzt ist nothwendig $\cos(a+b)$ positiv, und wenn diess der Fall ist, so wird $a+b$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegen, da für den ersten Fall $\cos(a+b) < 0$ und im dritten auch $\cos(\alpha+b) < 0$ ist. Demnach muss jetzt $\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2}-\alpha\beta > 0$ ausfallen.

3) $a + b$ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π.

Jetzt müssen a und b, also auch α und β positiv seyn; überdiess ist $\cos(a+b) < 0$, d. h. es muss $\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2}-\alpha\beta < 0$ seyn. Nun setzt man

$$a + b = \pi - arc\,(sin = \alpha\sqrt{1-\beta^2}+\beta\sqrt{1-\alpha^2}),$$

da nur diese Grösse zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π liegt und ihr Sinus gleich $\alpha\sqrt{1-\beta^2}+\beta\sqrt{1-\alpha^2}$ ist. Man hat also

$$arc\,(sin=\alpha)+arc\,(sin=\beta)=\begin{cases} -\pi - arc\,(sin=\alpha\sqrt{1-\beta^2}+\beta\sqrt{1-\alpha^2}), \text{ wenn } \alpha \text{ und } \beta \\ \quad \text{negativ und } \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2}-\alpha\beta<0; \\ arc\,(sin=\alpha\sqrt{1-\beta^2}+\beta\sqrt{1-\alpha^2}), \text{ wenn } \sqrt{1-\alpha^2}\times \\ \quad \sqrt{1-\beta^2}-\alpha\beta>0; \qquad \text{(b)} \\ \pi - arc\,(sin=\alpha\sqrt{1-\beta^2}+\beta\sqrt{1-\alpha^2}), \text{ wenn } \alpha \text{ und } \beta \\ \quad \text{positiv, und } \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2}-\alpha\beta<0. \end{cases}$$

Diese Formeln gelten unbedingt. Setzt man $-\beta$ für β, so ergibt sich:

$$arc\,(sin=\alpha)-arc\,(sin=\beta)=\begin{cases} -\pi - arc\,(sin=\alpha\sqrt{1-\beta^2}-\beta\sqrt{1-\alpha^2}), \text{ wenn } \alpha \text{ und} \\ \quad -\beta \text{ negativ, } \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2}+\alpha\beta<0; \\ arc\,(sin=\alpha\sqrt{1-\beta^2}-\beta\sqrt{1-\alpha^2}), \text{ wenn } \sqrt{1-\alpha^2}\times \\ \quad \sqrt{1-\beta^2}+\alpha\beta>0; \qquad \text{(b')} \\ \pi - arc\,(sin=\alpha\sqrt{1-\beta^2}-\beta\sqrt{1-\alpha^2}), \text{ wenn } \alpha \text{ und} \\ \quad -\beta \text{ positiv, } \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2}+\alpha\beta<0. \end{cases}$$

Setzen wir nun weiter $arc\,(tg=\alpha)=a$, $arc\,(tg=\beta)=b$, also $tg\,a=\alpha$, $tg\,b=\beta$, so ist $tg\,(a+b)=\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$. Ist $a+b$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, so folgt hieraus sofort $a+b=arc\left(tg=\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}\right)$, d. h. $arc\,(tg=\alpha)+arc\,(tg=\beta)=arc\left(tg=\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}\right)$. Da aber auch hier wieder $a+b$ von $-\pi$ bis $+\pi$ gehen kann, so hat man dieselben drei Fälle, wie vorhin. Die Entscheidung liegt wieder in den Vorzeichen von α und β und in $\cos(a+b)$. Ist nämlich

$$\cos(a+b)>0, \text{ d. h. } \cos a\cos b-\sin a\sin b>0, \text{ d. h. } 1-tg\,a\,tg\,b>0,^{*}\ 1-\alpha\beta>0,$$

so liegt $a+b$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$. Ist aber

$$\cos(a+b)<0, \text{ d. h. } \cos a\cos b-\sin a\sin b<0,\ 1-tg\,a\,tg\,b<0,\ 1-\alpha\beta<0,$$

* Dieser Schluss ist nur richtig, wenn $\cos a\,\cos b$ positiv ist; denn nur dann haben $\cos a\cos b-\sin a\sin b$ und $\frac{\cos a\cos b-\sin a\sin b}{\cos a\cos b}=1-tg\,a\,tg\,b$ dasselbe Zeichen. Aber $\cos a$ und $\cos b$ sind beide positiv, da a und b zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegen.

Digitized by Google

so liegt $a+b$ unter $-\frac{\pi}{2}$ oder über $+\frac{\pi}{2}$. Erinnert man sich nun, dass die Grössen $arc\,(tg=\gamma)$, $\pi + arc\,(tg=\gamma)$, $-\pi + arc\,(tg=\gamma)$ alle dieselbe Tangente γ haben, so ergibt sich:

$$arc\,(tg=\alpha) + arc\,(tg=\beta) = \begin{cases} -\pi + arc\left(tg = \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}\right), & \text{wenn } \alpha \text{ und } \beta \text{ negativ, } 1-\alpha\beta < 0; \\ arc\left(tg = \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}\right), & \text{wenn } 1-\alpha\beta > 0; \\ \pi + arc\left(tg = \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}\right), & \text{wenn } \alpha \text{ und } \beta \text{ positiv, } 1-\alpha\beta < 0. \end{cases} \quad (c)$$

Setzt man in (b) $\beta = \alpha$, so ist

$$2\,arc\,(sin=\alpha) = \begin{cases} -\pi - arc\,(sin = 2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}), & \text{wenn } \alpha \text{ negativ, } 1-2\alpha^2 < 0; \\ arc\,(sin = 2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}), & \text{wenn } 1-2\alpha^2 > 0; \\ \pi - arc\,(sin = 2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}), & \text{wenn } \alpha \text{ positiv, } 1-2\alpha^2 < 0. \end{cases} \quad (d)$$

Eben so aus (c):

$$2\,arc\,(tg=\alpha) = \begin{cases} -\pi + arc\left(tg = \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\right), & \text{wenn } \alpha \text{ negativ, } 1-\alpha^2 < 0; \\ arc\left(tg = \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\right), & \text{wenn } 1-\alpha^2 > 0; \\ \pi + arc\left(tg = \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\right), & \text{wenn } \alpha \text{ positiv, } 1-\alpha^2 < 0. \end{cases} \quad (e)$$

Da ferner unbedingt:

$$sin\,\beta = \frac{tg\,\beta}{\sqrt{1+tg^2\beta}},$$

so ist, wenn $tg\,\beta = \alpha$, also $\beta = arc\,(tg=\alpha)$, wo wir β zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ einschliessen, so dass auch $\beta = arc\left(sin = \frac{tg\,\beta}{\sqrt{1+tg^2\beta}}\right) = arc\left(sin = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)$:

$$arc\,(tg=\alpha) = arc\left(sin = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right). \quad (f)$$

Dazu gehört die Formel

$$arc\,(sin=\alpha) = arc\left(tg = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right), \quad (g)$$

welche aus $tg\,\beta = \frac{sin\,\beta}{\sqrt{1-sin^2\beta}}$ sich eben so ergibt. Beide unterliegen keiner weitern Bedingung.

Setzt man in (c) $\beta = \frac{1}{\alpha}$, so ist $\alpha\beta = 1$, $1-1=0$, $\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} = \infty$, $arc\left(tg = \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}\right) = \frac{\pi}{2}$, so dass

$$arc\,(tg=\alpha) + arc\left(tg = \frac{1}{\alpha}\right) = \begin{cases} -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}, & \text{wenn } \alpha \text{ negativ;} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } \alpha \text{ positiv.} \end{cases} \quad (h)$$

Der letzte Fall in (c) verlangt, dass $\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} = -\infty$, $arc\left(tg = \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}\right) = -\frac{\pi}{2}$ gesetzt werde, wodurch er auf den zweiten zurück kommt. Ueberdiess lassen sich die (h) leicht unmittelbar erweisen.

Digitized by Google

V. Wir wollen von diesen Formeln in Bezug auf das zuletzt bestimmte Integral Gebrauch machen. Nach (e) ist, da $1-\left(\sqrt{\frac{3x}{5-3x}}\right)^2 = 1-\frac{3x}{5-3x} = \frac{5-6x}{5-3x}$ nicht immer positiv:

$$2\, arc\left(tg=\sqrt{\frac{3x}{5-3x}}\right) = arc\left(tg=\frac{2\sqrt{\frac{3x}{5-3x}}}{1-\frac{3x}{5-3x}}\right) = arc\left(tg=\frac{2\sqrt{3x(5-3x)}}{5-6x}\right),$$

wozu noch $+\pi$ kommt, wenn $5-6x<0$ ist. Also ist auch

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{5x-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\, arc\left(tg=\frac{2\sqrt{3x(5-3x)}}{5-6x}\right)+C \text{ oder}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\, arc\left(tg=\frac{2\sqrt{3x(5-3x)}}{5-6x}\right)+\frac{\pi}{\sqrt{3}}+C.$$

Da aber $\frac{\pi}{\sqrt{3}}+C$ eben auch eine Konstante ist, so genügt das erste vollständig. Da nach (h)

$$arc\left(tg=\frac{2\sqrt{3x(5-3x)}}{5-6x}\right) = \pm\frac{\pi}{2} - arc\left(tg=\frac{5-6x}{2\sqrt{3x(5-3x)}}\right)$$

$$= \pm\frac{\pi}{2} + arc\left(tg=\frac{6x-5}{2\sqrt{3x(5-3x)}}\right),$$

so ist auch $\int\frac{\partial x}{\sqrt{5x-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\, arc\left(tg=\frac{6x-5}{2\sqrt{3x(5-3x)}}\right)+C$, wenn $\pm\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}$ als konstant unter C begriffen wird.

Aus (f) folgt ferner

$$arc\left(tg=\sqrt{\frac{3x}{5-3x}}\right) = arc\left(sin=\frac{\sqrt{\frac{3x}{5-3x}}}{\sqrt{1+\frac{3x}{5-3x}}}\right) = arc\left(sin=\sqrt{\frac{3x}{5}}\right),$$

so dass auch $$\int\frac{\partial x}{\sqrt{5x-3x^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\, arc\left(sin=\sqrt{\frac{3x}{5}}\right)+C.$$

Endlich gibt dieselbe Formel:

$$arc\left(tg=\frac{6x-5}{2\sqrt{3x(5-3x)}}\right) = arc\left(sin=\frac{\frac{6x-5}{2\sqrt{3x(5-3x)}}}{\sqrt{1+\frac{(6x-5)^2}{4.3x(5-3x)}}}\right) = arc\left(sin=\frac{6x-5}{5}\right),$$

so dass auch $\int\frac{\partial x}{\sqrt{5x-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\, arc\left(sin=\frac{6x-5}{5}\right)+C.$

VI. Wir bemerken schliesslich wiederholt (§. 26, V), dass zwei Resultate

$$\int f(x)\,\partial x = F(x),\ \int f(x)\,\partial x = F_1(x)$$

als gleichwerthig (d. h. gleich richtig) anzusehen sind, wenn die Differenz $F(x)-F_1(x)$ eine konstante Grösse ist. Findet man also

Digitized by Google

$$\int f(x)\,\partial x = F(x) + a,$$

wo a eine bestimmte Zahl ist, so kann man a füglich weglassen und statt allgemein

$$\int f(x)\,\partial x = F(x) + a + C \text{ bloss setzen: } \int f(x)\,\partial x = F(x) + C.$$

Man pflegt dann zu sagen, es sey a mit der willkürlichen Konstanten zusammengezogen.

Beispiele zur Uebung werden wir nunmehr selten vorlegen, da die Integraltafeln deren in Menge liefern, und man des Gebrauchs wegen doch anrathen muss, sich solche zu verschaffen. Man besitzt in der deutschen Literatur Integraltafeln von Meier Hirsch, Sohncke, Schubert, Minding u. s. w. Für uns genügt es nun, die Formeln aufzustellen, und an einigen Beispielen zu zeigen, wie sie zu gebrauchen sind.

§. 33.

Binomische Integrale.

I. Bereits in §. 27 haben wir mehrfach Gelegenheit gehabt, so genannte Reduktionsformeln zu entwickeln, vermittelst welcher ein Integral auf ein anderes ähnlicher Art zurückgeführt wird; diese Reduktionsformeln spielen überhaupt in der Integralrechnung eine wichtige Rolle und wir werden nun vielfach Gelegenheit haben, solche zu bilden. Zunächst soll diess der Fall seyn für das Integral

$$\int x^m (a x^n + b)^r \partial x,$$

welches man ein „binomisches" zu nennen pflegt. Setzt man in der Formel (7) des §. 27:

$$y = (a x^n + b)^r, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = x^m \text{ also } \frac{\partial y}{\partial x} = a n r (a x^n + b)^{r-1} x^{n-1}, \quad z = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

so ist

$$\int x^m (a x^n + b)^r \partial x = \frac{x^{m+1} (a x^n + b)^r}{m+1} - \frac{a n r}{m+1} \int x^{m+n} (a x^n + b)^{r-1} \partial x. \tag{a}$$

Beachtet man dass $x^{m+n} = x^m x^n = x^m \left[\frac{a x^n + b}{a} - \frac{b}{a}\right]$, so ist

$$\int x^{m+n} (a x^n + b)^{r-1} \partial x = \int \left[x^m \frac{(a x^n + b)}{a} (a x^n + b)^{r-1} - \frac{b}{a} x^m (a x^n + b)^{r-1}\right] \partial x$$
$$= \frac{1}{a} \int x^m (a x^n + b)^r \partial x - \frac{b}{a} \int x^m (a x^n + b)^{r-1} \partial x,$$

also in (a):

$$\int x^m (a x^n + b)^r \partial x = \frac{x^{m+1} (a x^n + b)^r}{m+1} - \frac{n r}{m+1} \int x^m (a x^n + b)^r \partial x + \frac{n r b}{m+1} \int x^m (a x^n + b)^{r-1} \partial x,$$

woraus

$$\left(1 + \frac{n r}{m+1}\right) \int x^m (a x^n + b)^r \partial x = \frac{x^{m+1} (a x^n + b)^r}{m+1} + \frac{n r b}{m+1} \int x^m (a x^n + b)^{r-1} \partial x,$$

Digitized by Google

mithin da $1+\frac{nr}{m+1}=\frac{m+nr+1}{m+1}$, so ist, wenn man beiderseitig durch diese Grösse dividirt:

$$\int x^m(ax^n+b)^r\,\partial x=\frac{x^{m+1}(ax^n+b)^r}{m+nr+1}+\frac{nrb}{m+nr+1}\int x^m(ax^n+b)^{r-1}\,\partial x. \quad \text{(b)}$$

Setzt man $r+1$ an die Stelle von r, was man, da r beliebig ist, sicherlich kann, so erhält man:

$$\int x^m(ax^n+b)^{r+1}\,\partial x=\frac{x^{m+1}(ax^n+b)^{r+1}}{m+nr+n+1}+\frac{nb(r+1)}{m+nr+n+1}\int x^m(ax^n+b)^r\,\partial x,$$

woraus unmittelbar folgt:

$$\int x^m(ax^n+b)^r\,\partial x=-\frac{x^{m+1}(ax^n+b)^{r+1}}{nb(r+1)}+\frac{m+nr+n+1}{nb(r+1)}\int x^m(ax^n+b)^{r+1}\,\partial x. \quad \text{(c)}$$

Setzt man in der Formel (a) an die Stelle von m und r: $m-n$ und $r+1$, so hat man:

$$\int x^{m-n}(ax^n+b)^{r+1}\,\partial x=\frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{r+1}}{m-n+1}-\frac{an(r+1)}{m-n+1}\int x^m(ax^n+b)^r\,\partial x,$$

woraus

$$\int x^m(ax^n+b)^r\,\partial x=\frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{r+1}}{an(r+1)}-\frac{m-n+1}{an(r+1)}\int x^{m-n}(ax^n+b)^{r+1}\,\partial x. \quad \text{(d)}$$

Da nun $x^{m-n}(ax^n+b)^{r+1}=x^{m-n}(ax^n+b)(ax^n+b)^r=ax^m(ax^n+b)^r+bx^{m-n}(ax^n+b)^r$, so ist

$$\int x^m(ax^n+b)^r\,\partial x=\frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{r+1}}{an(r+1)}-\frac{m-n+1}{n(r+1)}\int x^m(ax^n+b)^r\,\partial x-\frac{b(m-n+1)}{an(r+1)}\times \int x^{m-n}(ax^n+b)^r\,\partial x,$$

woraus folgt

$$\left(1+\frac{m-n+1}{n(r+1)}\right)\int x^m(ax^n+b)^r\,\partial x=\frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{r+1}}{an(r+1)}-\frac{b(m-n+1)}{an(r+1)}\times \int x^{m-n}(ax^n+b)^r\,\partial x,$$

und da $1+\frac{m-n+1}{n(r+1)}=\frac{m+nr+1}{n(r+1)}$, so folgt hieraus

$$\int x^m(ax^n+b)^r\,\partial x=\frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{r+1}}{a(m+nr+1)}-\frac{b(m-n+1)}{a(m+nr+1)}\int x^{m-n}(ax^n+b)^r\,\partial x. \quad \text{(e)}$$

Setzt man in der Formel (e) $m+n$ an die Stelle von m, so erhält man

$$\int x^{m+n}(ax^n+b)^r\,\partial x=\frac{x^{m+1}(ax^n+b)^{r+1}}{a(m+n+nr+1)}-\frac{b(m+1)}{a(m+n+nr+1)}\int x^m(ax^n+b)^r\,\partial x,$$

woraus dann folgt

$$\int x^m(ax^n+b)^r\,\partial x=\frac{x^{m+1}(ax^n+b)^{r+1}}{b(m+1)}-\frac{a(m+nr+n+1)}{b(m+1)}\int x^{m+n}(ax^n+b)^r\,\partial x. \quad \text{(f)}$$

Die sechs Formeln (a) — (f) sind nun die gesuchten Reduktionsformeln. Sie haben die Eigenschaft:

Digitized by Google

die erste: m zu erhöhen, r zu erniedrigen,
„ zweite: m nicht zu ändern, r zu erniedrigen:
„ dritte: m nicht zu ändern, r zu erhöhen,
„ vierte: m zu erniedrigen, r zu erhöhen,
„ fünfte: m zu erniedrigen, r nicht zu ändern,
„ sechste: m zu erhöhen, r nicht zu ändern.

Man wird leicht einsehen, dass dieselben in allen Fällen, m und r mögen positiv oder negativ seyn, genügen, um das vorgelegte Integral auf ein einfacheres derselben Art zu reduziren.

II. Die obigen Reduktionsformeln sind nicht anwendbar, wenn:

$$m+1=0,\ m+nr+1=0,\ r+1=0,$$

da in diesen Fällen die Nenner zu 0 werden. Diese drei Fälle müssen also besonders erledigt werden.

1) Sey $m+1=0$, also $m=-1$, so ist das vorgelegte Integral

$$\int\frac{(ax^n+b)^r\,\partial x}{x}.$$

Ist nun r eine ganze (positive oder negative) Zahl, so gehört das Integral zu den in §. 29 näher betrachteten; sey also r allgemeiner ein Bruch $=\frac{\beta}{\alpha}$, so dass das vorgelegte Integral gleich

$$\int\frac{(ax^n+b)^{\frac{\beta}{\alpha}}\,\partial x}{x}$$

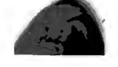
ist. Man setze nun $ax^n+b=z^\alpha$, also $x=\left(\frac{z^\alpha-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$, $\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{n}\left(\frac{z^\alpha-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1}$ $\frac{\alpha z^{\alpha-1}}{a}=\frac{\alpha}{na}z^{\alpha-1}\left(\frac{z^\alpha-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1}$, $(ax^n+b)^{\frac{\beta}{\alpha}}=z^\beta$, so ist (§. 28):

$$\int\frac{(ax^n+b)^{\frac{\beta}{\alpha}}\,\partial x}{x}=\frac{\alpha}{na}\int\frac{z^\beta\,z^{\alpha-1}\left(\frac{z^\alpha-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1}}{\left(\frac{z^\alpha-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}\partial z=\frac{\alpha}{na}\int\frac{z^{\alpha+\beta-1}}{\frac{z^\alpha-b}{a}}\partial z=$$

$$\frac{\alpha}{n}\int\frac{z^{\alpha+\beta-1}\,\partial z}{z^\alpha-b},$$

welches Integral nun wieder zu §. 29 gehört und also nach der dortigen Weise erledigt werden kann, da β und α ganze Zahlen sind. Schliesslich ist dann $z=(ax^n+b)^{\frac{1}{\alpha}}$. Ist r eine ganze Zahl, so sey $\beta=r$, $\alpha=1$, und $ax^n+b=z$, wodurch dann

$$\int\frac{(ax^n+b)^r\,\partial x}{x}=\frac{1}{n}\int\frac{z^r\,\partial z}{z-b}.$$



Digitized by Google

2) Sey $r+1=0$, $r=-1$, also das vorgelegte Integral

$$\int \frac{x^m \partial x}{a x^n + b},$$

so kann es immer leicht auf die Form des §. 29 gebracht werden. (§. 31, IV.)

3) Sey endlich $m+nr+1=0$, so setze man (§. 28), wenn $r=\frac{\beta}{\alpha}$:

$$a x^n + b = x^n z^\alpha,\ x=\left(\frac{b}{z^\alpha - a}\right)^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{n}} (z^\alpha - a)^{-\frac{1}{n}},\quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\alpha b^{\frac{1}{n}} z^{\alpha-1}}{n} (z^\alpha - a)^{-\frac{1}{n}-1},$$

$$(a x^n + b)^r = x^{nr} z^\beta = \frac{b^r}{(z^\alpha - a)^r} z^\beta,\ x^m = \frac{b^{\frac{m}{n}}}{(z^\alpha - a)^{\frac{m}{n}}},\ \text{also}$$

$$\int x^m (a x^n + b)^{\frac{\beta}{\alpha}} \partial x = -\int \frac{b^{\frac{m}{n}}}{(z^\alpha - a)^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{b^r}{(z^\alpha - a)^r} z^\beta \cdot \frac{\alpha b^{\frac{1}{n}}}{n} z^{\alpha-1} (z^\alpha - a)^{-\frac{1}{n}-1} \partial z =$$

$$-\frac{\alpha}{n} b^{\frac{m+1}{n}+r} \int z^{\alpha+\beta-1} (z^\alpha - a)^{-\left(\frac{m+1}{n}+1+r\right)} \partial z.$$

Da aber $m+nr+1=0$, so ist $\frac{m+1}{n}+r=0$, $\frac{m+1}{n}+1+r=1$, also

$$\int x^m (a x^n + b)^{\frac{\beta}{\alpha}} \partial x = -\frac{\alpha}{n} \int \frac{z^{\alpha+\beta-1}}{z^\alpha - a} \partial z,$$

welch letzteres Integral direkt zu denen in §. 29 gehört. Schliesslich ist $z=\left(\frac{a x^n + b}{x^n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Für ein ganzes r ist $\beta=r$, $\alpha=1$, also

$$\int x^m (a x^n + b)^r \partial x = -\frac{1}{n} \int \frac{z^r \partial z}{z-a},\ z=\frac{a x^n + b}{x^n}.$$

III. Einige Beispiele mögen das Verfahren erläutern.

1) Sey $\int \frac{x^5 \partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ zu bestimmen. Hier ist $m=5$, $r=-\frac{1}{2}$, $n=2$, $a=-1$, $b=a^2$, und also, wenn man m erniedrigen will, nach Formel (e):

$$\int \frac{x^5 \partial x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^4 (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{5} + \frac{4 a^2}{5} \int \frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}} \partial x.$$

Auf das letzte Integral wendet man dieselbe Formel an, in der $m=3$ ist, und hat

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}} \partial x = -\frac{x^2 (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{3} + \frac{2 a^2}{3} \int \frac{x \partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Das jetzt noch vorkommende Integral ist bereits in §. 28, IV bestimmt, gleich $-\sqrt{a^2-x^2}$, so dass

Digitized by Google

$$\int \frac{x^5 \partial x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}\left[\frac{x^4}{5}+\frac{4a^2x^2}{15}+\frac{8a^4}{15}\right]+C.$$

2. Um $\int \frac{\partial x}{x^5\sqrt{a^2-x^2}}$ zu ermitteln, wird man die Formel (f) anwenden und finden:

$$\int \frac{\partial x}{x^5\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^{-4}(a^2-x)^{\frac{1}{2}}}{4a^2}+\frac{3}{4a^2}\int \frac{\partial x}{x^3\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^{-2}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2a^2}+\frac{1}{2a^2}\int \frac{\partial x}{x\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Um das letzte zu bestimmen, sey $\sqrt{a^2-x^2}=z$, $a^2-x^2=z^2$, $x^2=a^2-z^2$, $x\frac{\partial x}{\partial z}=-z$, $\frac{1}{x}\frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{z}{x^2}=\frac{-z}{a^2-z^2}$, also

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{1}{x}\frac{\partial x}{\partial z}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\partial z = \int \frac{-z}{a^2-z^2}\cdot\frac{1}{z}\partial z = \int \frac{\partial z}{z^2-a^2} = -\frac{1}{2a}\int\frac{\partial z}{a+z}$$

$$+\frac{1}{2a}\int\frac{\partial z}{z-a} = \frac{1}{2a}l(z-a)-\frac{1}{2a}l(z+a) = \frac{1}{2a}l\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2}-a}{\sqrt{a^2-x^2}+a}\right),$$

und also

$$\int \frac{\partial x}{x^5\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{4a^2}\left[\frac{1}{x^4}+\frac{3}{2a^2x^2}\right]+\frac{3}{16a^5}l\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2}-a}{\sqrt{a^2-x^2}+a}\right)+C.$$

3) Man soll $\int \frac{x^8 \partial x}{(2x^3+3)^5}$ ermitteln. Nach Formel (c), worin $m=8$, $n=3$, $r=-5$, $a=2$, $b=3$:

$$\int \frac{x^8 \partial x}{(2x^3+3)^5} = \frac{x^9(2x^3+3)^{-4}}{36}+\frac{1}{12}\int\frac{x^8\partial x}{(2x^3+3)^4},$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{(2x^3+3)^4} = \frac{x^9(2x^3+3)^{-3}}{27}, \quad (m=8,\ n=3,\ r=-4,\ a=2,\ b=3,\ m+nr+n+1=0),$$

also
$$\int \frac{x^8 \partial x}{(2x^3+3)^5} = \frac{x^9}{9(2x^3+3)^4}\left[\frac{1}{4}+\frac{2x^3+3}{36}\right]+C.$$

4) Man soll $\int \frac{x^3 \partial x}{\sqrt{1+x^8}}$ bestimmen. Hier ist $m=3$, $n=8$, $r=-\frac{1}{2}$, also $m+nr+1=0$, so dass nach II, 3:

$1+x^8=x^8z^2$, $x^8=\frac{1}{z^2-1}$, $x=\frac{1}{(z^2-1)^{\frac{1}{8}}}=(z^2-1)^{-\frac{1}{8}}$, $\frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{1}{4}z(z^2-1)^{-\frac{9}{8}}$, $\sqrt{1+x^8}$

$=x^4z=\frac{z}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$, $\int\frac{x^3\partial x}{\sqrt{1+x^8}}=-\frac{1}{4}\int\frac{(z^2-1)^{-\frac{3}{8}}(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{z}(z^2-1)^{-\frac{9}{8}}z\,\partial z=-\frac{1}{4}\int\frac{\partial z}{z^2-1}$,

und da (§. 29):

$$\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{2(z-1)}-\frac{1}{2(z+1)},$$

so ist

$$\int\frac{x^3\partial x}{\sqrt{1+x^8}} = -\frac{1}{8}l(z-1)+\frac{1}{8}l(z+1)+C = \frac{1}{8}l\left(\frac{z+1}{z-1}\right)+C = \frac{1}{8}l\left(\frac{\sqrt{1+x^8}+x^4}{\sqrt{1+x^8}-x^4}\right)$$
$$+C,$$

Digitized by Google

und da

$$\frac{\sqrt{1+x^8}+x^4}{\sqrt{1+x^8}-x^4} = (\sqrt{1+x^8}+x^4)^2,$$

so ist auch

$$\int \frac{x^3 \partial x}{\sqrt{1+x^8}} = \frac{1}{4} l(x^4 + \sqrt{1+x^8}) + C.$$

IV. Auf die hier betrachtete Integralform kommt zunächst das Integral

$$\int (ax+b)^m (a'x+b')^r \partial x$$

zurück. Setzt man nämlich $ax + b = z$, $x = \frac{z-b}{a}$, $\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{a}$, so ist

$$\int (ax+b)^m (a'x+b')^r \partial x = \frac{1}{a}\int z^m \left(\frac{a'z}{a} + b' - \frac{ba'}{a}\right)^r \partial z,$$

welches Integral zu der in diesem §. betrachteten Gattung gehört.

Dessgleichen lässt sich das Integral

$$\int (a+bx+cx^2)^r \partial x$$

auf dieselbe Form reduziren. Da nämlich

$$a+bx+cx^2 = c\left[x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c}\right] = c\left[\left(x+\frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4c^2}\right],$$

so setze man

$$x + \frac{b}{2c} = z, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = 1, \quad x = z - \frac{b}{2c},$$

und hat

$$\int (a+bx+cx^2)^r \partial x = c^r \int \left(z^2 + \frac{4ac-b^2}{4c^2}\right)^r \partial z,$$

welches Integral zu den oben betrachteten $(m = 0)$ gehört.

Reduktionsformeln für $\int x^m (a+bx+cx^2)^r \partial x$.

V. Für das Integral

$$\int x^m (a+bx+cx^2)^r \partial x$$

lässt sich direkt eine Rekursionsformel entwickeln. Setzt man in der Formel (7) des §. 27:

$$y = (a+bx+cx^2)^r, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = x^m, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = r(a+bx+cx^2)^{r-1}(b+2cx), \quad z = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

so ist

$$\int x^m (a+bx+cx^2)^r \partial x = \frac{x^{m+1}(a+bx+cx^2)^r}{m+1} - \frac{rb}{m+1}\int x^{m+1}(a+bx+cx^2)^{r-1}\partial x$$
$$- \frac{2cr}{m+1}\int x^{m+2}(a+bx+cx^2)^{r-1}\partial x, \qquad \text{(g)}$$

vermöge welcher Formel das vorgelegte Integral auf zwei andere derselben Art zurückgeführt ist. Setzt man zur Abkürzung $a + bx + cx^2 = X$; ferner $r + 1$ für r, $m - 2$ für m, so folgt aus (g):

Digitized by Google

$$\int x^{m-2} X^{r+1} \partial x = \frac{x^{m-1} X^{r+1}}{m-1} - \frac{(r+1)b}{m-1} \int x^{m-1} X^r \partial x - \frac{2c(r+1)}{m-1} \int x^m X^r \partial x,$$

und da

$$\int x^{m-2} X^{r+1} \partial x = \int x^{m-2} X^r (a+bx+cx^2) \partial x = a \int x^{m-2} X^r \partial x + b \int x^{m-1} X^r \partial x + c \int x^m X^r \partial x,$$

so ergibt sich aus vorstehender Gleichung leicht:

$$\int x^m X^r \partial x = \frac{x^{m-1} X^{r+1}}{(m+2r+1)c} - \frac{b(m+r)}{c(m+2r+1)} \int x^{m-1} X^r \partial x - \frac{a(m-1)}{c(m+2r+1)} \int x^{m-2} X^r \partial x. \quad \text{(h)}$$

Setzt man hier $m+2$ für m, so zieht man auch daraus:

$$\int x^m X^r \partial x = \frac{x^{m+1} X^{r+1}}{(m+1)a} - \frac{b(m+r+2)}{a(m+1)} \int x^{m+1} X^r \partial x - \frac{c(m+2r+3)}{a(m+1)} \int x^{m+2} X^r \partial x. \quad \text{(i)}$$

Ist m eine positive ganze Zahl, so kommt nach (h) das Integral $\int x^m X^r \partial x$ schliesslich auf $\int x X^r \partial x$ und $\int X^r \partial x$ zurück; ist m eine negative ganze Zahl dagegen auf $\int \frac{X^r}{x} \partial x$ und $\int X^r \partial x$. Von diesen Integralen ist $\int X^r \partial x$ bereits in IV. erledigt. Ferner aus (h) für $m = 1$:

$$\int x X^r \partial x = \frac{X^{r+1}}{2(r+1)c} - \frac{b(r+1)}{2c(r+1)} \int X^r \partial x = \frac{X^{r+1}}{2(r+1)c} - \frac{b}{2c} \int X^r \partial x, \quad \text{(k)}$$

so dass auch dieses Integral als erledigt anzusehen ist.

Weiter ist

$$\int \frac{X^r}{x} \partial x = \int \frac{X^{r-1}(a+bx+cx^2)}{x} \partial x = a \int \frac{X^{r-1}}{x} \partial x + b \int X^{r-1} \partial x + c \int x X^{r-1} \partial x,$$

oder da

$$\int x X^{r-1} \partial x = \frac{X^r}{2rc} - \frac{b}{2c} \int X^{r-1} \partial x:$$

$$\int \frac{X^r}{x} \partial x = \frac{X^r}{2r} + a \int \frac{X^{r-1}}{x} \partial x + \frac{b}{2} \int X^{r-1} \partial x, \quad \text{(l)}$$

vermöge welcher Formel das zu erledigende Integral auf ein anderes derselben Art zurückgeführt ist. Setzt man in (l) $-r+1$ für r, so erhält man:

$$\int \frac{\partial x}{x X^{r-1}} = \frac{-1}{2(r-1) X^{r-1}} + a \int \frac{\partial x}{x X^r} + \frac{b}{2} \int \frac{\partial x}{X^r},$$

$$\int \frac{\partial x}{x X^r} = \frac{1}{2(r-1) a X^{r-1}} - \frac{b}{2a} \int \frac{\partial x}{X^r} + \frac{1}{a} \int \frac{\partial x}{x X^{r-1}}. \quad \text{(m)}$$

Diese Formeln genügen, um die sämmtlichen Integrale der angegebenen Art zu reduziren. (Vergleiche auch §. 37, III.)

Digitized by Google

§. 34.

Trigonometrische Integrale.

I. Das Integral

$$\int sin^m x \, cos^n x \, \partial x$$

lässt sich leicht auf die Form in §. 33 reduziren, wenn man setzt $cos\, x = z$; doch ist es besser, die Reduktionsformeln für dasselbe unmittelbar abzuleiten. Setzt man in der Formel (7) des §. 27:

$$y = sin^{m-1} x, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = cos^n x \, sin\, x, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = (m-1) \, sin^{m-2} x \, cos\, x, \quad z = -\frac{cos^{n+1} x}{n+1},$$

so ist

$$\int sin^m x \, cos^n x \, \partial x = -\frac{sin^{m-1} x \, cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int sin^{m-2} x \, cos^{n+2} x \, \partial x. \quad \text{(a)}$$

Beachtet man, dass $sin^{m-2} x \, cos^{n+2} x = sin^{m-2} x \, cos^n x \, cos^2 x = sin^{m-2} x \, cos^n x \, (1 - sin^2 x) = sin^{m-2} x \, cos^n x - sin^m x \, cos^n x$, so gibt die Gleichung (a):

$$\int sin^m x \, cos^n x \, \partial x = -\frac{sin^{m-1} x \, cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int sin^{m-2} x \, cos^n x \, \partial x - \frac{m-1}{n+1} \int sin^m x \, cos^n \partial x,$$

woraus sich ergibt:

$$\int sin^m x \, cos^n x \, \partial x = -\frac{sin^{m-1} x \, cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int sin^{m-2} x \, cos^n x \, \partial x. \quad \text{(b)}$$

Setzt man hier $m+2$ an die Stelle von m, so ergibt sich leicht:

$$\int sin^m x \, cos^n x \, \partial x = \frac{sin^{m+1} x \, cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int sin^{m+2} x \, cos^n x \, \partial x. \quad \text{(c)}$$

Hätte man anfänglich gesetzt $y = cos^{n-1} x$, $\frac{\partial z}{\partial x} = sin^m x \, cos\, x$, $\frac{\partial y}{\partial x} = -(n-1) \, cos^{n-2} x \, sin\, x$, $z = \frac{sin^{m+1} x}{m+1}$, so hätte man:

$$\int sin^m x \, cos^n x \, \partial x = \frac{sin^{m+1} x \, cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int sin^{m+2} x \, cos^{n-2} x \, \partial x, \quad \text{(d)}$$

woraus, da $sin^{m+2} x \, cos^{n-2} x = sin^m x \, (1 - cos^2 x) \, cos^{n-2} x = sin^m x \, cos^{n-2} x - sin^m x \, cos^n x$, folgt:

$$\int sin^m x \, cos^n x \, \partial x = \frac{sin^{m+1} x \, cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int sin^m x \, cos^{n-2} x \, \partial x, \quad \text{(e)}$$

und endlich, wenn man $n+2$ statt n setzt:

$$\int sin^m x \, cos^n x \, \partial x = -\frac{sin^{m+1} x \, cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int sin^m x \, cos^{n+2} x \, \partial x. \quad \text{(f)}$$

II. Für den Fall, dass m und n ganze (positive oder negative) Zahlen sind, führen diese Formeln schliesslich auf:

$$\int \partial x, \int cos\, x \, \partial x, \int sin\, x \, \partial x, \int \frac{sin\, x}{cos\, x} \partial x, \int \frac{cos\, x \, \partial x}{sin\, x}, \int \frac{\partial x}{sin\, x}, \int \frac{\partial x}{cos\, x}, \int \frac{\partial x}{sin\, x \, cos\, x}.$$

Digitized by Google

Aber $\int \partial x = x$, $\int cos x \partial x = sin x$, $\int sin x \partial x = -cos x$ (§. 26, V), $\int \frac{sin x}{cos x} \partial x = -l(cos x)$, $\int \frac{cos x \partial x}{sin x} = l(sin x)$ (§. 28, III), so dass bloss die letzten drei Integrale zu bestimmen bleiben. Nun ist

$$\int \frac{\partial x}{sin x\, cos x} = \int \frac{\partial x}{tg\, x\, cos^2 x} = \int \frac{\partial z}{z} (z = tg\, x) = l(z) = l(tg\, x);$$

also

$$\int \frac{\partial x}{sin x} = \frac{1}{2} \int \frac{\partial x}{sin \frac{x}{2} cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\partial z}{sin z\, cos z} \left(\frac{x}{2} = z\right) = l(tg\, z) = l\left(tg \frac{x}{2}\right).$$

$$\int \frac{\partial x}{cos x} = -\int \frac{\partial z}{sin z} \left(x = \frac{\pi}{2} - z\right) = -l(tg \frac{1}{2} z) = -l\, tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} x\right) = l\, tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} x\right)$$

da $tg\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} x\right) = cotg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} x\right)$ und $l\; cotg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} x\right) = -l\, tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

III. Die Integrale $\int tg^m x \partial x$, $\int cotg^n \partial x$ können gleichfalls nach diesen Formeln reduzirt werden.

Aus (a) oder (d) nämlich folgt (für $n = -m$, oder $m = -n$):

$$\int tg^m x \partial x = \frac{tg^{m-1} x}{m-1} - \int tg^{m-2} x \partial x,$$

$$\int cotg^n x \partial x = \frac{-cotg^{n-1} x}{n-1} - \int cotg^{n-2} x \partial x.$$

Wenn man will, so können als besonders zu benützende Formeln aufgestellt werden:

$$\int sin^m x \partial x = -\frac{sin^{m-1} x\, cos x}{m} + \frac{m-1}{m} \int sin^{m-2} x \partial x,$$

$$\int sin^m x \partial x = \frac{sin^{m+1} x\, cos x}{m+1} + \frac{m+2}{m+1} \int sin^{m+2} x \partial x,$$

$$\int cos^n x \partial x = \frac{sin x\, cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int cos^{n-2} x \partial x,$$

$$\int cos^n x \partial x = -\frac{sin x\, cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{n+2}{n+1} \int cos^{n+2} x \partial x.$$

Beispiele hiezu liefern die Integraltafeln in Menge.

§. 35.

Transzendente Integrale.

I. Die Integrale der Form

$$\int f[l(x)] \frac{\partial x}{x}, \quad \int f(e^x) e^x \partial x, \quad \int f(cos x) sin x \partial x, \quad \int f(sin x) cos x \partial x, \ldots$$

wo f ein beliebiges Funktionszeichen, kommen auf $\int f(z) \partial z$ zurück, wenn

Digitized by Google

man setzt $z = l(x)$, e^x, $\cos x$, $\sin x$, ...; das Integral $\int f(e^x)\,\partial x$ wird für $e^x = z$, $x = l(z)$, $\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{z}$, zu $\int \frac{f(z)\,\partial z}{z}$ u. s. w.

II. Gesetzt ferner, es sey P eine Funktion von x, so dass man $\int P\,\partial x$ nach den bisherigen Methoden ermitteln könne, und sey $\int P\,\partial x = Q$; ferner z eine Funktion von x, so dass, wenn man

$$\int Q \frac{\partial z}{\partial x}\partial x = R, \int R \frac{\partial z}{\partial x}\partial x = S, \ldots,$$

setzt, R, S, ... bekannte Funktionen von x sind, so ist nach §. 27:

$$\int P z^n \partial x = Q z^n - n\int Q z^{n-1}\frac{\partial z}{\partial x}\partial x,$$

$$\int Q z^{n-1}\frac{\partial z}{\partial x}\partial x = R z^{n-1} - (n-1)\int R z^{n-2}\frac{\partial z}{\partial x}\partial x,$$

$$\int R z^{n-2}\frac{\partial z}{\partial x}\partial x = S z^{n-2} - (n-2)\int S z^{n-3}\frac{\partial z}{\partial x}\partial x,$$

$$\vdots$$

also $\int P z^n dx$ bestimmbar.

Sey z B. $P = 1$, $z = l(x)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x}$, so ist

$$Q = x,\ R = x,\ S = x, \ldots,$$

also

$$\int l(x)^n \partial x = x[l(x)^n - n\,l(x)^{n-1} + n(n-1)\,l(x)^{n-2} - \ldots \pm n(n-1)\ldots 2\,l(x) \pm n(n-1)\ldots 1] \text{ (§. 27, I).}$$

Sey weiter $P = 1$, $z = arc(\sin = x)$, also $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int P\,\partial x = x = Q$, $R = \int \frac{x\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$, $S = -\int \partial x = -x$, $T = \sqrt{1-x^2}$, ..., also

$$\int [arc(\sin = x)]^n \partial x = x\,arc(\sin = x)^n - n\int Q\frac{\partial z}{\partial x}z^{n-1}\partial x,$$

$$\int Q\frac{\partial z}{\partial x}z^{n-1}\partial x = -\sqrt{1-x^2}\,arc(\sin = x)^{n-1} - (n-1)\int R z^{n-2}\frac{\partial z}{\partial x}\partial x, \ldots$$

also endlich

$$\int arc(\sin = x)^n \partial x = arc(\sin = x)^n\left[x + \frac{n\sqrt{1-x^2}}{arc(\sin = x)} - \frac{n(n-1)x}{arc(\sin = x)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{arc(\sin = x)^3} + \ldots\right] + C.$$

III. Setzt man in der Formel (7) des §. 27: $y = e^{ax}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos bx$ oder $\sin bx$, also $\frac{\partial y}{\partial x} = a e^{ax}$, $z = \frac{\sin bx}{b}$ oder $-\frac{\cos bx}{b}$, so ist

Digitized by Google

$$\int e^{ax} \cos bx \, \partial x = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, \partial x,$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, \partial x = -\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, \partial x.$$

Setzt man in jede dieser Gleichungen auf der zweiten Seite den Werth des betreffenden Integrals aus der andern, so hat man:

$$\int e^{ax} \cos bx \, \partial x = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} + \frac{a e^{ax} \cos bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx \, \partial x,$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, \partial x = -\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{a e^{ax} \sin bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \sin bx \, \partial x,$$

woraus ganz unmittelbar folgt:

$$\int e^{ax} \cos bx \, \partial x = \frac{e^{ax} (b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + C,$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, \partial x = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

IV. Für die Integrale $\int e^{ax} \sin^n x \, \partial x$, $\int e^{ax} \cos^n x \, \partial x$ ergeben sich ebenfalls leicht Reduktionsformeln.

Setzt man nämlich $y = \sin^n x$, $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{ax}$, $\frac{\partial y}{\partial x} = n \sin^{n-1} x \cos x$, $z = \frac{e^{ax}}{a}$, so ist

$$\int e^{ax} \sin^n x \, \partial x = \frac{e^{ax} \sin^n x}{a} - \frac{n}{a} \int \sin^{n-1} x \cos x \, e^{ax} \, \partial x,$$

und wenn $y = \sin^{n-1} x \cos x$, $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{ax}$, $\frac{\partial y}{\partial x} = (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x - \sin^n x$ $= (n-1) \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) - \sin^n x = (n-1) \sin^{n-2} x - n \sin^n x$, $z = \frac{e^{ax}}{a}$:

$$\int e^{ax} \sin^{n-1} x \cos x \, \partial x = \frac{e^{ax} \sin^{n-1} x \cos x}{a} - \frac{n-1}{a} \int e^{ax} \sin^{n-2} x \, \partial x + \frac{n}{a} \int e^{ax} \sin^n x \, \partial x,$$

also:

$$\int e^{ax} \sin^n x \, \partial x = \frac{e^{ax} \sin^{n-1} x}{a^2} (a \sin x - n \cos x) + \frac{n(n-1)}{a^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} x \, \partial x - \frac{n^2}{a^2} \int e^{ax} \sin^n x \, \partial x,$$

woraus

$$\int e^{ax} \sin^n x \, \partial x = \frac{e^{ax} \sin^{n-1} x (a \sin x - n \cos x)}{a^2 + n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} x \, \partial x.$$

Eben so

$$\int e^{ax} \cos^n x \, \partial x = \frac{e^{ax} \cos^{n-1} x (a \cos x + n \sin x)}{a^2 + n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} x \, \partial x.$$

Für positive ganze n führen diese Formeln schliesslich auf $\int e^{ax} \cos x \, \partial x$, $\int e^{ax} \sin x \, \partial x$, $\int e^{ax} \partial x$. Das letzte Integral ist $\frac{e^{ax}}{a}$, die zwei ersten ergeben sich durch die Formeln für $n = 1$:



Digitized by Google

$$\int e^{ax} \sin x\,\partial x = \frac{e^{ax}(a \sin x - \cos x)}{a^2+1} + C,$$

$$\int e^{ax} \cos x\,\partial x = \frac{e^{ax}(a \cos x + \sin x)}{a^2+1} + C. \quad \text{(Nr. III.)}$$

Die Integrale $\int e^{ax} \sin^n bx\,\partial x$, $\int e^{ax} \cos^n bx\,\partial x$ werden, wenn $bx = z$, $\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{b}$ zu:

$$\frac{1}{b}\int e^{\frac{a}{b}z} \sin^n z\,\partial z,\ \frac{1}{b}\int e^{\frac{a}{b}z} \cos^n z\,\partial z$$

und haben obige Form wieder. Setzt man oben $-n+2$ für n, so hat man:

$$\int \frac{e^{ax}\,\partial x}{\sin^{n-2} x} = \frac{e^{ax}[a \sin x + (n-2)\cos x]}{\sin^{n-1} x\,[a^2+(n-2)^2]} + \frac{(n-2)(n-1)}{a^2+(n-2)^2}\int \frac{e^{ax}}{\sin^n x}\,\partial x,$$

$$\int \frac{e^{ax}\,\partial x}{\cos^{n-2} x} = \frac{e^{ax}[a \cos x - (n-2)\sin x]}{\cos^{n-1} x\,[a^2+(n-2)^2]} + \frac{(n-2)(n-1)}{a^2+(n-2)^2}\int \frac{e^{ax}}{\cos^n x}\,\partial x,$$

woraus

$$\int \frac{e^{ax}}{\sin^n x}\,\partial x = -\frac{e^{ax}[a \sin x + (n-2)\cos x]}{(n-2)(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{a^2+(n-2)^2}{(n-2)(n-1)}\int \frac{e^{ax}\,\partial x}{\sin^{n-2} x},$$

$$\int \frac{e^{ax}}{\cos^n x}\,\partial x = -\frac{e^{ax}[a \cos x - (n-2)\sin x]}{(n-2)(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{a^2+(n-2)^2}{(n-2)(n-1)}\int \frac{e^{ax}\,\partial x}{\cos^{n-2} x}.$$

Für $n = 2$ und $n = 1$ sind diese Formeln nicht anwendbar.

V. Für die Integrale $\int x^m \sin x\,\partial x$, $\int x^m \cos x\,\partial x$ erhält man eben so

$$\int x^m \sin x\,\partial x = -x^m \cos x + m\int x^{m-1} \cos x\,\partial x,$$

$$\int x^m \cos x\,\partial x = x^m \sin x - m\int x^{m-1} \sin x\,\partial x,$$

wodurch immer eines dieser Integrale auf das andere reduzirt ist, was genügt. Setzt man hier $-m+1$ für m, so zieht man daraus:

$$\int \frac{\cos x}{x^m}\,\partial x = \frac{-\cos x}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{m-1}\int \frac{\sin x\,\partial x}{x^{m-1}},$$

$$\int \frac{\sin x}{x^m}\,\partial x = \frac{-\sin x}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{1}{m-1}\int \frac{\cos x\,\partial x}{x^{m-1}}.$$

Die End-Integrale bei diesen Reduktionsformeln sind:

$$\int \sin x\,\partial x,\ \int \cos x\,\partial x,\ \int \frac{\sin x}{x}\,\partial x,\ \int \frac{\cos x}{x}\,\partial x,$$

von denen die zwei letzten nicht weiter angegeben werden können. (§. 27, V.)

Als Beispiel wollen wir das Integral $\int x^4 \cos x\,\partial x$ wählen. Man hat:

$$\int x^4 \cos x\,\partial x = x^4 \sin x - 4\int x^3 \sin x\,\partial x,\ \int x^3 \sin x\,\partial x = -x^3 \cos x + 3\int x^2 \cos x\,\partial x,$$

$$\int x^2 \cos x\,\partial x = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\,\partial x,$$

Digitized by Google

$$\int x\sin x\,\partial x = -x\cos x + \int \cos x\,\partial x,\quad \int \cos x\,\partial x = \sin x,\ \text{also:}$$

$$\int x^4\cos x\,\partial x = x^4\sin x + 4x^3\cos x - 12x^2\sin x - 24x\cos x + 24\sin x + C.$$

§. 36.

Das Integral $\int \frac{f+g\cos x}{(a+b\cos x)^n}\partial x$.

I. Wir wollen setzen

$$\int \frac{f+g\cos x}{(a+b\cos x)^n}\partial x = \frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}} + \int \frac{B+C\cos x}{(a+b\cos x)^{n-1}}\partial x, \qquad \text{(a)}$$

wo A, B, C noch zu bestimmende Grössen sind. Hieraus folgt durch Differenzirung:

$$\frac{f+g\cos x}{(a+b\cos x)^n} = \frac{A[\cos x(a+b\cos x)+(n-1)b\sin^2 x]}{(a+b\cos x)^n} + \frac{B+C\cos x}{(a+b\cos x)^{n-1}},$$

d. h. wenn man $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ setzt:

$$f+g\cos x = (n-1)bA + Ba + (Aa+Ca+Bb)\cos x + [Ab+Cb-(n-1)Ab]\cos^2 x.$$

Bestimmt man also A, B, C so, dass

$$(n-1)bA + aB = f,\quad aA + aC + bB = g,\quad bC - (n-2)bA = 0,$$

d. h.
$$A = \frac{ag-bf}{(n-1)(a^2-b^2)},\quad B = \frac{af-bg}{a^2-b^2},\quad C = \frac{(n-2)(ag-bf)}{(n-1)(a^2-b^2)}, \qquad \text{(b)}$$

so ist obige Gleichung identisch und die Gleichung (a) folglich richtig. Vermöge derselben ist das Integral erster Seite auf ein ähnliches reduzirt, in welchem nun B und C an die Stelle von f und g treten, womit die Rechnung wieder nach den Formeln (b) zu führen ist.

Die eben angegebene Reduktionsformel ist unbrauchbar, wenn $n=1$, oder $a^2=b^2$, da dann die Formeln (b) nicht benützt werden können. Diese Fälle hat man desshalb unmittelbar zu erledigen.

II. Sey zunächst $a=b$; so ist das vorgelegte Integral

$$\int \frac{f+g\cos x}{a^n(1+\cos x)^n}\partial x = \int \frac{f-g+g(1+\cos x)}{a^n(1+\cos x)^n}\partial x = \frac{f-g}{a^n}\int \frac{\partial x}{(1+\cos x)^n} + \frac{g}{a^n}\int \frac{\partial x}{(1+\cos x)^{n-1}},$$

so dass man diese letzteren Integrale zu bestimmen hat. Man setze $x=2z$, $1+\cos 2z = 2\cos^2 z$, so ist

$$\int \frac{\partial x}{(1+\cos x)^n} = \int \frac{2\partial z}{2^n\cos^{2n} z} = \frac{1}{2^{n-1}}\int \frac{\partial z}{\cos^{2n} z},\quad \int \frac{\partial x}{(1+\cos x)^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}}\int \frac{\partial z}{\cos^{2n-2} z},$$

welche Integrale nach §. 34 erledigt werden können.

Sey weiter $b=-a$, also das Integral

$$\int \frac{f+g\cos x}{a^n(1-\cos x)^n}\partial x = \int \frac{f+g-(1-\cos x)g}{a^n(1-\cos x)^n}\partial x = \frac{f+g}{a^n}\int \frac{\partial x}{(1-\cos x)^n} - \frac{g}{a^n}\int \frac{\partial x}{(1-\cos x)^{n-1}},$$

worin wieder für $x=2z$:

$$\int \frac{\partial x}{(1-\cos x)^n} = \frac{1}{2^{n-1}}\int \frac{\partial z}{\sin^{2n} z},\quad \int \frac{\partial x}{(1-\cos x)^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}}\int \frac{\partial z}{\sin^{2n-2} z}.$$


Digitized by Google

III. Ist $n = 1$, so hat man

$$\int \frac{f + g\cos x}{a + b\cos x} \partial x = f \int \frac{\partial x}{a + b\cos x} + g \int \frac{\cos x\, \partial x}{a + b\cos x}.$$

Da ferner

$$\int \frac{\cos x\, \partial x}{a + b\cos x} = \int \left(\frac{1}{b} - \frac{a}{b(a + b\cos x)} \right) \partial x,$$

so ist

$$\int \frac{f + g\cos x}{a + g\cos x} \partial x = \frac{g x}{b} + \frac{b f - a g}{b} \int \frac{\partial x}{a + b\cos x},$$

so dass bloss das letzte Integral zu bestimmen ist.

Es ist aber

$$a + b\cos x = a\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}\right) + b\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right)$$

$$= (a + b)\cos^2 \frac{x}{2} + (a - b)\sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2}\left[a + b + (a - b)\, tg^2 \frac{x}{2}\right],$$

also

$$\int \frac{\partial x}{a + b\cos x} = \int \frac{1}{a + b + (a - b)\, tg^2 \frac{x}{2}} \frac{\partial x}{\cos^2 \frac{x}{2}}.$$

Man setze nun $tg \frac{x}{2} = z$, also (§. 13) $\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \frac{1}{2} \frac{\partial x}{\partial z} = 1$, $\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \frac{\partial x}{\partial z} = 2$,

so ist (§. 28)

$$\int \frac{\partial x}{a + b\cos x} = \int \frac{1}{a + b + (a - b)\, tg^2 \frac{x}{2}} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \frac{\partial x}{\partial z} \partial z = 2 \int \frac{\partial z}{a + b + (a - b) z^2}.$$

Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden:

1) $a + b$ und $a - b$ sind positiv.

Dazu gehört, dass $a > 0$ und $a^2 > b^2$ sey. * Alsdann hat man

$$\int \frac{\partial z}{a + b + (a - b) z^2} = \frac{1}{a + b} \int \frac{\partial z}{1 + \frac{a - b}{a + b} z^2},$$

so dass, wenn $z \sqrt{\frac{a - b}{a + b}} = u$, erhalten wird:

$$\int \frac{\partial z}{a + b + (a - b) z^2} = \frac{1}{a + b} \int \frac{1}{1 + \frac{a - b}{a + b} z^2} \frac{\partial z}{\partial u} \partial u$$

$$= \frac{1}{a + b} \sqrt{\frac{a + b}{a - b}} \int \frac{\partial u}{1 + u^2} = \frac{1}{a + b} \sqrt{\frac{a + b}{a - b}}\, arc\,(tg = u).$$

---

* Ist b dann positiv, so ist $a > b$, also $a + b$ und $a - b$ sicher positiv; ist b negativ, so ist doch der absolute Werth von b unter a, also $a + b$ immerhin noch positiv. — Dass a aber positiv seyn muss, ergibt sich daraus, dass wenn $a + b$ und $a - b$ positiv sind, ihre Summe, d. h. $2a$ es auch ist, so wie ihr Produkt, d. h. $a^2 - b^2$ positiv seyn wird.

Digitized by Google

Da aber a + b und a − b positiv sind, so ist $\frac{1}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \sqrt{\frac{1}{(a+b)(a-b)}}$ $= \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$, so dass

$$\int \frac{\partial z}{a+b+(a-b)z^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} arc\left(tg = z\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right),$$

$$\int \frac{\partial x}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} arc\left(tg = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\, tg\, \frac{x}{2}\right).$$ (Vergl. §. 28, I, wo $a^2 = a + b$, $b^2 = a - b$ zu setzen wäre.)

2) a + b positiv, a − b negativ.

Demnach a + b, b − a positiv, so dass auch Summe und Produkt positiv, d. h. $b > 0$, $b^2 - a^2 > 0$.

Jetzt ist

$$\int \frac{\partial x}{a+b\cos x} = 2\int \frac{\partial z}{b+a-(b-a)z^2} = \frac{2}{b+a}\int \frac{\partial z}{1-\frac{b-a}{b+a}z^2}$$

$$= \frac{1}{b+a}\int \left(\frac{1}{1+z\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}} + \frac{1}{1-z\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}}\right)\partial z \quad (§. 29)$$

$$= \frac{1}{b+a}\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}\left[l\left(1+z\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\right) - l\left(1-z\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\, l\left(\frac{1+z\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}}{1-z\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\, l\left(\frac{1+tg\frac{x}{2}\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}}{1-tg\frac{x}{2}\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}}\right).$$

Demnach

$$\int \frac{\partial x}{a+b\cos x} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} arc\left(tg = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\, tg\, \frac{x}{2}\right) + C, & a>0,\ a^2-b^2>0; \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\, l\left(\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\, tg\frac{x}{2}}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\, tg\frac{x}{2}}\right) + C, & b>0,\ b^2-a^2>0. \end{cases} \quad (c)$$

Die Fälle, da $a < 0$, aber $a^2 - b^2 > 0$ und $b < 0$ aber $b^2 - a^2 > 0$ sind hier nicht inbegriffen. Ist aber $a < 0$ und $a^2 - b^2 > 0$, so hat man

$$\int \frac{\partial x}{a+b\cos x} = -\int \frac{\partial x}{-a-b\cos x},\quad -a>0,\ (-a)^2-(-b)^2>0,$$

so dass das letzte Integral zu dem ersten Falle (c) gehört. — Eben so für $b < 0$, $b^2 - a^2 > 0$, ist

$$\int \frac{\partial x}{a+b\cos x} = -\int \frac{\partial x}{-a-b\cos x},\quad -b>0,\ (-b)^2-(-a)^2>0,$$

gehört mithin zum zweiten Falle (c).

Digitized by Google

Die zweite Gleichung (c) kann übrigens auch heissen:

$$\int\frac{\partial x}{a+b\,cos\,x}=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\,l\left(\frac{\sqrt{b-a}\,tg\frac{x}{2}+\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}\,tg\frac{x}{2}-\sqrt{b+a}}\right)+C,\ b>0,\ b^2-a^2>0,$$

da die Differenz der zweiten Seiten beider Gleichungen konstant, nämlich $=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\,l(-1)$ ist. (§. 32, VI.)

IV. Das Integral

$$\int\frac{f+g\,sin\,x}{(a+b\,sin\,x)^n}\partial x$$

wird für $x=\frac{\pi}{2}+z$ zu

$$\int\frac{f+g\,cos\,z}{(a+b\,cos\,z)^n}\partial z$$

und ist also dem Vorstehenden gemäss zu behandeln.

Das Integral

$$\int\frac{sin\,x\,\partial x}{(a+b\,cos\,x)^n}$$

wird für $cos\,x=z$ zu

$$-\int\frac{\partial z}{(a+b\,z)^n}$$

und ist also nach den früheren Methoden integrirbar. Aehnlich verhält es sich mit dem Integral $\int\frac{cos\,x\,\partial x}{(a+b\,sin\,x)^n}$, das für $sin\,x=z$ zu $\int\frac{\partial z}{(a+b\,z)^n}$ wird. — Auch das Integral

$$\int\frac{\partial x}{(a+b\,cos\,x+c\,sin\,x)^n}$$

wird auf das frühere zurück geführt, wenn man setzt

$$b=r\,cos\,\alpha,\ c=r\,sin\,\alpha,\ r=\sqrt{b^2+c^2},\ cos\,\alpha=\frac{b}{r},\ sin\,\alpha=\frac{c}{r},$$

woraus $a+b\,cos\,x+c\,sin\,x=a+r\,(cos\,\alpha\,cos\,x+sin\,\alpha\,sin\,x)=a+r\,cos(x-\alpha)$. Setzt man nun $x-\alpha=z$, so ist

$$\int\frac{\partial x}{(a+b\,cos\,x+c\,sin\,x)^n}=\int\frac{\partial z}{(a+r\,cos\,z)^n}.$$

V. Das Integral $\int\frac{\partial x}{a+b\,cos\,x+c\,cos^2\,x}$ wird für $cos\,x=z$, $\frac{\partial x}{\partial z}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ zu $\pm\int\frac{\partial z}{(a+bz+cz^2)\sqrt{1-z^2}}$ und gehört nun zu den in §. 32 betrachteten Integralen. Aehnlich verhält es sich mit den Integralen:

$$\int\frac{\partial x}{a+b\,sin\,x+c\,sin^2\,x},\ \int\frac{\partial x}{a+b\,sin\,x+c\,cos^2\,x},\ \int\frac{\partial x}{a+b\,cos\,x+c\,sin^2\,x},$$

u. s. w.

Digitized by Google

§. 37.

Bestimmung von Integralen durch Differenzirung.

Gesetzt es sey α eine von x unabhängige Grösse, und ferner $f(x, \alpha)$ eine Funktion von x und α, so wird, wenn

$$\int f(x, \alpha)\,\partial x = F(x, \alpha) + C, \tag{a}$$

die Grösse C, die nur konstant ist nach x, ganz wohl von α abhängen können. Daraus folgt, dass

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\int f(x, \alpha)\,\partial x = \frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial C}{\partial \alpha}.$$

Es ist aber (§. 11)

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\int f(x, \alpha)\,\partial x = Gr\frac{\int f(x, \alpha + \Delta\alpha)\,\partial x - \int f(x, \alpha)\,\partial x}{\Delta\alpha} = Gr\int \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}\,\partial x$$
$$= \int \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\,\partial x \quad (§. 26, IV),$$

so dass also

$$\int \frac{\partial f(x\,\alpha)}{\partial \alpha}\,\partial x = \frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial C}{\partial \alpha}.$$

Nun enthält C kein x, also wird auch $\frac{\partial C}{\partial \alpha}$ kein x enthalten, d. h. konstant nach x seyn, so dass, wenn wir $\frac{\partial C}{\partial \alpha} = C'$ setzen, C' eben eine (willkürliche) Konstante nach x ist. Aus der Gleichung (a) folgt somit

$$\int \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\,\partial x = \frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial \alpha} + C'. \tag{b}$$

Dieser Satz ist für die Bildung von Integralen sehr fruchtbar, wie wir nun an einigen Beispielen sehen werden.

I. Es ist (§. 28, I):

$$\int \sin ax\,\partial x = -\frac{1}{a}\cos ax + C.$$

Daraus folgt, wenn man nach a differenzirt:

$$\int x\cos ax\,\partial x = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax + C,$$

allgemein, wenn man n mal auch a differenzirt und beachtet, dass

$$\frac{\partial^n \sin ax}{\partial a^n} = x^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (§. 18):$$

$$\int x^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)\partial x = -\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{1}{a}\cos ax\right) + C.$$

Eben so

$$\int x^n \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)\partial x = \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{1}{a}\sin ax\right) + C.$$

Digitized by Google

Was die Differentialquotienten der zweiten Seiten anbelangt, so können sie, da

$$\frac{\partial^r}{\partial a^r}\left(\frac{1}{a}\right)=(-1)^r\frac{1.2\ldots r}{a^{r+1}},\ \frac{\partial^r}{\partial a^r}\cos a x=x^r\cos\left(a x+\frac{r\pi}{2}\right),\ \frac{\partial^r \sin a x}{\partial a^r}=x^r\sin\left(a x+\frac{r\pi}{2}\right),$$

mittelst des Satzes in §. 18′ leicht bestimmt werden. (Man vergl. §. 35, V.)

II. Da immer

$$\int\frac{\partial x}{a+b\cos x}=M+C$$

wo M von a und b abhängt (§. 36), so folgt hieraus, da

$$\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{1}{a+b\cos x}\right)=(-1)^n\frac{1.2\ldots n}{(a+b\cos x)^{n+1}},\quad \frac{\partial^n}{\partial b^n}\left(\frac{1}{a+b\cos x}\right)=(-1)^n\frac{1.2\ldots n\cos^n x}{(a+b\cos x)^{n+1}}:$$

$$\int\frac{\partial x}{(a+b\cos x)^n}=\frac{(-1)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\frac{\partial^{n-1}M}{\partial a^{n-1}}+C,\quad \int\frac{\cos^{n-1}x\,\partial x}{(a+b\cos x)^n}=\frac{(-)^{n-1}}{1\ldots(n-1)}\frac{\partial^{n-1}M}{\partial b^{n-1}}+C,$$

und da auch

$$\frac{\partial^r}{\partial b^r}\left(\frac{1}{(a+b\cos x)^n}\right)=(-1)^r\frac{n(n+1)\ldots.(n+r-1)\cos^r x}{(a+b\cos x)^{n+r}},$$

also wenn $n=m-r$:

$$\frac{\partial^r}{\partial b^r}\left(\frac{1}{(a+b\cos x)^{m-r}}\right)=(-1)^r\frac{(m-r)(m-r+1)\ldots(m-1)\cos^r x}{(a+b\cos x)^m},$$

so ist

$$\int\frac{\cos^r x\,\partial x}{(a+b\cos x)^m}=\frac{(-1)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}\frac{\partial^{m-1}M}{\partial a^{m-r-1}\partial b^r}+C.$$

III. Das Integral

$$\int\frac{\partial x}{a+bx+cx^2}$$

kann immer als eine Grösse A, welche von a, b, c abhängt, gefunden werden, so dass

$$\int\frac{\partial x}{a+bx+cx^2}=A+C.$$

Daraus ergibt sich, wie in II.:

$$\int\frac{\partial x}{(a+bx+cx^2)^n}=\frac{(-1)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\frac{\partial^{n-1}A}{\partial a^{n-1}}+C,$$

$$\int\frac{x^r\,\partial x}{(a+bx+cx^2)^m}=\frac{(-1)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}\frac{\partial^{m-1}A}{\partial a^{m-r-1}\partial b^r}+C.$$

IV. Aus den Werthen von $\int e^{ax}\sin bx\,\partial x$, $\int e^{ax}\cos bx\,\partial x$ in §. 35, III folgen durch n malige Differenzirung nach a:

$$\int x^n e^{ax}\sin bx\,\partial x=\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}\right)+C,$$

$$\int x^n e^{ax}\cos bx\,\partial x=\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)}{a^2+b^2}\right)+C.$$

Digitized by Google

§. 38.

Wiederholte Integration.

Da die Grösse $\int f(x)\partial x$ wieder eine Funktion von x ist, so kann man ganz eben so ihr Integral suchen, was man durch $\int\left(\int f(x)\partial x\right)\partial x$, oder abkürzungsweise durch $\int^2 f(x)\partial x^2$ bezeichnet. Daraus wird schon klar seyn, was man durch das Zeichen

$$\int^n f(x)\partial x^n$$

bezeichnet. Es lassen sich nun leicht einige Formeln aufstellen, mittelst derer man solche vielfache Integrale bestimmen kann. Ist nämlich y eine Funktion von x, so ist (§. 27)

$$\int y\partial x = \int y\partial x,$$

$$\int^2 y\partial x^2 = x\int y\partial x - \int xy\partial x,$$

$$\int^3 y\partial x^3 = x\int^2 y\partial x^2 - \int\left(x\int y\partial x\right)\partial x$$

$$= x^2\int y\partial x - x\int xy\partial x - \frac{x^2}{2}\int y\partial x + \frac{1}{2}\int x^2 y\partial x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\int y\partial x - x\int xy\partial x + \frac{1}{2}\int x^2 y\partial x.$$

Man schliesst hieraus, dass allgemein:

$$1.2\ldots(n-1)\int^n y\partial x^n = x^{n-1}\int y\partial x - \frac{n-1}{1}x^{n-2}\int xy\partial x + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}x^{n-3}\int x^2 y\partial x$$

$$-\ldots\ldots \pm \frac{n-1}{1}x\int x^{n-2}x\partial x \mp \int x^{n-1}y\partial x$$

sey. Der Beweis dieser Formel geschieht durch den Schluss von n auf n + 1. Da nämlich

$$\int\left[x^{n-r}\int x^{r-1}y\partial x\right]\partial x = \frac{x^{n-r+1}}{n-r+1}\int x^{r-1}y\partial x - \frac{1}{n-r+1}\int x^n y\partial x,$$

so erhält man aus obiger Formel durch nochmalige Integration:

$$1.2..(n-1)\int^{n+1} y\partial x^{n+1} = \frac{x^n}{n}\int y\partial x - x^{n-1}\int xy\partial x + \frac{n-1}{1.2}x^{n-2}\int x^2 y\partial x - \ldots\ldots\ldots$$

$$\pm \frac{n-1}{1.2}x^2\int x^{n-2}y\partial x + \frac{x}{1}\int x^{n-1}y\partial x$$

$$- \frac{1}{n}\int x^n y\partial x + \int x^n y\partial x - \frac{n-1}{1.2}\int x^n y\partial x + \ldots\ldots$$

$$\mp \frac{n-1}{1.2}\int x^n y\partial x \pm \int x^n y\partial x.$$

Nun ist

$$-\frac{1}{n}+1-\frac{n-1}{1.2}+\ldots\mp\frac{n-1}{1.2}\pm 1=-\frac{1}{n}\left[1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}-\ldots\pm\frac{n(n-1)}{1.2}\mp n\right]$$

$$=-\frac{1}{n}\left[1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}+\ldots\pm\frac{n(n-1)}{1.2}\mp n\pm 1\right]\pm\frac{1}{n}=-\frac{1}{n}(1-1)^n\pm\frac{1}{n}=\pm\frac{1}{n},$$

also wenn man mit n multiplizirt:

$$1.2\ldots n\int^{n+1} y\,\partial x^{n+1}=x^n\int y\,\partial x-\frac{n}{1}x^{n-1}\int x\,y\,\partial x+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}\int x^2 y\,\partial x-\ldots\ldots\ldots$$
$$\mp\frac{n}{1}x\int x^{n-1}y\,\partial x\pm\int x^n y\,\partial x,$$

welche Formel aus der früheren entsteht, wenn man $n+1$ für n setzt, und also deren Richtigkeit beweist, da sie für $n=2$ gilt (§. 18, II).

Da man bei jeder Integration eine willkürliche Konstante zufügen soll, so wird man schliesslich bei $\int^n y\,\partial x^n$ hinzusetzen müssen $a\,x^{n-1}+b\,x^{n-2}+\ldots$ $\ldots+k$, wo a, b..., k, der Anzahl nach n, willkürliche Konstanten sind.

Der so eben angegebene Satz führt die Bestimmung eines vielfachen Integrals auf die von einfachen Integralen zurück. Man hat auch weitere Sätze aufgestellt, nach denen die Bestimmung vielfacher Integrale von zusammengesetzten Formen auf die der einfacheren zurückkommt. So wenn y und z Funktionen von x sind, hat man

$$\int^n y\,z\,\partial x^n=y\int^n z\,\partial x^n-\frac{n}{1}\frac{\partial y}{\partial x}\int^{n+1} z\,\partial x^{n+1}+\frac{n(n+1)}{1.2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\int^{n+2} z\,\partial x^{n+2}$$
$$-\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\int^{n+3} z\,\partial x^{n+3}+\ldots\ldots,$$

welche Reihe in's Unendliche gehen kann. Da jedoch diese Untersuchungen für uns von geringerem Interesse sind, so mögen sie im Augenblick dahingestellt bleiben. (Vergl. „Anhang" unter C).

Siebenter Abschnitt.

Das bestimmte Integral.

§. 39.

Erklärungen.

I. Seyen a und b zwei bestimmte endliche Grössen, f(x) eine Funktion von x, welche von $x=a$ bis $x=b$ stets endliche Werthe habe, Δx ein Zuwachs von x so beschaffen, dass $b=a+n\Delta x$ sey, wo n eine positive ganze Zahl ist (dabei $\Delta x>0$, wenn $b-a>0$, dagegen $\Delta x<0$, wenn $b-a<0$), so nennen wir den Gränzwerth der Grösse

$$f(a)\Delta x+f(a+\Delta x)\Delta x+f(a+2\Delta x)\Delta x+\ldots\ldots\ldots+f(b-\Delta x)\Delta x \qquad (1)$$

Digitized by Google

mit abnehmendem (gegen Null gehendem) Δx das **bestimmte Integral** von f(x) nach x und bezeichnen denselben durch $\int_a^b f(x)\,\partial x$, so dass wir haben:

$$\int_a^b f(x)\,\partial x = Gr\,\Delta x\,[f(a) + f(a+\Delta x) + f(a+2\Delta x) + \ldots\ldots + f(b-\Delta x)]. \quad (2)$$

Hierbei ist auf der zweiten Seite die Zahl der Glieder = n und wächst natürlich mit abnehmendem Δx, da immer $n\,\Delta x = b - a$ seyn soll; zugleich ist $b - \Delta x = a + (n-1)\,\Delta x$.

Wir haben also im Augenblicke wesentlich zu unterscheiden zwischen dem Zeichen des bestimmten Integrals und dem des **unbestimmten** in §. 26, dessen Benennung als „unbestimmtes" nun erst durch den Gegensatz klar ist.

Bezeichnen wir, wie diess früher geschehen, durch dx eine unendlich kleine Grösse, so kann man die Gleichung (2) auch schreiben:

$$\int_a^b f(x)\,\partial x = f(a)\,dx + f(a+dx)\,dx + f(a+2dx)\,dx + \ldots + f(b-dx)\,dx, \quad (2')$$

deren Bedeutung jedoch nur aus (2) klar ist. Die Produkte $f(a)\,dx$, $f(a+dx)\,dx, \ldots\ldots$, $f(b-dx)\,dx$ nennt man dann die **Elemente** des bestimmten Integrals.

II. Aus der Erklärung in (2) lässt sich sofort ein Satz folgern, der uns später von Wichtigkeit seyn wird.

Da nämlich $f(a), f(a+\Delta x), \ldots, f(b-\Delta x)$ sämmtlich endliche Grössen sind, so ist eine davon die grösste, eine andere die kleinste. Sey $f(a+r\Delta x)$ die erstere, $f(a+s\Delta x)$ die letztere, so hat man (vergl. §. 7, III):

$$f(a) + f(a+\Delta x) + \ldots + f(b-\Delta x) \begin{matrix} < n\,f(a+r\,\Delta x) \\ > n\,f(a+s\,\Delta x), \end{matrix}$$

also

$$\Delta x\,[f(a) + f(a+\Delta x) + \ldots\ldots + f(b-\Delta x)] \begin{matrix} < n\,\Delta x\,f(a+r\,\Delta x) \\ > n\,\Delta x\,f(a+s\,\Delta x), \end{matrix} *$$

d. h. da $n\Delta x = b - a$:

$$\Delta x\,[f(a) + f(a+\Delta x) + \ldots\ldots + f(b-\Delta x)] \begin{matrix} > (b-a)\,f(a+r\,\Delta x) \\ < (b-a)\,f(a+s\,\Delta x), \end{matrix}$$

so dass

$$\Delta x\,[f(a) + f(a+\Delta x) + \ldots\ldots + f(b-\Delta x)] = (b-a)\,M, \quad (3)$$

wo M eine zwischen $f(a+r\Delta x)$ und $f(a+s\Delta x)$ d. h. zwischen dem grössten und kleinsten Werth, den f(x) innerhalb der **Integrationsgränzen** a und b annimmt, liegende Zahl ist.

Da die Gleichung (3) für alle Δx besteht, so gilt sie auch für den Gränzwerth, d. h. man hat wegen (2):

$$\int_a^b f(x)\,\partial x = (b-a)\,M, \quad (4)$$

wo M dieselbe Bedeutung hat, wie so eben. Lässt man aber in f(x) die

---

* Dabei ist allerdings $\Delta x > 0$ gedacht. Mag aber Δx positiv oder negativ seyn, der Werth der ersten Seite liegt immer **zwischen** den zwei Grössen auf der zweiten Seite.

Digitized by Google

unabhängig Veränderliche x stetig von a bis b gehen, so durchläuft f(x) eine (unendliche) Reihe von Werthen in ebenfalls stetiger Folge, so dass jede Zahl, die zwischen dem grössten und kleinsten dieser Werthe liegt, nothwendig einer der Werthe von f(x) selbst seyn muss.

Es lässt sich diess auch geometrisch leicht einsehen. Betrachten wir die Kurve DEF als Bild der Funktion f(x), d. h. stellen die Ordinaten derselben die Werthe von f(x) dar, und ist AC die Richtung der Abszissenaxe, a die Abszisse von D, b von F [also AC = b − a, AD = f(a), CF = f(b) u. s. w.], so sind BE und AD die grössten und kleinsten Werthe von f(x) zwischen x = a und x = b. Jeder Werth nun, der grösser als AD, aber kleiner als BE ist, wird als eine der Ordinaten von DEF angegeben werden können.

Fig. 13.

Demnach ist in (4) die Grösse M einem (bestimmten, natürlich im Allgemeinen nicht kurzweg bekannten) Werthe von f(x) gleich zu setzen, wenn x zwischen a und b liegt. Bezeichnen wir durch Θ künftig immer einen positiven ächten Bruch (also < 1 oder höchstens = 1), so stellt die Grösse $a + \Theta(b-a)$ immer eine Zahl vor, die zwischen a und b liegt; * man kann also setzen: $M = f[a + \Theta(b-a)]$, so dass endlich

$$\int_a^b f(x)\,\partial x = (b-a)\,f[a+\Theta(b-a)], \tag{5}$$

wo Θ zwischen 0 und 1 liegt. (Vergl. IV dieses §.)

Daraus zieht man sofort zwei Folgerungen:

1) Ist f(x) konstant = c, so ist auch $f[a+\Theta(b-a)] = c$, so dass

$$\int_a^b c\,\partial x = (b-a)\,c. \tag{6}$$

2) Nähert b sich der Grösse a, so wird $\int_a^b f(x)\,\partial x$ sich Null nähern, da dann auf der zweiten Seite b − a sich Null nähert. — Die (5) kann übrigens auch unter folgender Form geschrieben werden:

$$\int_a^{a+h} f(x)\,\partial x = h\,f(a+\Theta h). \tag{7}$$

Verallgemeinerung dieses Satzes.

III. Der Satz (5) lässt sich leicht verallgemeinern. Ist nämlich F(x) eine Funktion von x so beschaffen, dass sie von x = a bis x = b immer dasselbe Zeichen hat; sind $f(a + r\Delta x)$, $f(a + s\Delta x)$ die grössten und kleinsten Werthe von f(x), wenn x von a bis b geht (wie in II), so ist

---

* Für $\Theta = 0$ ist jene Grösse = a, für $\Theta = 1$ aber a + b − a = b; für Θ zwischen 0 und 1 liegt sie zwischen a und b.

Digitized by Google

$$F(a)f(a)+F(a+\Delta x)f(a+\Delta x)+\ldots+F(b-\Delta x)f(b-\Delta x)$$
$$<f(a+r\Delta x)[F(a)+F(a+\Delta x)+\ldots.+F(b-\Delta x)]$$
$$>f(a+s\Delta x)[F(a)+F(a+\Delta x)+\ldots.+F(b-\Delta x)],$$

wobei wir $F(x)$ als positiv gedacht haben, und der Satz nur wahr ist, wenn $F(x)$ immer positiv bleibt, da die Summe nur in diesem Falle zu gross werden muss, wenn man für $f(a)$, $f(a+\Delta x)$, ..., $f(b-\Delta x)$ durchweg den grössten Werth $f(a+r\Delta x)$ setzt. — Für negative $F(x)$ wechsle man nur überall die Zeichen und der Satz gilt dann noch; das Endergebniss wird also auch für diesen Fall richtig bleiben. *

Multiplizirt man mit Δx, und beachtet, dass

$$Gr\,\Delta x[f(a)F(a)+f(a+\Delta x)F(a+\Delta x)+\ldots+f(b-\Delta x)F(b-\Delta x)]=\int_a^b f(x)F(x)\partial x,$$

$$Gr\,\Delta x[F(a)+F(a+\Delta x)+\ldots.F(b-\Delta x)]=\int_a^b F(x)\partial x,$$

so schliesst man, wie oben:

$$\int_a^b f(x)F(x)\partial x=M\int_a^b F(x)\partial x,$$

wo M zwischen dem grössten und kleinsten Werthe von $f(x)$, wenn x von a bis b geht, liegt. Daher

$$\int_a^b f(x)F(x)\partial x=f[a+\Theta(b-a)]\int_a^b F(x)\partial x, \qquad (8)$$

wo also $F(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ sein Zeichen nicht wechselt.

Der Satz (5) folgt hieraus. Setzt man nämlich in (8) $F(x)=1$, so wechselt diese Grösse ihr Zeichen sicher nicht, und man hat:

$$\int_a^b f(x)\partial x=f[a+\Theta(b-a)]\int_a^b \partial x.$$

---

* Ist $F(x)$ immer negativ, so ist $-F(x)$ immer positiv und man hat:

$$-F(a)f(a)-F(a+\Delta x)f(a+\Delta x)-\ldots.-F(b-\Delta x)f(b-\Delta x)$$
$$<f(a+r\Delta x)[-F(a)-F(a+\Delta x)-\ldots.-F(b-\Delta x)]$$
$$>f(a+s\Delta x)[-F(a)-F(a+\Delta x)-\ldots.-F(b-\Delta x)].$$

Daraus folgt dann ganz wie im Texte:

$$\int_a^b -F(x)f(x)\partial x=M\int_a^b -F(x)\partial x,$$

wo M eine Mittelgrösse für $f(x)$ ist. Aus der Erklärung (2) folgt aber unmittelbar, dass $\int_a^b -\varphi(x)\partial x=-\int_a^b \varphi(x)\partial x$, da

$$Gr\,\Delta x[-\varphi(a)-\varphi(a+\Delta x)-\ldots-\varphi(b-\Delta x)]=-Gr\,\Delta x[\varphi(a)+\varphi(a+\Delta x)+\ldots+\varphi(b-\Delta x)].$$

Demnach heisst obige Gleichung

$$-\int_a^b F(x)f(x)\partial x=-M\int_a^b F(x)\partial x,\ \int_a^b F(x)f(x)\partial x=M\int_a^b F(x)\partial x.$$

Digitized by Google

Aber aus (6) folgt für $c = 1$: $\int_a^b \partial x = b - a$, so dass also die (5) geradezu erscheint. Die Gleichung (6) ergibt sich übrigens aus der Erklärung in (2) von selbst; es bedarf also des Satzes (6) nicht, um sie zu erweisen.

Mittlerer Werth einer Funktion.

IV. Ist $f(x)$ eine Funktion von x, welche endlich bleibt von $x = a$ bis $x = b$, und man legt der unabhängig Veränderlichen x in stetiger Folge alle möglichen Werthe von $x = a$ bis $x = b$ bei, so nennen wir die Summe all dieser Werthe, dividirt durch die Anzahl derselben, den mittlern Werth der Funktion $f(x)$, innerhalb der Gränzen a und b für x.

Da man alle Werthe von x, zwischen a und b, beachten soll, so muss man durch unendlich kleine Unterschiede dx fortschreiten, so dass die Summe ist

$$f(a) + f(a + dx) + \dots + f(b - dx),$$

wo wir den letzten Werth $f(b)$ immer ausschliessen. Ist n die Anzahl der Glieder, so ist also der mittlere Werth von $f(x)$ gleich

$$\frac{1}{n}[f(a) + f(a + dx) + f(a + 2dx) + \dots + f(b - dx)].$$

In schärferer Weise gesprochen, ist dieser mittlere Werth:

$$Gr\,\frac{1}{n}[f(a) + f(a + \Delta x) + f(a + 2\Delta x) + \dots + f(a + \overline{n-1}\,\Delta x)],$$

d. h. da $n\Delta x = b - a$:

$$\frac{1}{b-a}\,Gr\,\Delta x[f(a) + f(a + \Delta x) + f(a + 2\Delta x) + \dots + f(a + \overline{n-1}\,\Delta x)].$$

Nach (2) ist also:

$$\text{Mittlerer Werth von } f(x) \text{ zwischen a und b gleich } \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\partial x. \qquad (9)$$

Daraus folgt unmittelbar, dass die in (5) mit $f[a + \Theta(b - a)]$ bezeichnete Grösse geradezu dieser mittlere Werth von $f(x)$ ist.

Ehe wir weiter gehen, wollen wir eine zweite Erklärungsweise folgen lassen, die wir absichtlich ganz unabhängig von der obigen darstellen, da sie vorläufig auch übergangen, nach Bedürfniss aber auch an die Spitze gestellt werden kann.

§. 40.

Zweite Erklärungsweise des bestimmten Integrals.

I. Seyen a und b zwei bestimmte, endliche Grössen; $f(x)$ eine Funktion von x, die für alle Werthe von x, von a bis b, endlich bleibe; ferner $a_1, a_2, \dots, a_n$ eine Reihe von Werthen zwischen a und b, so dass wenn $b > a$, auch $a_1 > a$, $a_2 > a_1$, $\dots$, $a_n > a_{n-1}$, $b > a_n$, und wenn $b < a$, auch $a_1 < a$, $a_2 < a_1$, $\dots$, $a_n < a_{n-1}$, $b < a_n$, dass mithin die Differenzen

$$a_1 - a,\ a_2 - a_1,\ a_3 - a_2,\ \dots,\ a_n - a_{n-1},\ b - a_n$$

Digitized by Google

sämmtlich dasselbe Zeichen haben, so heissen wir die Grösse, der sich $(a_1-a)f(a)+(a_2-a_1)f(a_1)+(a_3-a_2)f(a_2)+\ldots+(a_n-a_{n-1})f(a_{n-1})+(b-a_n)f(a_n)$ (a) mehr und mehr nähert, je kleiner die Differenzen a_1-a, a_2-a_1, ..., $b-a_n$ werden, d. h. je mehr man Werthe zwischen a und b einschiebt, das bestimmte Integral von f(x), genommen zwischen den Gränzen a und b, und bezeichnen dieselbe durch $\int_a^b f(x)\,\partial x$, so dass als Erklärung dieses Zeichens die Gleichung gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\partial x = Gr\left[(a_1-a)f(a)+(a_2-a_1)f(a_1)+(a_3-a_2)f(a_2)+\ldots+(a_n-a_{n-1})f(a_{n-1}) + (b-a_n)f(a_n)\right]. \tag{10}$$

Was nun die Grösse zweiter Seite in (10) anbelangt, so wird, da die Differenzen a_1-a, a_2-a_1, ..., $b-a_n$ sämmtlich dasselbe Zeichen haben, die Grösse

$$(a_1-a)f(a)+(a_2-a_1)f(a_1)+\ldots+(b-a_n)f(a_n) \tag{α}$$

ihrem absoluten Werthe nach (d. h. ohne Rücksicht auf das Zeichen) kleiner seyn, als diejenige Grösse, die man erhält, wenn man für $f(a)$, $f(a_1)$ ..., $f(a_n)$ die grösste dieser Grössen setzt, und grösser als das, was man erhält, wenn man die kleinste setzt. Ist also $f(a_r)$ die grösste, $f(a_s)$ die kleinste der Grössen $f(a)$, $f(a_1)$, ..., $f(a_n)$, so liegt die Grösse (α) immer zwischen

$(a_1-a)f(a_r)+(a_2-a_1)f(a_r)+\ldots+(a_n-a_{n-1})f(a_r)+(b-a_n)f(a_r)=(b-a)f(a_r)$ und
$(a_1-a)f(a_s)+(a_2-a_1)f(a_s)+\ldots+(a_n-a_{n-1})f(a_s)+(b-a_n)f(a_s)=(b-a)f(a_s)$,

so dass man also sagen kann, es sey dieselbe gleich einem Werthe zwischen $(b-a)f(a_r)$ und $(b-a)f(a_s)$. Daraus folgt, wie oben, dass $\int_a^b f(x)\,\partial x$ gleich $(b-a)$ multiplizirt mit einem Werthe von f(x), für den x zwischen a und b liegt. Bezeichnen wir denselben durch $a+\Theta(b-a)$, wo Θ zwischen 0 und 1 liegt, so ist also

$$\int_a^b f(x)\,\partial x = (b-a)f[a+\Theta(b-a)]. \tag{5}$$

II. Es fragt sich nun vor Allem, ob die gewählte Einschiebungsweise der Werthe a_1, a_2, ..., a_n, die wir nach irgend einem Gesetze geschehen uns denken können, nicht von Einfluss ist auf den Werth des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,\partial x$. Zu dem Ende wollen wir zunächst in

$$(a_1-a)f(a)+(a_2-a_1)f(a_1)+\ldots+(a_n-a_{n-1})f(a_{n-1})+(b-a_n)f(a_n) \tag{α}$$

zwischen a und a_1, a_1 und a_2, ... weitere Grössen einschieben, und zwar zwischen a und a_1 die Grössen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$; zwischen a_1 und a_2 die Grössen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$; ....; zwischen a_n und b die Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$, so wird statt ($\alpha$) jetzt erscheinen:

$$\left.\begin{array}{l}(\beta_1-a)f(a)+(\beta_2-\beta_1)f(\beta_1)+\ldots+(\beta_m-\beta_{m-1})f(\beta_{m-1})+(a_1-\beta_m)f(\beta_m)\\ +(\gamma_1-a_1)f(a_1)+(\gamma_2-\gamma_1)f(\gamma_1)+\ldots+(\gamma_r-\gamma_{r-1})f(\gamma_{r-1})+(a_2-\gamma_r)f(\gamma_r)\\ +\ldots\\ \vdots\\ +(\xi_1-a_n)f(a_n)+(\xi_2-\xi_1)f(\xi_1)+\ldots+(\xi_s-\xi_{s-1})f(\xi_{s-1})+(b-\xi_s)f(\xi_s).\end{array}\right\} \tag{α'}$$

Genau wie oben wird man aber zeigen können, dass jede einzelne Zeile von (α') als ein Zwischenwerth darzustellen ist und zwar, [wenn wir etwa uns denken, es

Digitized by Google

seyen schon an und für sich genügend viele Werthe $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vorhanden gewesen] wird man die Grösse (α') setzen können gleich

$$(a_1-a)f[a+\Theta_1(a_1-a)]+(a_2-a_1)f[a_1+\Theta_2(a_2-a_1)]+\ldots+(b-a_n)f[a_n+\Theta_n(b-a_n)],$$

wo $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ zwischen 0 und 1 liegen. Da aber a_1-a, $a_2-a_1, \ldots\ldots$, a_n-a_{n-1} immer kleiner werden, je grösser n ist, so wird man setzen können:

$$f[a+\Theta_1(a_1-a)]=f(a)+\varepsilon_0,\ f[a_1+\Theta_2(a_2-a_1)]=f(a_1)+\varepsilon_1, \ldots, f[a_n+\Theta(b-a_n)] = f(a_n)+\varepsilon_n,$$

wo $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ mit a_1-a, $a_2-a_1, \ldots, b-a_n$ verschwindend klein werden. Also ist (α') gleich

$$(a_1-a)f(a)+(a_2-a_1)f(a_1)+\ldots\ldots+(b-a_n)f(a_n)$$
$$+(a_1-a)\varepsilon_0+(a_2-a_1)\varepsilon_1+\ldots\ldots+(b-a_n)\varepsilon_n,$$

d. h. die Differenz zwischen dem Werthe von (α) und dem von (α') ist

$$(a_1-a)\varepsilon_0+(a_2-a_1)\varepsilon_1+\ldots\ldots+(b-a_n)\varepsilon_n. \qquad (\beta)$$

Diese Grösse liegt aber zwischen $(b-a)\varepsilon_r$ und $(b-a)\varepsilon_s$, wenn ε_r und ε_s die grösste und kleinste der Grössen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sind, und da mit wachsendem n diese Grössen immer mehr abnehmen, so wird also der Werth von (β) sich immer mehr der Null nähern, so dass mit unendlichem n, d. h. wenn man zur Gränze übergeht, der Werth von (α) und der von (α') einander gleich sind. Daraus folgt also, dass das Einschieben von weiteren Zwischenwerthen keinen Einfluss auf den Werth des bestimmten Integrals hat.

Aber auch eine ganz andere Einschiebungsweise, als die anfänglich gewählte, hat keinen Einfluss. Denn seyen anfänglich eingeschoben $a_1, \ldots, a_n$; dann wieder einmal $b_1, \ldots\ldots, b_m$, wo natürlich schliesslich n und m unendlich gross sind, und auch von $b_1, \ldots, b_m$ angenommen wird, dass b_1-a, $b_2-b_1, \ldots, b-b_m$ sämmtlich dasselbe Zeichen haben, so werden die Gränzen von

$$\left.\begin{array}{l}(a_1-a)f(a)+(a_2-a_1)f(a_1)+\ldots+(b-a_n)f(a_n)\\ \text{und}\quad (b_1-a)f(a)+(b_2-b_1)f(b_1)+\ldots+(b-b_m)f(b_m)\end{array}\right\} \qquad (\delta)$$

einander gleich seyn. Denn man denke sich zwischen a und b **alle** Grössen $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ in der gehörigen Ordnung eingeschoben, so wird diese neue Eintheilung nothwendig in Bezug auf jede der durch (δ) angegebenen Eintheilungsweisen eine solche seyn, die man erhalten hätte, wenn man in (δ) Zwischenwerthe eingeschoben hätte. Da nun, dem Obigen gemäss, der Gränzwerth dieser neuen Grösse derselbe ist, wie die Gränzwerthe der beiden Grössen (δ), so müssen diese letzteren Gränzwerthe selbst einander gleich seyn.

Wie man also auch in (10) die nach einander folgenden Zwischenwerthe $a_1, \ldots, a_n$ wähle, der Werth von $\int_a^b f(x)\,\partial x$ ist immer derselbe.

III. Wählen wir diese Zwischenwerthe nun so, dass sie alle gleich weit von einander abstehen, d. h. setzen wir $\frac{b-a}{n}=\Delta x$, so ist, wenn *Gr* sich auf ein unendlich wachsendes n, also unendlich abnehmendes Δx bezieht, auch

$$\int_a^b f(x)\,\partial x = Gr\,\Delta x[f(a)+f(a+\Delta x+f(a+2\Delta x)+\ldots+f(a+\overline{n-1}\,\Delta x)], \qquad (2)$$

wenn man $a_1=a+\Delta x$, $a_2=a+2\Delta x$, ... $a_n=a+(n-1)\Delta x$ setzt.

Digitized by Google

Man kann das oben Gesagte auch noch in etwas anderer Form aussprechen, was für manche Anwendungen von grosser Wichtigkeit ist. Sind nämlich zwischen a und b die Werthe $a_1, a_2, \ldots a_n$ eingeschoben, und man lässt n mehr und mehr gross werden, so werden die Differenzen $a_1 - a, a_2 - a_1, \ldots, b - a_n$ immer kleiner und man wird also sagen dürfen, sie werden unendlich klein (§. 11), statt zu sagen, man gehe zur Gränze über. Da die Grössen $f(a), f(a_1), \ldots, f(a_n)$ sämmtlich endlich vorausgesetzt wurden, so sind dann die Grössen $(a_1 - a)f(a)$, $(a_2 - a_1)f(a_1), \ldots, (b - a_n)f(a_n)$ auch unendlich klein, und bilden das, was man die Elemente des bestimmten Integrals nennt. Dasselbe ist somit gleich der Summe seiner unendlich vielen unendlich kleinen Elemente. Sobald man also irgendwo auf eine solche Summation kommt, so hat man immer ein bestimmtes Integral zu ermitteln.

IV. Es mag vielleicht zur klaren Einsicht in das Wesen der letzten Angabe beitragen, wenn wir an einem Beispiele erläutern, wie diess zu verstehen ist. Gesetzt, ein Körper bewege sich auf der Geraden AM (Fig. 14) und sey am Ende der Zeit t nach M gelangt; seine Geschwindigkeit in M sey $= f(t)$, so dass also dieselbe zu jeder Zeit bekannt ist; man will wissen, welchen Weg der Körper in der Zeit z, von Anfang an gerechnet, zurückgelegt habe, wenn die Bewegung in A angefangen hat. Sey τ eine unendlich kleine Zeit = ein Zeitelement, v die Geschwindigkeit des Körpers in M, gleich f(t), so ist der in der Zeit τ zurückgelegte Weg $= v\tau = f(t)\tau$, welcher Weg nun das Element des ganzen zurückgelegten Weges bildet. Theilt man also die Zeit z in unendlich viele unendlich kleine (gleich grosse oder verschieden grosse) Zeittheilchen τ ab, so hat man für den Weg in jedem derselben einen Ausdruck wie den obigen, so dass die Summe aller derselben, d. h.

Fig. 14.

A M N

$$f(0)\tau + f(\tau)\tau + f(2\tau)\tau + \ldots + f(z-\tau)\tau$$

der zurückgelegte Weg ist. Derselbe wird also gegeben seyn durch die Formel:

$$x = \int_0^z f(t)\,\partial t.$$

Dass man dasselbe Resultat auch in der strengeren Form erhalten kann, ist leicht zu übersehen. Man würde jetzt sagen, der in der Zeit τ zurückgelegte Weg sey zwischen $v\tau$ und $(v + \Delta v)\tau$ enthalten, wenn Δv die Zunahme der Geschwindigkeit während der Zeit τ ist. Er ist also $= (v + \varepsilon)\tau$, wo ε eine Grösse ist, die mit τ verschwindet. Daraus folgt, dass der ganze Weg gleich

$$(v_0 + \varepsilon_0)\tau + (v_1 + \varepsilon_1)\tau + \ldots + (v_n + \varepsilon_n)\tau,$$

wenn $v_0, v_1, \ldots\ldots, v_n$ die Geschwindigkeiten in den Zeitmomenten $0, \tau, 2\tau, \ldots$ sind. Diese Summe ist gleich

$$v_0\tau + v_1\tau + \ldots + v_n\tau + (\varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_n)\tau,$$

und bleibt, was auch τ sey, dem Wege gleich. Lässt man aber τ immer mehr abnehmen, so wird der erste Theil $v_0\tau + \ldots + v_n\tau$ als Gränzwerth die Grösse $\int_0^z v\,\partial t = \int_0^z f(t)\,\partial t$ haben, während der zweite immer zwischen $n\tau\varepsilon_r$ und $n\tau\varepsilon_s$ liegt, wo ε_r und ε_s wieder die grössten und kleinsten der Grössen $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n$ bezeichnen. Da $n\tau = z$, und $z\varepsilon_r$, $z\varepsilon_s$ gegen Null gehen, wenn τ gegen Null geht, so ist der Gränzwerth dieses zweiten Theiles Null. Daraus folgt dann wieder obige Gleichung.

§. 41.

Werthermittlung eines bestimmten Integrals.

I. Angenommen, es sey F(x) das nach den Methoden des sechsten Abschnitts ermittelte unbestimmte Integral von f(x), so dass

Digitized by Google

$$F(x) = \int f(x)\,\partial x\,, \text{ also } \frac{\partial F(x)}{\partial x} = f(x)\,.$$

Nach §. 15, I folgt hieraus, dass

$$F(x + \Delta x) - F(x) = [f(x) + \alpha]\,\Delta x$$

seyn wird, wo α mit Δx gegen Null geht. Setzt man in dieser Gleichung, welche wesentlich voraussetzt, dass f(x) endlich sey, nach einander $x = a,\ a + \Delta x,\ a + 2\Delta x, \ldots, b - \Delta x$, so erhält man:

$$\begin{aligned}
F(a + \Delta x) - F(a) &= f(a)\,\Delta x + \alpha_1\,\Delta x,\\
F(a + 2\Delta x) - F(a + \Delta x) &= f(a + \Delta x)\,\Delta x + \alpha_2\,\Delta x,\\
F(a + 3\Delta x) - F(a + 2\Delta x) &= f(a + 2\Delta x)\,\Delta x + \alpha_3\,\Delta x,\\
&\vdots\\
F(b) - F(b - \Delta x) &= f(b - \Delta x)\,\Delta x + \alpha_n\,\Delta x,
\end{aligned}$$

wo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ mit Δx gegen Null gehen. Die Addition dieser Gleichung gibt:

$$F(b) - F(a) = \Delta x\,[f(a) + f(a + \Delta x) + \ldots + f(b - \Delta x)] + \Delta x\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n)$$

d. h.

$$\Delta x\,[f(a) + f(a + \Delta x) + f(a + 2\Delta x) + \ldots\ldots + f(b - \Delta x)] = F(b) - F(a) - \Delta x\,[\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n].$$

Diese Gleichheit liefert sofort

$$Gr\,\Delta x\,[f(a) + f(a + \Delta x) + \ldots\ldots + f(b - \Delta x)] = Gr\,[F(b) - F(a) - \Delta x\,(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)],$$

d. h. nach §. 39, (2):

$$\int_a^b f(x)\,\partial x = Gr\,[F(b) - F(a) - \Delta x\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)]\,. \tag{a}$$

Was nun die Grössen zweiter Seite betrifft, so sind F(b), F(a) bestimmte Zahlen, die sich nicht ändern, so dass sie selbst ihre Gränze sind. Für die übrigen Grössen besteht die Gleichung

$$Gr\,\Delta x\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = 0\,, \tag{11}$$

von der wir in ähnlichen Fällen noch häufig Gebrauch machen werden. Der Beweis derselben ist bereits (§. 7, IV) geführt worden, mag aber doch nochmals wiederholt werden.

Ist α_g die grösste, α_k die kleinste der Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, so ist immer

$$\Delta x\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) \text{ zwischen } n\,\Delta x\,\alpha_g \text{ und } n\,\Delta x\,\alpha_k,$$

d. h. da $n\Delta x = b - a$, es ist

$$\Delta x\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) \text{ zwischen } (b - a)\,\alpha_g \text{ und } (b - a)\,\alpha_k.$$

Da mit abnehmendem Δx alle α, also auch α_g und α_k gegen Null gehen, mithin $(b - a)\,\alpha_g$ und $(b - a)\,\alpha_k$ in derselben Lage sind, so ergibt sich nach §. 7, I sofort die Richtigkeit der Gleichung (11).

Also endlich folgt aus (a):

$$\int_a^b f(x)\,\partial x = F(b) - F(a)\,, \text{ wo } F(x) = \int f(x)\,\partial x\,. \tag{12}$$

Digitized by Google

So folgt also aus $\int \cos x\,\partial x = \sin x$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\partial x = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

II. Vermittelst dieser Formel ist die Ermittlung des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,\partial x$ auf die des unbestimmten Integrals $\int f(x)\,\partial x$ zurückgeführt, und wenn $\int f(x)\,\partial x = F(x)$, so ist $\int_a^b f(x)\,\partial x$ gleich der Differenz der Werthe von $F(x)$ für $x = b$ und $x = a$. Die Werthe a und b von x heissen die Gränzen des bestimmten Integrals.

Man sieht leicht, dass die Zufügung der willkürlichen Konstanten bei der unbestimmten Integration nicht nothwendig ist, da wenn $\int f(x)\,\partial x = F(x) + C$, der Werth für $x = b$ ist $F(b) + C$, für $x = a$: $F(a) + C$ und die Differenz beider: $F(b) - F(a)$, wo nun die willkürliche Konstante verschwunden ist. Diess setzt natürlich voraus, dass C dieselbe Grösse ist für $x = a$ und für $x = b$. Gemäss §. 26 wird diess der Fall seyn, wenn $f(x)$ endlich ist von $x = a$ bis $x = b$, oder „innerhalb der Gränzen der Integration", was wir auch immer vorausgesetzt haben und noch voraussetzen werden. Eben so muss nothwendig die Grösse $F(x)$ stetig verlaufen von $x = a$ bis $x = b$, d. h. ein jeder folgende Werth muss unendlich wenig verschieden seyn vom vorhergehenden. Diese Bedingung ist von grosser Wichtigkeit und es könnte, wenn sie übersehen wird, leicht ein ganz falsches Resultat zum Vorschein kommen. * (Vergl. §. 43.) Die Fundamentalgleichung (12) rechtfertigt auch die Bezeichnung des bestimmten Integrals, da es nichts Anderes ist, als die Differenz zweier Werthe des unbestimmten.

III. Dass übrigens z. B.

$$\int_a^b f(x)\,\partial x = \int_a^b f(z)\,\partial z = \int_a^b f(u)\,\partial u,$$

ist wohl von selbst klar, da wenn $\int f(x)\,\partial x = F(x)$, auch $\int f(z)\,\partial z = F(z)$, $\int f(u)\,\partial u = F(u)$, also

$$\int_a^b f(x)\,\partial x = F(b) - F(a), \int_a^b f(z)\,\partial z = F(b) - F(a), \int_a^b f(u)\,\partial u = F(b) - F(a).$$

Wie man also die „Integrations-Veränderliche" auch bezeichnen mag, ist ganz gleichgiltig. Wir können nun mittelst des Vorstehenden sogleich einige wichtige Sätze über die bestimmten Integrale nachweisen.

---

* Nach §. 10 ist $F(x)$ stetig, so lange $f(x)$ endlich, d. h. also, nach unserer Voraussetzung, innerhalb der Integrationsgränzen. Die hier angegebene Bedingung ist somit im Allgemeinen überflüssig. Für den Fall, den wir später behandeln, und ähnliche mag sie jedoch zu genauer Aufmerksamkeit auffordern. Ohne dieselbe darf man (a) nicht zulassen.

Digitized by Google

§. 42.

Allgemeine Sätze über bestimmte Integrale.

I. Es ist immer

$$\int_a^b f(x)\,\partial x = -\int_b^a f(x)\,\partial x.$$

Denn ist $\int f(x)\,\partial x = F(x)$, so ist

$$\int_a^b f(x)\,\partial x = F(b) - F(a), \int_b^a f(x)\,\partial x = F(a) - F(b),$$

woraus der Satz folgt.

II. Sind c, e, m, n beliebige Grössen, so ist

$$\int_a^b f(x)\,\partial x = \int_a^c f(x)\,\partial x + \int_c^e f(x)\,\partial x + \int_e^m f(x)\,\partial x + \int_m^n f(x)\,\partial x + \int_n^b f(x)\,\partial x.$$

Beachtet man, dass

$$\int_a^c f(x)\,\partial x = F(c) - F(a), \int_c^e f(x)\,\partial x = F(e) - F(c), \ldots\ldots, \int_n^b f(x)\,\partial x = F(b) - F(n),$$

so wird der Satz ganz von selbst folgen. Dabei ist nur vorausgesetzt, dass $f(x)$ innerhalb aller Integrationsgränzen endlich sey, da sonst von einem bestimmten Integral keine Rede seyn kann. Man heisst den in obiger Formel ausgesprochenen Satz den von der Einschiebung der Gränzen. So also wäre

$$\int_a^b f(x)\,\partial x = \int_a^c f(x)\,\partial x + \int_c^b f(x)\,\partial x = \int_a^c f(x)\,\partial x + \int_c^e f(x)\,\partial x + \int_e^b f(x)\,\partial x, \text{ u. s. w.}$$

III. Ist C eine Konstante, so ist

$$\int_a^b C f(x)\,\partial x = C\int_a^b f(x)\,\partial x.$$

Denn ist $\int f(x)\,\partial x = F(x)$, so ist (§. 26, IV) $\int C f(x)\,\partial x = C F(x)$. Demnach

$$\int_a^b C f(x)\,\partial x = C F(b) - C F(a), C\int_a^b f(x)\,\partial x = C[F(b) - F(a)],$$

woraus der Satz folgt. Eben so ist

$$\int_a^b (y \pm z \pm ..)\,\partial x = \int_a^b y\,\partial x \pm \int_a^b z\,\partial x \pm \ldots .$$

Umformung bestimmter Integrale.

IV. Da wenn x als Funktion von z angesehen wird, man hat (§. 28):

$$\int f(x)\,\partial x = \int f(x)\frac{\partial x}{\partial z}\,\partial z,$$

wo $f(x)\frac{\partial x}{\partial z}$ zuerst in z auszudrücken ist, so ist auch

$$\int_a^b f(x)\,\partial x = \int_\alpha^\beta f(x)\frac{\partial x}{\partial z}\,\partial z,$$

Digitized by Google

worin α und β die Werthe von z sind, welche den Werthen a und b von x zugehören. Denn ist

$$\int f(x)\partial x = F(x),\ \int f(x)\frac{\partial x}{\partial z}\partial z = \varphi(z),$$

so müssen die Grössen F(x), φ(z) so beschaffen seyn, dass wenn man in ersterer x durch seinen Werth in z ersetzt, dieselbe in die zweite übergeht; und umgekehrt, wenn man in φ(z) die Grösse z durch ihren Werth in x ausdrückt, so muss φ (z) in F(x) sich verwandeln. Ist also $z=\alpha$, wenn $x=a$, so sind F(a), $\varphi(\alpha)$ nothwendig gleich; eben so wenn $z=\beta$ für $x=b$, ist $F(b)=\varphi(\beta)$. Da endlich

$$\int_a^b f(x)\partial x = F(b)-F(a),\ \int_\alpha^\beta f(x)\frac{\partial x}{\partial z}\partial z = \varphi(\beta)-\varphi(\alpha),$$

so ergibt sich der behauptete Satz.

So ist (§. 28, I), wenn $z=\frac{gx}{h}$:

$$\int\frac{\partial x}{h^2+g^2x^2}=\frac{1}{gh}\int\frac{\partial z}{1+z^2},$$

also da für $x=0$ auch $z=0$, für $x=h$ aber $z=g$:

$$\int_0^h\frac{\partial x}{h^2+g^2x^2}=\frac{1}{gh}\int_0^g\frac{\partial z}{1+z^2},$$

was sich auch sofort als richtig erweist, wenn man beachtet, dass

$$\int\frac{\partial x}{h^2+g^2x^2}=\frac{1}{gh}arc\left(tg=\frac{gx}{h}\right),\ \frac{1}{gh}\int\frac{\partial z}{1+z^2}=\frac{1}{gh}arc\,(tg=z).$$

Was die Werthe von α und β anbelangt, so werden sie im Allgemeinen durch Auflösung einer Gleichung erhalten. Ist nämlich $\psi(x, z)=0$ die Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen x und z ausdrückt, so folgt aus der Gleichung $\psi(a, z)=0$ der Werth α von z, und aus $\psi(b, z)=0$ der Werth β von z. Dabei kann es sich ereignen, dass eine solche Gleichung mehrere Wurzeln zulässt, und man also in Zweifel kommen kann, welchen der Werthe man zu nehmen hat. Im Allgemeinen lässt sich hierüber Nichts aussagen, und man wird also im speziellen Falle durch demselben angemessene Betrachtungen sich entscheiden müssen, desshalb auch möglichst vermeiden, in solche Lage zu kommen.

Es kann aber noch eine zweite Schwierigkeit auftauchen. Man hat nämlich in $f(x)\frac{\partial x}{\partial z}$ die Grösse x durch ihren Werth in z zu ersetzen, wozu im Allgemeinen ebenfalls die Auflösung einer Gleichung nothwendig ist. Wenn nun diese Gleichung mehrere Wurzeln zulässt, so entsteht die Frage, welche derselben man zu wählen habe. Auch hier muss der spezielle Fall entscheiden. Es lässt sich darüber nur Folgendes im Allgemeinen sagen. Gesetzt für $x=a$ sey $z=\alpha$ und für $x=b$ sey $z=\beta$, welche Werthe unzweideutig seyen und sey $z=\varphi(x)$ die Gleichung, welche den Zusammenhang



Digitized by Google

zwischen x und z ausdrückt. Gesetzt nun, $\varphi(x)$ wachse beständig oder nehme beständig ab von $x = a$ bis $x = b$ [$\varphi'(x)$ habe dasselbe Zeichen innerhalb dieser Gränzen], so muss dasselbe auch mit z der Fall seyn, und es kann daher auch nur ein Werth von x aus der Gleichung folgen, indem sonst zu zwei verschiedenen Werthen von x derselbe Werth von z, oder zu zwei verschiedenen Werthen von z derselbe Werth von x gehören müsste, was unmöglich ist. Hat aber $\varphi(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ Maxima oder Minima, so verhält sich die Sache freilich anders. Gesetzt es komme ein solcher Werth zwischen a und b vor für $x = c$, so wird von $x = a$ bis $x = c$ der eine der Werthe in z, für $x = c$ bis $x = b$ der andere gelten, d. h. wenn für $x = c : z = \gamma$, so wird man von $z = \alpha$ bis $z = \gamma$ den einen Werth von x in z, von $z = \gamma$ bis $z = \beta$ den andern setzen. Welchen, wird man in jedem Falle leicht entscheiden.

Fig. 15.

Man wird sich das hier Gesagte am Bequemsten an einer Kurve zur Anschauung bringen (Fig. 15). Sey Ox Axe der x, Oz der z, ferner $z = \varphi(x)$ die Gleichung der Kurve, Oa die Abszisse, die der unteren Gränze des Integrals ($x = a$) zugehört. Geht nun die obere Gränze des Integrals nicht über Ob hinaus, so wird zu jedem Werthe von x auch ein einziger reeller Werth von z gehören und umgekehrt, so dass für x aus $z = \varphi(x)$ auch nur ein einziger reeller Werth (innerhalb der betreffenden Gränzen) folgen kann. Liegt dagegen die obere Gränze des Integrals $\int_a^b f(x)\partial x$ zwischen Ob und Oc, so werden zu demselben Werthe von z mehrfach zwei verschiedene Werthe von x gehören, so dass jetzt nothwendig aus $\varphi(x) = z$ zwei, aber auch nur zwei reelle Werthe von x in z folgen müssen; davon wird der eine von $x = Oa$ bis $x = Ob$, der andere von $x = Ob$ an gelten, d. h. von $z = aA$ bis $z = bB$ der eine, von $z = bB$ an der andere. Liegt die obere Gränze des Integrals zwischen Oc und Od, so werden zu demselben z drei verschiedene Werthe von x gehören können, so dass also jetzt auch drei Werthe von x in z folgen müssen. Der eine gilt von $x = Oa$ bis $x = Ob$, d. h. von $z = aA$ bis $z = bB$, der andere von $x = Ob$ bis $x = Oc$, d. h. von $z = bB$ bis $z = cC$, der dritte gilt von hier an. Wie man diese Betrachtung weiter verfolgen kann, ist leicht einzusehen. (Vergl. §. 44.)

V. Da (§. 27)

$$\int y \frac{\partial z}{\partial x} \partial x = yz - \int z \frac{\partial y}{\partial x} \partial x,$$

so ist auch

$$\int_a^b y \frac{\partial z}{\partial x} \partial x = (yz)_{x=b} - (yz)_{x=a} - \int_a^b z \frac{\partial y}{\partial x} \partial x,$$

worin durch $(yz)_{x=b}$ der Werth von yz für $x = b$ u. s. w. angedeutet wird.

Digitized by Google

Integrale mit unendlichen Gränzen.

VI. Die Grössen

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\partial x,\quad \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\partial x,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\partial x$$

sind die Werthe von $\int_a^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,\partial x, \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{a} f(x)\,\partial x, \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon'}} f(x)\,\partial x$, wenn man darin ε und ε' unendlich klein werden lässt. Sind letztere Grössen noch endlich und bestimmt, so sind es auch die ersten. Man wird also, wenn unendlich grosse Integrationsgränzen vorkommen, damit zunächst rechnen, wie mit endlichen Gränzen und sehen, ob das Ergebniss ein endliches ist oder nicht. Ist es endlich, so wird man es als richtig ansehen müssen; ist es unendlich, so kann man das bestimmte Integral in der Rechnung nicht weiter zulassen. Dabei ist natürlich immer vorausgesetzt, dass f(x) innerhalb der Integrationsgränzen endlich sey.

So ist $\int e^{-ax}\partial x = -\frac{1}{a}e^{-ax}$ (§. 28); ist nun $a>0$, so ist für $x=\infty : e^{-ax}=0$, und für $x=0 : e^{-ax}=1$, so dass also

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\partial x = \frac{1}{a},\quad a>0.$$

Nach den obigen Vorschriften wäre

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\partial x = Gr\left[-\frac{1}{a}e^{-\frac{a}{\varepsilon}}+\frac{1}{a}\right]$$

und da $Gr\, e^{-\frac{a}{\varepsilon}}=0$ (wegen $Gr\frac{1}{e^{\frac{a}{\varepsilon}}}=0$), so erhält man dasselbe.

Ferner $\int e^{-ax}\sin x\,\partial x = -\frac{e^{-ax}(a\sin x+\cos x)}{1+a^2}$ (§. 35, IV), und da für $a>0$ jedenfalls e^{-ax} zu Null wird mit $x=+\infty$, $a\sin x+\cos x$ aber für alle x endlich bleibt, ferner für $x=0 : e^{-ax}(a\sin x+\cos x)=1$, so ist

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin x\,\partial x = \frac{1}{1+a^2}.$$

VII. Ist in dem Integrale $\int_a^b f(x)\,\partial x$ die Funktion f(x) so beschaffen, dass sie von $x=a$ bis $x=\frac{1}{2}(a+b)$ dieselben Werthe hat, wie von $x=\frac{1}{2}(a+b)$ bis zu $x=b$, gleichgiltig, in welcher Ordnung diese Werthe auf einander folgen, so ist (Nr. II):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} f(x)\,\partial x + \int_{\frac{1}{2}(a+b)}^{b} f(x)\,\partial x,$$

und wenn $\Delta x = \frac{b-a}{2m} = \frac{\frac{1}{2}(a+b)-a}{m} = \frac{b-\frac{1}{2}(a+b)}{m}$:

Digitized by Google

$$\int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} f(x)\,\partial x = Gr\,\Delta x\left[f(a)+f(a+\Delta x)+\ldots+f\left(\frac{a+b}{2}-\Delta x\right)\right],$$

$$\int_{\frac{1}{2}(a+b)}^b f(x)\,\partial x = Gr\,\Delta x\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}+\Delta x\right)+\ldots+f(b-\Delta x)\right];$$

mithin, da die Summen $f(a)+\ldots+f[\frac{1}{2}(a+b)-\Delta x]$, $f[\frac{1}{2}(a+b)]+\ldots.. + f(b-\Delta x)$ einander gleich:

$$\int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} f(x)\,\partial x = \int_{\frac{1}{2}(a+b)}^b f(x)\,\partial x,$$

also

$$\int_a^b f(x)\,\partial x = 2\int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} f(x)\,\partial x.$$

Wären dagegen von $x=a$ bis $x=\frac{1}{2}(a+b)$ die Werthe von $f(x)$ zwar gleich denen von $x=\frac{1}{2}(a+b)$ bis $x=b$, jedoch immer mit entgegengesetztem Zeichen, so wäre offenbar

$$\int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} f(x)\,\partial x = -\int_{\frac{1}{2}(a+b)}^b f(x)\,\partial x,\quad \int_a^b f(x)\,\partial x = 0.$$

Wie man ähnliche Sätze aufstellen kann, ist so leicht zu übersehen dass wir uns dabei nicht weiter aufhalten wollen.

VIII. Gesetzt endlich man solle $\int_a^b y\,\partial x$ bestimmen und es sey $y=f(x)$ von $x=a$ bis $x=c$; $y=F(x)$ von $x=c$ bis $x=b$, wo c zwischen a und b liegt: so hat man

$$\int_a^b y\,\partial x = \int_a^c y\,\partial x + \int_c^b y\,\partial x = \int_a^b f(x)\,\partial x + \int_c^b F(x)\,\partial x.$$

Wie man in anderen ähnlichen Fällen sich zu helfen habe, folgt hieraus unmittelbar.

Wir haben immer auf die wesentliche Bedingung aufmerksam gemacht, dass in $\int_a^b f(x)\,\partial x$ die Grösse $f(x)$ endlich seyn müsse innerhalb der Gränzen der Integration. Diese Bedingung ist auch ganz unerlässlich. Nichts desto weniger kann es sich ereignen, dass wir bestimmte Integrale betrachten werden, für die $f(x)$ an den Gränzen, d. h. für $x=a$ oder $x=b$ unendlich ist. Kann man nachweisen, dass man nach den allgemeinen Methoden für solche Integrale endliche Werthe erhält, so muss man dieselben gelten lassen, da die Gleichung (12) nur wesentlich voraussetzt, dass $f(x)$ innerhalb der Integrationsgränzen endlich sey. Doch gehört immer gehörige Vorsicht bei der Anwendung solcher Integrale dazu, um nicht in Irrthümer zu verfallen.

Bezeichnung.

IX. In Bezug auf die Bezeichnung gilt das in §. 28 bereits Gesagte. Es stehen sich also hier $\int_a^b f(x,y)\,\partial x$ und $\int_a^b f(x,y)\,dx$ wesentlich gegenüber. So ist, wenn $y=\sin x$:

Digitized by Google

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,y\,\partial x = y\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\partial x;\quad \int x\,\partial x = \frac{x^2}{2},\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,y\,\partial x = y\,\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2 \sin x}{8};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,dx,\quad \int x \sin x\,dx = -x\cos x + \sin x,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,y\,dx = 1.$$

Die Grössen $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,\partial x$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,dx$ können übrigens nur Dasselbe bedeuten. Eben so $\int_a^b f(y,z)\,\partial x$ und $\int_a^b f(y,z)\,dx$, wenn y, z Funktionen von x sind. Die Grössen $\int_a^b f(y,z)\,\partial z$, $\int_a^b f(y,z)\,dz$, worin y als Funktion von z angesehen ist, haben natürlich verschiedene Bedeutung, indem in ersterer y als konstant, in der zweiten aber als veränderlich behandelt wird.

§. 43.

Vorläufige Bemerkung.

Ehe wir zu Beispielen übergehen, wollen wir nochmals auf die schon in §. 41, II gemachte Bemerkung hinweisen, dass nämlich die Formel (12) ganz nothwendig voraussetzt, nicht nur dass f(x) endlich sey von $x=a$ bis $x=b$, sondern auch dass F(x) innerhalb derselben Gränzen stetig verlaufe, d. h. dass wenn man x von a bis b sich stetig verlaufend denkt, auch die auf einander folgenden Werthe von F(x) in derselben Lage sind. Im Allgemeinen wird diess auch der Fall bei F(x) seyn (§. 26), doch können Fälle eintreten, die als zweifelhaft erscheinen. Betrachten wir z. B. die Grösse $arc\left(tg=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$ und lassen x von $-a$ bis $+a$ gehen, wobei wir immer $arc\,(tg=z)$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ wählen, so wird für $x=-a$, $\sqrt{a^2-x^2}=0$, also $arc\left(tg=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)=0$; eben so für $x=a$ wird $arc\left(tg=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)=0$. Aber die Grösse $arc\left(tg=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$ verläuft nicht stetig von 0 zu 0. Denn lässt man x gehen von $-a$ bis 0, so wird $arc\left(tg=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$ allerdings stetig verlaufen von 0 bis $-\frac{\pi}{2}$; von $x=0$ bis $x=+a$ aber wird sie nicht von $-\frac{\pi}{2}$ nach 0 zurückkehren, da jetzt $\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$ positiv ist, vielmehr wird sie für $x=0$ von $-\frac{\pi}{2}$ zu $+\frac{\pi}{2}$ überspringen und dann stetig von $\frac{\pi}{2}$ nach 0 zurückkehren. In solchem Falle muss man das Integral in zwei abtrennen. Da $\frac{\partial}{\partial x}\,arc\left(tg=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)=-\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$, so ist also $\int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-arc\left(tg=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$ und wenn man setzen wollte $\int_{-a}^{+a}\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-arc\,(tg=0)+arc\,(tg=0)=0$, so würde man einen wesentlichen Irrthum begehen. Man hat jetzt:

Digitized by Google

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int_{-a}^{0}\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}+\int_{0}^{+a}\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-arc\,(tg=-\infty)+arc\,(tg-0)$$
$$-arc\,(tg=0)+arc\,(tg=\infty)=\pi,$$

wie auch schon daraus folgt, dass (§. 42, VII)

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}=2\int_{0}^{a}\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-2\,arc\,(tg=0)+2\,arc\,(tg=+\infty)=\pi.$$

Uebrigens ist auch $\int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}=arc\left(sin=\frac{x}{a}\right)$, woraus, da von $x=-a$ bis $x=+a$, $arc\left(sin=\frac{x}{a}\right)$ stetig von $-\frac{\pi}{2}$ zu $+\frac{\pi}{2}$ verläuft, folgt $\int_{-a}^{+a}\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}=arc\,(sin=1)-arc\,(sin=-1)=\pi$. Man kann überdiess noch bemerken, dass wir in §. 13, V in Wahrheit nicht gezwungen waren, $arc\,(tg=x)$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ anzunehmen, indem immerhin $cos^2 y=\frac{1}{1+tg^2 y}$ seyn wird; wohl aber wäre nicht $cos\,y=+\sqrt{1-sin^2 y}$, wenn man nicht $arc\,(sin=x)$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ nähme. (Vergl. §. 157, IV).

Beispiele der Ermittlung unbestimmter Integrale.

I. Da $\int x^m\partial x=\frac{x^{m+1}}{m+1}$, so ist (da bei $m+1>0$, $x^{m+1}=0$, für $x=0$)

$$\int_0^1 x^m\partial x=\frac{1}{m+1},\quad m+1>0.$$

Da ferner (§. 28) $\int\frac{\partial x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arc\left(tg=\frac{x}{a}\right)$, und bei $a>0$ für $x=\infty$ nothwendig $arc\left(tg=\frac{x}{a}\right)=\frac{\pi}{2}$, für $x=0$ aber $arc\left(tg=\frac{x}{a}\right)=0$, so ist

$$\int_0^\infty\frac{\partial x}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{2a},\quad\int_0^a\frac{\partial x}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{4a},\quad a>0.$$

Eben so (da e^{-ax} Null für $x=\infty$, wenn $a>0$):

$$\int_0^\infty e^{-ax}\partial x=\frac{1}{a},\ a>0;\ \int_0^\pi sin\,a\,x\,\partial x=\frac{1-cos\,a\,\pi}{a},\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^2 x\,\partial x=\frac{\pi}{4}.$$

II. Nach §. 34 ist

$$\int sin^{2n}x\,\partial x=-\frac{sin^{2n-1}x\,cos\,x}{2n}+\frac{2n-1}{2n}\int sin^{2n-2}x\,\partial x,$$

demnach da für $x=\frac{\pi}{2}$, $cos\,x=0$, für $x=0: sin^{2n-1}x=0$, nach §. 42, V:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{2n}x\,\partial x=\frac{2n-1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{2n-2}x\,\partial x.$$

Eben so

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{2n+1}x\,\partial x=\frac{2n}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{2n-1}x\,\partial x,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^{2n}x\,\partial x=\frac{2n-1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^{2n-2}x\,\partial x,$$

Digitized by Google

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x \,\partial x = \frac{2n}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} x \,\partial x.$$

Diesen Reduktionsformeln gemäss ist, da $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial x = \frac{\pi}{2}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\partial x = 1$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\partial x = 1$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \,\partial x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \,\partial x = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{2n(2n-2)\ldots 2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \,\partial x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x \,\partial x = \frac{2n(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3}.$$

III. Setzt man in §. 35, IV $-a$ für a, so ist

$$\int e^{-ax}\sin^n x\,\partial x = -\frac{e^{-ax}\sin^{n-1} x\,(a\sin x + n\cos x)}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{n^2+a^2}\int e^{-ax}\sin^{n-2} x\,\partial x,$$

$$\int e^{-ax}\cos^n x\,\partial x = \frac{e^{-ax}\cos^{n-1} x\,(n\sin x - a\cos x)}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{n^2+a^2}\int e^{-ax}\cos^{n-2} x\,\partial x,$$

Da für $x=\infty: e^{-ax}=0$, wenn $a>0$, und sowohl $(a\sin x + n\cos x)\sin^{n-1} x$ als $(n\sin x - a\cos x)\cos^{n-1} x$ für $x=\infty$ nicht ∞ sind; da ferner für $x=0: \sin^{n-1} x = 0$, wenn $n>1$, und für $x=\frac{\pi}{2}: \cos^{n-1} x = 0$, wenn $n>1$, so folgt hieraus (§. 42, VI):

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin^n x\,\partial x &= \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin^{n-2} x\,\partial x,\\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-ax}\cos^n x\,\partial x &= \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-ax}\cos^{n-2} x\,\partial x.\end{aligned}\right\}\quad n>1,\ a>0.$$

Unterscheidet man ein gerades und ungerades n, und beachtet, dass (§. 35):

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\partial x = \frac{1}{a},\quad \int_0^{\infty} e^{-ax}\sin x\,\partial x = \frac{1}{a^2+1},\quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} e^{-ax}\partial x = \frac{e^{-\frac{a\pi}{2}}}{a},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-ax}\cos x\,\partial x = \frac{-e^{-\frac{a\pi}{2}}}{1+a^2},$$

so ist

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin^{2m} x\,\partial x = \frac{2m(2m-1)\ldots 2.1}{[a^2+(2m)^2][a^2+(2m-2)^2]\ldots[a^2+2^2]}\cdot\frac{1}{a}.$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin^{2m+1} x\,\partial x = \frac{(2m+1)2m\ldots 3.2}{[a^2+(2m+1)^2][a^2+(2m-1)^2]\ldots[a^2+3^2]}\cdot\frac{1}{a^2+1}.$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-ax}\cos^{2m} x\,\partial x = \frac{2m(2m-1)\ldots.2.1}{[a^2+(2m)^2][a^2+(2m-2)^2]\ldots.[a^2+2^2]}\cdot\frac{e^{-\frac{a\pi}{2}}}{a},$$

Digitized by Google

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-ax} \cos^{2m+1} x \,\partial x = -\frac{(2m+1)(2m)\ldots 3.2}{[a^2+(2m+1)^2][a^2+(2m-1)^2]\ldots[a^2+3]^2} \cdot \frac{e^{-\frac{a\pi}{2}}}{a^2+1}, \quad a>0.$$

Ganz eben so aus §. 35, III:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \,\partial x = \frac{b}{a^2+b^2}, \quad \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \,\partial x = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad a>0.$$

IV. Soll das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial x}{a+b\cos x}$$

ermittelt werden wenn a und b positiv sind, so hat man sich zunächst an die Formeln in §. 36 III zu halten. Da $a+b\cos x$ jetzt nicht 0 werden kann, von $x=0$ bis $x=\frac{\pi}{2}$, so ist das bestimmte Integral zulässig. Sey also $a>0$, $b>0$, so ist

$$\int \frac{\partial x}{a+b\cos x} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \, arc\left(tg = tg\frac{x}{2} \cdot \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right), & a>b, \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \, l\left(\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\,tg\frac{x}{2}}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\,tg\frac{x}{2}}\right), & b>a, \\ \frac{1}{a}\, tg\frac{x}{2}, & b=a. \end{cases}$$

Demnach, da $tg\frac{x}{2}$ stetig verläuft von $x=0$ bis $x=\frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial x}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \, arc\left(tg = tg\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right) =$$

$$\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \, arc\left(tg = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right), \quad a>b>0;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial x}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \, l\left(\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}}\right) - \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \, l(+1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \, l\left(\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}}\right) = \frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}} \, l\left(\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}}{\sqrt{2a}}\right), \quad b>a>0.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial x}{a+b\cos x} = \frac{1}{a}, \quad a=b>0.$$

V. Es ist, wie man aus §. 27 leicht findet:

$$\int x^n e^{-x} \partial x = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1} e^{-x} \partial x.$$

Ist nun $n>0$, so ist für $x=0$; $x^n e^{-x}=0$, und für $x=\infty : x^n e^{-x}=0$, wie sich aus §. 22, V ergibt. Demnach

Digitized by Google

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\partial x = n\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\partial x,$$

woraus, da $\int_0^\infty e^{-x}\partial x = 1$:

$$\int_0^\infty e^{-x}x^n\partial x = n(n-1)(n-2)\ldots 1, \quad n>0.$$

So folgt aus §. 27, IV auch:

$$\int_0^1 x^n l(x)\partial x = -\frac{1}{(n+1)^2}, \quad n+1>0 \text{ (§. 22)}.$$

VI. Es ist (§. 42, VII):

$$\int_0^\pi \sin x\,\partial x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\partial x, \quad \int_0^\pi \cos x\,\partial x = 0, \quad \int_0^\pi \sin^n x\,\partial x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\partial x.$$

$$\int_0^\pi \cos^{2n} x\,\partial x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,\partial x, \int_0^\pi \cos^{2n+1} x\,\partial x = 0, \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial x}{a^2+x^2} = 2\int_0^\infty \frac{\partial x}{a^2+x^2},$$

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\partial x}{\sqrt{a^2+x^2}} = 2\int_0^a\frac{\partial x}{\sqrt{a^2+x^2}}, \int_0^{2\pi}\sin^{2n}x\,\partial x = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,\partial x, \int_0^{2\pi}\sin^{2n+1}x\,\partial x = 0,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\partial x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\partial x, \int_{-a}^{+a} f(x^{2n})\,\partial x = 2\int_0^a f(x^{2n})\,\partial x, \int_{-a}^{+a}(Ax^3+Bx^5)\,\partial x = 0.$$

VII. Man soll

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\partial x}{(r^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}},$$

worin $r>a>0$ ist, ermitteln. Man setze $x = a\cos\varphi$, was immer gestattet ist, da $x<a$, so ist (§. 36):

$$\int\frac{\partial x}{(r^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} = \int\frac{-a\sin\varphi\,\partial\varphi}{(r^2-a^2\cos^2\varphi)\sqrt{a^2-a^2\cos^2\varphi}} = -\int\frac{\partial\varphi}{r^2-a^2\cos^2\varphi}$$

(weil $\sqrt{a^2-a^2\cos^2\varphi} = \sqrt{a^2\sin^2\varphi} = a\sin\varphi$, indem $\sin\varphi$ nur positiv ist)

$$= -\frac{1}{2r}\int\left(\frac{1}{r+a\cos\varphi}+\frac{1}{r-a\cos\varphi}\right)\partial\varphi = -\frac{1}{2r}\frac{2}{\sqrt{r^2-a^2}}\left[arc\left(tg = tg\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}\right)\right.$$

$$\left.+\,arc\left(tg = tg\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{r+a}{r-a}}\right)\right] = -\frac{1}{r\sqrt{r^2-a^2}}\left[arc\left(tg = tg\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}\right)\right.$$

$$\left.+\,arc\left(tg = tg\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{r+a}{r-a}}\right)\right].$$

Für $x = -a$ ergibt sich aus $x = a\cos\varphi : \cos\varphi = -1$, $\varphi = \pi$, für $x = +a$ aber $\cos\varphi = 1$, $\varphi = 0$. Da ferner $tg\frac{\varphi}{2}$ von $\varphi = \pi$ bis $\varphi = 0$ ganz stetig (von ∞ zu 0) verläuft, überdiess für $\varphi = \pi$: $arc\left(tg = tg\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}\right) = arc\left(tg = tg\frac{\pi}{2}\right.$

Digitized by Google

$\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}\Big) = arc\,(tg=\infty) = \frac{\pi}{2}$, und ebenso dann $arc\left(tg = tg\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{r+a}{r-a}}\right) = \frac{\pi}{2}$, so ist endlich

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\partial x}{(r^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} = -\int_\pi^0\frac{\partial\varphi}{r^2-a^2\cos^2\varphi} = -\frac{1}{r\sqrt{r^2-a^2}}\left[0+0-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi}{r\sqrt{r^2-a^2}};\; r>a>0.$$

§. 44.

Ermittlung einiger allgemeineren Integrale.

I. Sey $f\left(ax+\frac{b}{x}\right)$ eine Funktion von $ax+\frac{b}{x}$, die man also erhält, wenn man in $f(z)$ für z setzt $ax+\frac{b}{x}$, und sey das Integral

$$\int_0^\infty f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\partial x$$

vorgelegt, von dem wir annehmen wollen, dass es zulässig sey, d. h. dass $f\left(ax+\frac{b}{x}\right)$ endlich sey von $x=0$ bis $x=\infty$. Man setze

$$ax+\frac{b}{x}=z,\; x=\frac{z}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{z^2-4ab},\; \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{2a}\pm\frac{z}{2a\sqrt{z^2-4ab}},$$

so ist (§. 28):

$$\int f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\partial x = \frac{1}{2a}\int\left(1\pm\frac{z}{\sqrt{z^2-4ab}}\right)f(z)\,\partial z,$$

und es frägt sich nun, welches der zwei Zeichen im bestimmten Integral zuzulassen ist (§. 42, IV). Setzen wir a und b positiv voraus, so ist $ax+\frac{b}{x}$ unendlich für $x=0$ und $x=\infty$, aber immer positiv innerhalb dieser Gränzen; diese Grösse erreicht ihren kleinsten Werth für $a-\frac{b}{x^2}=0$ (§. 24), d. h. $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$; von $x=0$ bis $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$ nimmt also $ax+\frac{b}{x}$, mithin auch z, fortwährend ab (von ∞ bis $a\sqrt{\frac{a}{b}}+b\sqrt{\frac{a}{b}}=2\sqrt{ab}$); von $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$ bis $x=\infty$ nimmt dagegen $ax+\frac{b}{x}$ (also auch z) fortwährend zu und zwar von $2\sqrt{ab}$ bis ∞. Demnach muss z gehen: erstens abnehmend von $z=\infty$ bis $z=2\sqrt{ab}$ $\left(x \text{ von Null bis } \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, zweitens zunehmend von $z=2\sqrt{ab}$ bis $z=\infty$ (x von $\sqrt{\frac{b}{a}}$ bis ∞).

Soll aber für $z=\infty$ die Grösse $x=0$ seyn, so ist diess nur möglich, wenn das untere Zeichen gilt, da $\frac{z}{2a}+\frac{1}{2a}\sqrt{z^2-4ab}$ für $z=\infty$ nicht 0 ist;

Digitized by Google

soll für $z=\infty$ die Grösse $x=\infty$ seyn, so muss das obere Zeichen gelten. Demnach:

von $x=0$ bis $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$, d. h. von $z=\infty$ bis $z=2\sqrt{ab}$ gilt das untere Zeichen,

von $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$ bis $x=\infty$, d. h. von $z=2\sqrt{ab}$ bis $z=\infty$ gilt das obere Zeichen,

und man sieht leicht, dass dann wirklich allen Bedingungen Genüge geschieht. Somit ist

$$\int_0^\infty f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\partial x=\int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\partial x+\int_{\sqrt{\frac{b}{a}}}^\infty f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\partial x$$

$$=\frac{1}{2a}\int_\infty^{2\sqrt{ab}} f(z)\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2-4ab}}\right)\partial z+\frac{1}{2a}\int_{2\sqrt{ab}}^\infty f(z)\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2-4ab}}\right)\partial z$$

$$=\frac{1}{2a}\int_\infty^{2\sqrt{ab}} f(z)\,\partial z-\frac{1}{2a}\int_\infty^{2\sqrt{ab}}\frac{z f(z)}{\sqrt{z^2-4ab}}\partial z+\frac{1}{2a}\int_{2\sqrt{ab}}^\infty f(z)\,\partial z+\frac{1}{2a}\int_{2\sqrt{ab}}^\infty\frac{z f(z)\,\partial z}{\sqrt{z^2-4ab}},$$

d. h. gemäss §. 42, I:

$$\int_0^\infty f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\partial x=\frac{1}{a}\int_{2\sqrt{ab}}^\infty\frac{z f(z)\,\partial z}{\sqrt{z^2-4ab}}.$$

Letzteres Integral lässt sich nochmals umformen. Setzt man nämlich $z^2-4ab=u^2$, $z\frac{\partial z}{\partial u}=u$, $\sqrt{z^2-4ab}=u$, so sind die Gränzen nach u: 0 und ∞, so dass

$$\int_0^\infty f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\partial x=\frac{1}{a}\int_0^\infty\frac{u f(\sqrt{u^2+4ab})\,\partial u}{u}=\frac{1}{a}\int_0^\infty f(\sqrt{u^2+4ab})\,\partial u, \text{ (a und b pos.)}.$$

II. Sey das Integral $\int_0^{2\pi} f(a\cos x+b\sin x)\,\partial x$ umzuformen, wobei a und b positiv sind.

Setzt man $a\cos x+b\sin x=z$, so wird, wenn $\frac{b}{a}=tg\varrho$, z ein Maximum erreichen für $x=\varrho\left(<\frac{\pi}{2}\right)$, und alsdann $=\sqrt{a^2+b^2}$ seyn, während für $x=\pi+\varrho$ das Minimum von $z=-\sqrt{a^2+b^2}$ ist. Sey also $\sqrt{a^2+b^2}=k$, so ist

z stetig von $x=0$ bis $x=\varrho$, und hat die Gränzwerthe a und k,
z stetig von $x=\varrho$ bis $x=\pi+\varrho$, und hat die Gränzwerthe k und $-$k,
z stetig von $x=\pi+\varrho$ bis $x=2\pi$, und hat die Gränzwerthe $-$k und a.

Ferner ist $z=a\cos x+b\sin x=a[\cos x+tg\varrho\sin z]=\frac{a\cos(\varrho-x)}{\cos\varrho}$, $\cos(\varrho-x)$ $=\frac{z\cos\varrho}{a}$; $\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{b\cos x-a\sin x}=\frac{1}{a[tg\varrho\cos x-\sin x]}=\frac{\cos\varrho}{a\sin(\varrho-x)}=\pm\frac{\cos\varrho}{a\sqrt{1-\frac{z^2\cos^2\varrho}{a^2}}}$ $=\pm\frac{\cos\varrho}{\sqrt{a^2-z^2\cos^2\varrho}}$. Hier gilt das obere Zeichen von $x=0$ bis $x=\varrho$, und

Digitized by Google

$x = \pi + \varrho$ bis $x = 2\pi$, da dann $\sin(\varrho - x) > 0$; von $x = \varrho$ bis $x = \pi + \varrho$ gilt das untere Zeichen. Man hat also

$$\int_0^{2\pi} f(a \cos x + b \sin x) \partial x = \int_0^{\varrho} f(a \cos x + b \sin x) \partial x + \int_{\varrho}^{\pi+\varrho} f(a \cos x + b \sin x) \partial x$$

$$+ \int_{\pi+\varrho}^{2\pi} f(a \cos x + b \sin x) \partial x$$

$$= \int_a^k \frac{f(z) \cos \varrho \, \partial z}{\sqrt{a^2 - z^2 \cos^2 \varrho}} - \int_k^{-k} \frac{f(z) \cos \varrho \, \partial z}{\sqrt{a^2 - z^2 \cos^2 \varrho}} + \int_{-k}^{a} \frac{f(z) \cos \varrho \, \partial z}{\sqrt{a^2 - z^2 \cos^2 \varrho}}$$

$$= \int_{-k}^{+k} \frac{f(z) \cos \varrho \, \partial z}{\sqrt{a^2 - z^2 \cos^2 \varrho}} + \int_{-k}^{+k} \frac{f(z) \cos \varrho \, \partial z}{\sqrt{a^2 - z^2 \cos^2 \varrho}} = 2 \int_{-k}^{+k} \frac{f(z) \cos \varrho \, \partial z}{\sqrt{a^2 - z^2 \cos^2 \varrho}} \text{ (§. 42, II, I).}$$

Da $z \cos \varrho < a \left(\text{weil } \cos \varrho = \frac{a}{k}\right)$, so sey $z \cos \varrho = a \sin \varphi$, also $\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{a \cos \varphi}{\cos \varrho}$ $= k \cos \varphi$, so sind die Gränzen von $\varphi: -\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, und da $z = k \sin \varphi$, so ist endlich

$$\int_0^{2\pi} f(a \cos x + b \sin x) \partial x = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(k \sin \varphi) \partial \varphi, \quad k = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

III. Ist das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) \cos x \, \partial x$ vorgelegt, so hat man (§. 42, II):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) \cos x \, \partial x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x) \cos x \, \partial x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) \cos x \, \partial x.$$

Da aber $\sin 2x$ von $x = \frac{\pi}{4}$ bis $x = \frac{\pi}{2}$ ganz dieselben Werthe hat, wie $\sin 2x$ von $x = \frac{\pi}{4}$ bis 0, und dessgleichen $\cos x$ von $x = \frac{\pi}{4}$ bis $\frac{\pi}{2}$ dieselben Werthe wie $\sin x$ von $x = \frac{\pi}{4}$ bis 0, so ist

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) \cos x \, \partial x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x) \sin x \, \partial x,$$

was man auch findet, wenn man $x = \frac{\pi}{2} - z$ setzt. Also:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) \cos x \, \partial x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)(\cos x + \sin x) \partial x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x) \sqrt{1 + \sin 2x} \, \partial x.$$

Man setze nun $\sin 2x = \cos^2 z$, was man darf, da $\sin 2x$ immer positiv ist von 0 bis $\frac{\pi}{4}$ für x, so ist

$$\cos 2x \frac{\partial x}{\partial z} = -\sin z \cos z, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\sin z \cos z}{\cos 2x}.$$

Digitized by Google

Die Grösse $\cos 2x$ ist positiv von $x=0$ bis $x=\frac{\pi}{4}$, also ist

$$\frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{\sin z\cos z}{\sqrt{1-\sin^2 2x}}=-\frac{\sin z\cos z}{\sqrt{1-\cos^4 z}}=-\frac{\sin z\cos z}{\sqrt{1-\cos^2 z}\sqrt{1+\cos^2 z}}=-\frac{\cos z}{\sqrt{1+\cos^2 z}},$$

und mithin

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x\,\partial x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{f(\cos^2 z)\sqrt{1+\cos^2 z}\cos z\,\partial z}{\sqrt{1+\cos^2 z}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 z)\cos z\,\partial z,$$

so dass

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x\,\partial x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x)\cos x\,\partial x.$$

Achter Abschnitt.

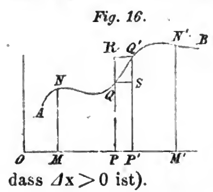
Anwendung der bestimmten Integrale auf Berechnung von Flächen- und Körper-Inhalten, so wie von Bogenlängen.

§. 45.

Quadratur ebener Kurven.

I. Stellen wir uns zunächst die Aufgabe, das Flächenstück zu berechnen, das (Fig. 16) zwischen den beiden Ordinaten MN, M'N', die zu den Abszissen OM = a, OM' = b gehören, dem Abszissen-Axenstück MM' (= b − a) und der Kurve NN' liege, so ist, wenn OP = x, die Fläche MPQN = u, nach §. 20, II: $Gr\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}=y$, wo y die (positive) Ordinate ist, welche das Flächenstück PQQ'P' in seinem Anfang begränzt, diesen Anfang nach der Richtung wachsender x gezählt (so dass $\Delta x > 0$ ist).

Fig. 16.



Denken wir uns nun, man theile MM' in n gleiche Theile, jeden gleich Δx, und errichte in den Theilpunkten die Ordinaten, so wird dadurch das zu berechnende Flächenstück in n Theile zerfallen, welche von der Art des Stücks PQQ'P' sind, und zusammen die ganze Fläche MNN'M' ausmachen, welcher Satz richtig ist, wie klein auch Δx (d. h. wie gross n) ist.

Sind $\Delta u_1, \Delta u_2, \ldots, \Delta u_n$ die einzelnen Flächenstücke, so ist also, wenn f die gesuchte Fläche bezeichnet:

$$f=\Delta u_1+\Delta u_2+\ldots+\Delta u_n.$$



Digitized by Google

Aber da $\frac{\partial u}{\partial x} = y$, so ist (§. 15, I) $\Delta u = y \Delta x + \alpha \Delta x$, wo $Gr\, \alpha = 0$; demnach auch

$$\Delta u_1 = y_1 \Delta x + \alpha_1 \Delta x,\ \Delta u_2 = y_2 \Delta x + \alpha_2 \Delta x, \ldots\ldots, \Delta u_n = y_n \Delta x + \alpha_n \Delta x,$$

wo $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ die in M, dem 1ten, 2ten, ..., $n-1^{ten}$ Theilpunkte errichteten Ordinaten bedeuten, und für alle α obige Bemerkung gilt. Daraus folgt

$$f = (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)\Delta x + (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\Delta x,$$
$$(y_1 + y_2 + \ldots. + y_n)\Delta x = f - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\Delta x,$$

und da diess für alle Δx wahr ist, auch:

$$Gr\,(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)\Delta x = f - Gr\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\Delta x, \qquad \text{(a)}$$

wo Gr sich auf abnehmende Δx (also wachsende n) bezieht, und beachtet ist, dass f von Δx ganz unabhängig ist.

Nun ist y eine Funktion von x, wie die Gleichung der Kurve AB sie liefert; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sind die Werthe derselben für $x = a$, $a + \Delta x$, $a + 2\Delta x$, ..., $b - \Delta x$. Demnach ist (§. 39)

$$Gr\,[y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n]\Delta x = \int_a^b y\,\partial x.$$

Weiter ist nach §. 7, IV (und wie §. 41, I):

$$Gr\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\Delta x = 0,$$

so dass die Gleichung (a) gibt $\int_a^b y\,\partial x = f$, d. h.

$$f = \int_a^b y\,\partial x. \qquad \text{(b)}$$

Diese Formel setzt aber wesentlich voraus, dass die Fläche innerhalb der betrachteten Gränzen immer wachse mit wachsendem x, da sonst $\frac{\partial u}{\partial x} = -y$ seyn würde; oder, wenn man sich etwas anders ausdrücken will, dass bei bloss positiven y, wie wir vorausgesetzt, $b - a > 0$ sey, und der Kurvenbogen NN' von $x = a$ bis $x = b$ keine Zurückbiegung habe (also nicht etwa verlaufe wie Fig. 3 in §. 20).

Man ersieht hieraus, dass, weil $\frac{\partial u}{\partial x} = y$ war, folgen musste $f = \int_a^b y\,\partial x$, so dass überhaupt, wenn $Gr\,\frac{\Delta v}{\Delta x} = z$ ist, und v eine geometrische Grösse, die von $x = a$ bis $x = b$ sich erstreckt, ganz nothwendig diese ganze Grösse $= \int_a^b z\,\partial x$ seyn wird.

In der Sprache unendlich kleiner Grössen hätte man sagen können, das unendlich kleine Element der zu berechnenden Fläche sey $y\,dx$, und da die Summe aller dieser Elemente die fragliche Fläche ausmache, so sey also $\int_a^b y\,dx$ (d. h. eben diese Summe) der Inhalt derselben.

Endlich liesse sich das Gesagte auch in folgender Weise darstellen. Es ist ganz gewiss

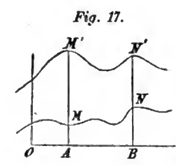
$$f = \int_0^f \partial u \quad (\text{§. 41, I})$$

Digitized by Google

Demnach, wenn man statt u die neue Veränderliche x einführt und beachtet, dass wenn u = f (wo u nothwendig ein Stück MPQN ist), d. h. wenn man statt MPQN die ganze Fläche MM'N'N nimmt, x = b ist, und wenn u = 0 : x = a, so ist (§. 42, IV):

$$f = \int_a^b \frac{\partial u}{\partial x} \partial x = \int_a^b y \, \partial x. \quad (§. 20, II).$$

Fig. 17.



II. Will man das Flächenstück zwischen MM', NN' (Fig. 17) und den zwei Kurven MN, M'N', berechnen, so beachte man, dass, wenn a und b die Abszissen von A und B sind:

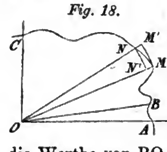
$$ABM'N' = \int_a^b y \, \partial x, \quad ABMN = \int_a^b y_1 \, \partial x,$$

wo y und y_1, als Funktionen von x, die Ordinaten der Kurven M'N', MN sind. Also ist

$$MNN'M' = \int_a^b y \, \partial x - \int_a^b y_1 \, \partial x = \int_a^b (y - y_1) \, \partial x. \qquad \text{(c)}$$

Die Formel (b) setzt voraus, dass die begränzende Kurve die Abszissenaxe innerhalb der betrachteten Ausdehnung nicht durchschneide, da dann ohnehin die ursprüngliche Aufgabe nicht mehr gestellt werden könnte, wie z. B. in Fig. 7 (§. 24) man nicht fragen kann, welche Fläche zwischen C c und G g liege. Ferner haben wir die Ordinaten nur auf der positiven Seite der y angenommen; läge in Fig. 16 NN' auf der negativen Seite der y, so würde man, da f immer nur positiv ist, — y statt y in Rechnung stellen. Würde in Fig. 17 die Kurve MN auf der Seite der negativen y liegen, so würde dennoch die Formel (c) gelten, da dann zwar $AMNB = \int_a^b (-y_1) \partial x$ wäre, aber zu ABN'M' addirt werden müsste. In diesem Falle kann also ganz wohl MN die Abszissenaxe durchschneiden; die beiden Kurven selbst aber dürfen sich nicht durchschneiden, oder aber wenn diess geschieht, so muss dann die Formel (c) nicht über den Durchschnittspunkt hinaus erstreckt werden. Jenseits desselben wäre es nämlich wohl möglich, dass $y_1 - y$ an die Stelle von $y - y_1$ zu treten hätte, wenn dann die zweite Kurve über die erste zu stehen kommt.

Fig. 18.



III. Stellt man sich endlich die Aufgabe, die Fläche des Ausschnitts BOC (Fig. 18) zu berechnen, wenn die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten gegeben ist, so ist (§. 20, IV) für BOM = u; $\frac{\partial u}{\partial \omega} = \frac{1}{2} r^2$, wenn ω den Winkel MOA, r den Fahrstrahl OM bedeutet, der eine Funktion von ω ist. Sind also ω_1, ω_2 die Werthe von BOA, COA, so folgt hieraus wie in I:

$$BOC = \frac{1}{2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} r^2 \partial \omega,$$

wobei vorausgesetzt ist, dass mit wachsender Fläche auch ω stetig wachse, so dass also Zurückbiegungen der Kurve innerhalb des betrachteten

Digitized by Google

Ausschnitts nicht vorkommen dürfen. (D. h. also, wenn man auf der Kurve von B bis C fortgeht, muss ω immer wachsen; im andern Falle würde man die Aufgabe in mehrere einzelne trennen).

Wir wollen nun an einer Reihe von Beispielen die gegebenen Formeln anwenden, woraus sich zugleich auch ergeben wird, wie man sich in zusammengesetzteren Fällen zu helfen hat.

§. 46.

Beispiele zu §. 45.

I. Man soll die Fläche des Dreiecks ABC (Fig. 19) berechnen.

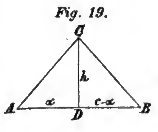


Fig. 19.

Sey $AB = c$, CD (Höhe) $= h$, $AD = \alpha$, also $DB = c - \alpha$; man wähle AB als Abszissenaxe, A als Anfangspunkt, so sind die Koordinaten von A: 0, 0; von B: c, 0; von C: α, h. Also ist die Gleichung der Geraden AC: $y = \frac{h}{\alpha} x$, der BC: $y = \frac{h}{\alpha - c}(x - c)$, mithin:

$$\text{Dreieck ADC} = \int_0^\alpha \frac{h}{\alpha} x \,\partial x = \frac{h\alpha}{2}; \text{ Dreieck BCD} = \int_\alpha^c \frac{h}{\alpha - c}(x - c)\,\partial x =$$

$$\frac{h}{\alpha - c}\left[\frac{c^2 - \alpha^2}{2} - c(c - \alpha)\right] = \frac{h}{\alpha - c}(c - \alpha)\left[\frac{\alpha + c}{2} - c\right] = \frac{h}{\alpha - c}(c - \alpha)\left(\frac{\alpha - c}{2}\right) =$$

$$\frac{h(c - \alpha)}{2}; \text{ Dreieck ABC} = \text{ADC} + \text{BCD} = \frac{ch}{2}.$$

II. Stelle AHB (Fig. 20) eine halbe Ellipse vor, deren grosse Halbaxe $CB = a$, kleine $CH = b$, deren Gleichung also $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ ist, wenn man den Mittelpunkt C als Anfangspunkt der Koordinaten wählt; man soll das Stück DEGF berechnen, für welches $CD = x_0$, $CF = x_1$, (wo x_0 negativ wäre, wenn DE links von CH läge). Man hat hier

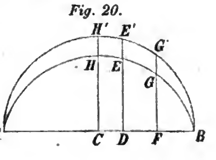


Fig. 20.

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

also die fragliche Fläche =

$$\frac{b}{a}\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{a^2 - x^2}\,\partial x.$$

Was nun das hier vorkommende Integral anbelangt, so gehört es zu den in §. 33, I betrachteten. Nach der dortigen Formel (b) ist $\left(m = 0,\ r = \frac{1}{2}\right)$:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\partial x = \int (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\,\partial x = \frac{x(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{a^2}{2}\int \frac{\partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\, arc\left(sin = \frac{x}{a}\right) \text{ (§. 28)},$$

Digitized by Google

mithin

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{a^2-x^2}\,\partial x = \frac{x_1}{2}\sqrt{a^2-x_1^2} - \frac{x_0}{2}\sqrt{a^2-x_0^2} + \frac{a^2}{2}\, arc\left(sin = \frac{x_1}{a}\right) - \frac{a^2}{2}\, arc\left(sin = \frac{x_0}{a}\right),$$

und die fragliche Fläche also:

$$\frac{b\,x_1}{2a}\sqrt{a^2-x_1^2} - \frac{b\,x_0}{2a}\sqrt{a^2-x_0^2} + \frac{a\,b}{2}\, arc\left(sin = \frac{x_1}{a}\right) - \frac{a\,b}{2}\, arc\left(sin = \frac{x_0}{a}\right).$$

Für die Fläche CHGF ist $x_0 = 0$, also dieselbe

$$\frac{b\,x_1}{2a}\sqrt{a^2-x_1^2} + \frac{a\,b}{2}\, arc\left(sin = \frac{x_1}{a}\right).$$

Setzt man hier $x_1 = a$, so erhält man die Fläche HCB, d. h. den vierten Theil der elliptischen Fläche. Derselbe ist mithin $\frac{a\,b\,\pi}{4}$, so dass die ganze von der Ellipse umschlossene Fläche $= a\,b\,\pi$ ist. Ist AH′B ein mit a um C beschriebener Halbkreis, so erhält man die Fläche DE′G′F, wenn man in dem Ausdrucke von DEGF $b = a$ setzt. Daraus folgt unmittelbar, dass

$$DEGF : DE'G'F = b : a.$$

Fig. 21.

III. Nimmt man (Fig. 21) den einen Brennpunkt der Ellipse S als Pol, SA als Polaraxe, so ist, wenn $SM = r$, $ASM = \omega$, $e = SC$ die Entfernung des Brennpunkts vom Mittelpunkt, die Polargleichung der Ellipse:

$$r = \frac{b^2}{a + e\cos\omega},$$

worin a und b dieselbe Bedeutung haben, wie in Nr. II.

Ist also der Ausschnitt ASM, für den der Anfangswerth von $\omega = 0$, der Endwerth $(ASM) = \omega_1$ zu berechnen, so ist derselbe (§. 45, III):

$$\frac{1}{2}\int_0^{\omega_1} r^2\,\partial\omega = \frac{b^4}{2}\int_0^{\omega_1} \frac{\partial\omega}{(a + e\cos\omega)^2}.$$

Aber nach §. 36:

$$\int \frac{\partial\omega}{(a+e\cos\omega)^2} = -\frac{e}{a^2-e^2}\,\frac{\sin\omega}{a+e\cos\omega} + \frac{a}{a^2-e^2}\int\frac{\partial\omega}{a+e\cos\omega}$$

$$= -\frac{e}{a^2-e^2}\,\frac{\sin\omega}{a+e\cos\omega} + \frac{2a}{(a^2-e^2)^{\frac{3}{2}}}\, arc\left(tg = \sqrt{\frac{a-e}{a+e}}\, tg\,\frac{\omega}{2}\right),$$

mithin da $a^2 - e^2 = b^2$, die Fläche:

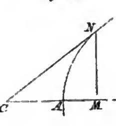
$$-\frac{e\,b^2}{2}\,\frac{\sin\omega_1}{a+e\cos\omega_1} + a\,b\, arc\left(tg = \sqrt{\frac{a-e}{a+e}}\, tg\,\frac{\omega_1}{2}\right).$$

Setzt man $\omega_1 = \pi$, so erhält man die halbe elliptische Fläche $= \frac{a\,b\,\pi}{2}$.

IV. Sey C (Fig. 22) der Mittelpunkt einer Hyperbel, deren reelle Halbaxe $CA = a$, imaginäre $= b$, deren Gleichung also $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ist, und sey $CM = x_1$, so soll das Flächenstück AMN berechnet werden.

Digitized by Google

Fig. 22.



Man hat, da $AC = a$, $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$:

$$AMN = \frac{b}{a}\int_a^{x_1}\sqrt{x^2 - a^2}\,\partial x.$$

Nach §. 33, Formel (b) ist aber

$$\int\sqrt{x^2 - a^2}\,\partial x = \int(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\partial x = \frac{x(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{2} - \frac{a^2}{2}\int\frac{\partial x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$
$$= \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\,l\,[2x + 2\sqrt{x^2 - a^2}]\ (\text{§. 32, II}).$$
$$= \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\,l(x + \sqrt{x^2 - a^2}) - \frac{a^2}{2}\,l\,(2),$$

welche Grösse für $x = a$ zu $-\frac{a^2}{2}\,l\,(a) - \frac{a^2}{2}\,l\,(2)$ wird.

Demnach

$$\int_a^{x_1}\sqrt{x^2 - a^2}\,\partial x = \frac{x_1\sqrt{x_1^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\,l\left(\frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}{a}\right),$$

und die fragliche Fläche $= \frac{b x_1 \sqrt{x_1^2 - a^2}}{2a} - \frac{ab}{2}\,l\left(\frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}{a}\right)$.

Ist $MN = y_1$, so ist $\sqrt{x_1 - a^2} = \frac{a y_1}{b}$, also ist auch

$$AMN = \frac{x_1 y_1}{2} - \frac{ab}{2}\,l\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right),$$

mithin da $CMN = \frac{1}{2}x_1 y_1$, so ist $CAN = \frac{ab}{2}\,l\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right)$.

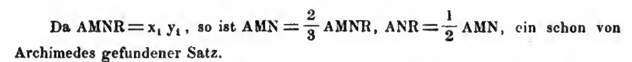
Fig. 23.

V. Sey AN ein Parabelbogen (Fig. 23), A der Scheitel der Parabel, deren Gleichung $y^2 = 2px$ sey, $AM = x_1$, so ist $y = \sqrt{2px}$, also die Fläche

$$AMN = \int_0^{x_1}\sqrt{2px}\,\partial x = \sqrt{2p}\int_0^{x_1}\sqrt{x}\,\partial x = \frac{2}{3}x_1^{\frac{3}{2}}\sqrt{2p} = \frac{2}{3}x_1\sqrt{2px_1},$$

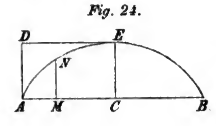
oder wenn $MN = y_1$, $\sqrt{2px_1} = y_1$:

$$AMN = \frac{2}{3}x_1 y_1.$$


Da $AMNR = x_1 y_1$, so ist $AMN = \frac{2}{3}AMNR$, $ANR = \frac{1}{2}AMN$, ein schon von Archimedes gefundener Satz.

Wollte man die Fläche MNPQ haben, so wäre sie $= APQ - AMN = \frac{2}{3}x_2 y_2 - \frac{2}{3}x_1 y_1$, wenn $AP = x_2$, $PQ = y_2$, $AM = x_1$, $MN = y_1$. Natürlich wäre auch unmittelbar:

$$MPQN = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2px}\,\partial x.$$



VI. Sey ANB (Fig. 24) eine Zykloide, deren Gleichungen sind $x = r(\omega - \sin\omega)$, $y = r(1 - \cos\omega)$, und sey ω_1 der Werth von ω, der dem Punkt N entspricht, so ist wenn $AM = x_1$:

$$AMN = \int_0^{x_1} y\,\partial x = \int_0^{\omega_1} y\,\frac{\partial x}{\partial \omega}\,\partial\omega \text{ (§. 42, IV)} =$$

$$\int_0^{\omega_1} r(1-\cos\omega)\,r(1-\cos\omega)\,\partial\omega = r^2\int_0^{\omega_1}(1-\cos\omega)^2\,\partial\omega = r^2\int_0^{\omega_1}(1-2\cos\omega+\cos^2\omega)\,\partial\omega.$$

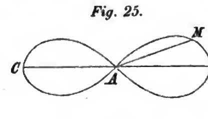
Aber (§. 34):

$$\int(1-2\cos\omega+\cos^2\omega)\,\partial\omega = \omega - 2\sin\omega + \frac{\sin\omega\cos\omega}{2} + \frac{1}{2}\omega = \frac{3}{2}\omega - 2\sin\omega + \frac{\sin 2\omega}{4},$$

$$\int_0^{\omega_1}(1-2\cos\omega+\cos^2\omega)\,\partial\omega = \frac{3}{2}\omega_1 - 2\sin\omega_1 + \frac{\sin 2\omega_1}{4},$$

also die Fläche $AMN = \frac{3}{2} r^2\omega_1 - 2r^2\sin\omega_1 + \frac{r^2\sin 2\omega_1}{4}$. Ist $MN = y_1$, so ist $\cos\omega_1 = \frac{r - y_1}{r}$ und es liegt ω_1 zwischen 0 und π, wenn MN in der ersten Hälfte der Zykloide, zwischen π und 2π, wenn MN in der zweiten Hälfte liegt. Für $\omega_1 = \pi$ hat man die halbe Fläche der Zykloide $= \frac{3}{2} r^2\pi$, so dass die ganze Fläche ABEA $= 3r^2\pi$ ist.

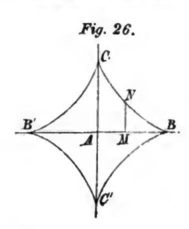
Da $AC = r\pi$, $AD = CE = 2r$, so ist $ACED = 2r^2\pi$, also da $ACE = \frac{3}{2} r^2\pi$, so ist $AED = \frac{1}{2} r^2\pi$, d. h. $AED = \frac{1}{3} AEC$.



VII. Stelle ABC (Fig. 25) eine Lemniscate vor, deren Polargleichung $r^2 = a^2\cos 2\omega$ ist, wenn A der Pol, AB die Polaraxe und $AB = a$ ist, so ist für $BAM = \omega_1$, die Fläche des Ausschnitts

$$BAM = \frac{1}{2}\int_0^{\omega_1} r^2\,\partial\omega = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\omega_1}\cos 2\omega\,\partial\omega = \frac{1}{4}a^2\sin 2\omega_1.$$

Für $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$ hat man die Fläche über $AB = \frac{1}{4}a^2$, so dass die ganze von der Lemniscate umschlossene (zweitheilige) Fläche $= a^2$ ist.



VIII. Sey BCB'C'B die Evolute einer Ellipse (Fig. 26), deren Gleichung also $\left(\frac{ax}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{by}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ ist, und wo $AB = \frac{a^2-b^2}{a}$, $AC = \frac{a^2-b^2}{b}$, so ist, wenn $a^2 - b^2 = e^2$:

$$\left(\frac{by}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{ax}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}},\quad y = \frac{e^2}{b}\left[1 - \left(\frac{ax}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}},$$

also für $AM = x_1$, die Fläche

$$AMNC = \frac{e^2}{b}\int_0^{x_1}\left[1 - \left(\frac{ax}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}\partial x.$$

Digitized by Google

Man setze nun $x = z^3$, so ist

$$\int\left[1-\left(\frac{ax}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}\partial x = \int\left[1-\left(\frac{a}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} z^2\right]^{\frac{3}{2}} 3z^2\partial z$$
$$= 3\int z^2(1-\alpha z^2)^{\frac{3}{2}}\partial z,\quad \alpha = \left(\frac{a}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Aber nach §. 33 ist, wenn man nach einander die dortigen Formeln (e), (b) anwendet:

$$\int z^2(1-\alpha z^2)^{\frac{3}{2}}\partial z = -\frac{z(1-\alpha z^2)^{\frac{5}{2}}}{6\alpha} + \frac{1}{6\alpha}\int(1-\alpha z^2)^{\frac{3}{2}}\partial z$$
$$= -\frac{z(1-\alpha z^2)^{\frac{5}{2}}}{6\alpha} + \frac{1}{6\alpha}\cdot\frac{z(1-\alpha z^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{1}{6\alpha}\cdot\frac{3}{4}\int(1-\alpha z^2)^{\frac{1}{2}}\partial z$$
$$= -\frac{z(1-\alpha z^2)^{\frac{5}{2}}}{6\alpha} + \frac{z(1-\alpha z^2)^{\frac{3}{2}}}{24\alpha} + \frac{z(1-\alpha z^2)^{\frac{1}{2}}}{16\alpha} + \frac{1}{16\alpha}\int\frac{\partial z}{\sqrt{1-\alpha z^2}}$$
$$= -\frac{z(1-\alpha z^2)^{\frac{5}{2}}}{6\alpha} + \frac{z(1-\alpha z^2)^{\frac{3}{2}}}{24\alpha} + \frac{z(1-\alpha z^2)^{\frac{1}{2}}}{16\alpha} + \frac{1}{16\alpha\sqrt{\alpha}}\, arc\,(\sin = z\sqrt{\alpha}).$$

Setzt man zur Abkürzung $\sqrt[3]{ax} = u$, $\sqrt[3]{e^2} = \sqrt[3]{a^2-b^2} = \varepsilon$, so ist $\alpha = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{\varepsilon^2}$,

$z = x^{\frac{1}{3}} = \frac{u}{a^{\frac{1}{3}}}$, $\alpha z^2 = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{\varepsilon^2}\cdot x^{\frac{2}{3}} = \frac{u^2}{\varepsilon^2}$, $\sqrt{\alpha} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{\varepsilon}$, so dass

$$\int\left[1-\left(\frac{ax}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}\partial x = -\frac{u(\varepsilon^2-u^2)^{\frac{5}{2}}}{2a\varepsilon^3} + \frac{u(\varepsilon^2-u^2)^{\frac{3}{2}}}{8a\varepsilon} + \frac{3u(\varepsilon^2-u^2)^{\frac{1}{2}}\varepsilon}{16a} + \frac{3\varepsilon^3}{16a}\, arc\left(\sin = \frac{u}{\varepsilon}\right),$$

mithin da für $x = 0$ auch $u = 0$, und für $x = x_1 : u = \sqrt[3]{ax_1} = u_1$, und $\frac{e^2}{b} = \frac{\varepsilon^3}{b}$:

$$AMNC = -\frac{u_1(\varepsilon^2-u_1^2)^{\frac{5}{2}}}{2ab} + \frac{u_1(\varepsilon^2-u_1^2)^{\frac{3}{2}}\varepsilon^2}{8ab} + \frac{3u_1(\varepsilon^2-u_1^2)^{\frac{1}{2}}\varepsilon^4}{16ab} + \frac{3\varepsilon^6}{16ab}\, arc\left(\sin = \frac{u_1}{\varepsilon}\right).$$

Für $x_1 = \frac{a^2-b^2}{a} = \frac{e^2}{a} = \frac{\varepsilon^3}{a}$ ist $u_1 = \varepsilon$, also hat man für die Fläche

$$ABC = \frac{3\varepsilon^6}{16ab}\frac{\pi}{2},\ \text{mithin die ganze Fläche} = \frac{3\varepsilon^6\pi}{8ab} = \frac{3e^4\pi}{8ab} = \frac{3(a^2-b^2)^2\pi}{8ab}.$$

IX. Sey $y = a + bx + cx^2$ die Gleichung einer Kurve (Fig. 27) und die Abszissen von $A: x_0$, von $C: x_0 + 2h$, wo $AE = EC = h$, so ist die Fläche

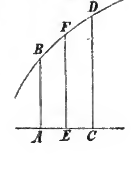


Fig. 27.

$$ACDB = \int_{x_0}^{x_0+2h}(a+bx+cx^2)\partial x = a.2h + \frac{1}{2}b[(x_0+2h)^2 - x_0^2]$$
$$+ \frac{1}{3}c[(x_0+2h)^3 - x_0^3]$$
$$= 2ah + \frac{1}{2}b(4x_0h + 4h^2) + \frac{1}{3}c(6x_0^2h + 12x_0h^2 + 8h^3)$$
$$= \frac{h}{3}[6a + 6x_0b + 6bh + 6x_0^2c + 12x_0hc + 8h^2c]$$

Digitized by Google

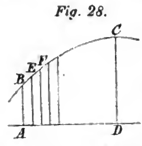
$$= \frac{h}{3}\left\{a + b x_0 + c x_0^2 + 4[a + b(x_0 + h) + c(x_0 + h)^2] + a + b(x_0 + 2h) + c(x_0 + 2h)^2\right\}.$$

Ist nun $AB = y_0$, $EF = y_1$, $CD = y_2$, so ist $y_0 = a + b x_0 + c x_0^2$, $y_1 = a + b(x_0 + h) + c(x_0 + h)^2$, $y_2 = a + b(x_0 + 2h) + c(x_0 + 2h)^2$, also

$$ACDB = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

welche Gleichung auch dadurch als richtig erkannt wird, dass man in $\frac{h}{3} \times (y_0 + 4y_1 + y_2)$ die Werthe von y_0, y_1, y_2 einsetzt, und thatsächlich den vorher gefundenen Werth von ACDB erhält. (Vergl. XI).

Fig. 28.



X. Auf diese Formel gründet sich die **Simpson'sche** Formel für die näherungsweise Berechnung eines Flächenraumes ABCD (Fig. 28). Man theile nämlich AD in $2n$ gleiche Theile, jeden $= h$, so dass also $h = \frac{AD}{2n}$; errichte in den Theilpunkten Ordinaten $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$, wo also $AB = y_0$, $CD = y_{2n}$, und lege nun durch je drei Punkte, etwa B, E, F eine Kurve, deren Gleichung die Form $y = a + bx + cx^2$ hat, was immer möglich ist, da die drei Grössen a, b, c bestimmt werden können, wenn man die Bedingungen anschreibt, dass die Kurve durch die drei Punkte gehen soll. Je näher nun die Punkte an einander liegen, desto mehr wird auch, innerhalb derselben, die so gezogene Kurve mit der eigentlichen zusammenfallen, und man wird also für das Flächenstück zwischen der ersten und dritten Ordinate haben:

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Eben so für das zwischen der dritten und fünften: $\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$ u. s. w., so dass die ganze Fläche nahezu $= \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + y_4 + 4y_5 + \ldots\ldots + 4y_{2n-1} + y_{2n}]$

$$= \frac{h}{3}[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})]$$

ist.

XI. Die in IX erhaltene Formel gilt übrigens auch, wenn die Gleichung der Kurve ist $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$, wo A, B, C, D Konstanten.

Denn dann ist die Fläche

$$\int_{x_0}^{x_0+2h}(A + Bx + Cx^2 + Dx^3)\partial x = A.2h + \frac{B}{2}(4hx_0 + 4h^2) + \frac{C}{3}(6hx_0^2 + 12h^2x_0 + 8h^3)$$
$$+ \frac{D}{4}(8hx_0^3 + 24h^2x_0^2 + 32h^3x_0 + 16h^4)$$
$$= 2h\left\{A + B(x_0 + h) + \frac{C}{3}(3x_0^2 + 6hx_0 + 4h^2) + D(x_0^3 + 3hx_0^2 + 4h^2x_0 + 2h^3)\right\}.$$

Ferner



Digitized by Google

$$y_0 = A + Bx_0 + Cx_0^2 + Dx_0^3,$$
$$4y_1 = 4A + 4B(x_0 + h) + 4C(x_0^2 + 2x_0h + h^2) + 4D(x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3),$$
$$y_2 = A + B(x_0 + 2h) + C(x_0^2 + 4x_0h + 4h^2) + D(x_0^3 + 6x_0^2h + 12x_0h^2 + 8h^3),$$

woraus

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 6A + B(6x_0 + 6h) + C(6x_0^2 + 12x_0h + 8h^2) + D(6x_0^3 + 18x_0^2h + 24x_0h^2 + 12h^3),$$

$$\frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{3}h = 2h\left\{A + B(x_0 + h) + C\left(x_0^2 + 2x_0h + \frac{4}{3}h^2\right) + D(x_0^3 + 3x_0^2h + 4x_0h^2 + 2h^3)\right\}$$
$$= \int_{x_0}^{x_0+2h} (A + Bx + Cx^2 + Dx^3)\,\partial x,$$

wodurch der Satz erwiesen ist.

Mittlerer Werth der Ordinate.

XII. Nach §. 39, IV ist der mittlere Werth von y für die Punkte zwischen N und N′ (Fig. 16, §. 45, I) gleich $\frac{1}{b-a}\int_a^b y\,\partial x$. Heisst dieser mittlere Werth Y, so ist also die Fläche

$$f = (b - a)\,Y,$$

d. h. gleich einem Rechtecke, dessen Grundlinie MM′ und dessen Höhe die mittlere Ordinate ist.

Ist eben so in §. 45, III: R^2 der mittlere Werth des Quadrats des Fahrstrahls r, so ist $\int_{\omega_1}^{\omega_2} r^2\partial\omega = (\omega_2 - \omega_1)R^2$, also jener Ausschnitt $= \frac{(\omega_2 - \omega_1)R^2}{2}$ $= \frac{R}{2}R(\omega_2 - \omega_1)$, wo $R(\omega_2 - \omega_1)$ ein mit dem Halbmesser R zwischen den Seiten OB, OC beschriebener Kreisbogen ist. Der Ausschnitt BOC ist also gleich dem Kreisausschnitt, der von dem eben genannten Kreisbogen begränzt ist. [Dabei ist aber zu beachten, dass R nicht der mittlere Werth des Fahrstrahls r ist, da nicht $\int_{\omega_1}^{\omega_2} r\,\partial\omega = (\omega_2 - \omega_1)R$.]

§. 47.

Rektifikation ebener Kurven.

I. Soll man die Länge des Bogens NN′ (Fig. 29) berechnen,* dessen Endpunkten die Abszissen OM = a, OM′ = b zugehören, so sey für

* Von der Länge einer geraden Linie haben wir einen vollkommen klaren Begriff; bei der Länge einer krummen Linie kann man schon eher Anstand finden. Will man in diesem Falle letztere auf erstere zurückführen, so denke man sich einen biegsamen Faden über die krumme Linie gespannt, den man dann zur geraden Linie ausstreckt. Uebrigens betrachten wir die krumme Linie selbst als die Gränze, der sich ein eingeschriebener geradliniger Linienzug (Vieleck) nähert, wenn seine Seitenanzahl immer grösser wird. Von diesem Standpunkt aus ergibt sich dann ein klarer Begriff der Länge einer krummen Linie, da sie die Gränze der Summe der Polygonseiten ist. (Vergl. §. 82.)

Digitized by Google

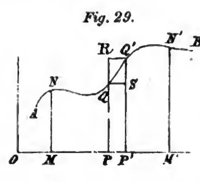


Fig. 29.

OP = x, die Länge von NQ = s, und man hat (§. 20, III):

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \pm \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

worin das obere Zeichen gilt, wenn s wächst mit wachsendem x, das untere im entgegengesetzten Falle. Daraus folgt, dass für $PP' = \Delta x$, $QQ' = \Delta s$, man habe:

$$\Delta s = \pm \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\Delta x + \alpha \Delta x,$$

worin α unendlich abnimmt mit unendlich abnehmendem Δx. Gesetzt nun, wie in unserer Figur, es wachse der zu berechnende Bogen in seiner ganzen Ausdehnung mit wachsendem x, so folgt hieraus ganz wie in §. 45, dass die Länge von NN' gleich sey der Gränze, der sich die Summe der Werthe, die man erhält, wenn man in $\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\Delta x$ der Grösse x alle Werthe von $x = a$ bis zu $x = b$ beilegt, mit unendlich abnehmendem Δx nähert, wo also Δx der Unterschied der auf einander folgenden Werthe von x ist. Daraus ergibt sich unmittelbar, dass

$$NN' = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\partial x.$$

Dieselbe Formel lässt sich ebenfalls in folgender Weise finden. Es ist, wenn Bogen $NN' = \sigma$, sicher

$$\sigma = \int_0^\sigma \partial s,$$

also wenn man die Veränderliche x einführt, wo dann $\frac{\partial s}{\partial x} = \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$:

$$\sigma = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\partial x,$$

indem für $s = 0$ auch $x = a$, für $s = \sigma : x = b$ ist.

Würde der Bogen abnehmen mit wachsendem x (wenn man z. B. seinen Anfangspunkt in N' gewählt hätte), so wäre

$$N'N = -\int_b^a \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\partial x.$$

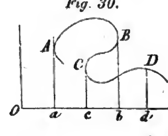


Fig. 30.

II. Würde innerhalb der Gränzen des Integrals der Bogen bald wachsen mit wachsendem x, bald abnehmen, so würden diese Formeln nicht mehr gelten und man müsste den ganzen Bogen in einzelne Theile abtrennen. So z. B. Fig. 30, wenn $Oa = \alpha$, $Ob = \beta$, $Oc = \gamma$, $Od = \delta$, wäre:

$$\text{Bogen } AB = \int_\alpha^\beta \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\partial x, \quad \text{Bogen } BC = -\int_\beta^\gamma \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\partial x,$$

Digitized by Google

$$\text{Bogen CD} = \int_\gamma^\delta \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x,$$

wobei jeweils für y diejenige Funktion von x zu wählen wäre, die dem betreffenden Bogenstück entspricht.

III. Wollte man für Polarkoordinaten die betreffende Formel herstellen, so wäre $y = r\sin\omega$, $x = r\cos\omega$, so dass wenn r als Funktion von ω, gegeben durch die Polargleichung der Kurve, angesehen wird, ist (§. 21, IV):

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \omega}}{\frac{\partial x}{\partial \omega}}, \quad \frac{\partial x}{\partial \omega} = \frac{\partial r}{\partial \omega}\cos\omega - r\sin\omega, \quad \frac{\partial y}{\partial \omega} = \frac{\partial r}{\partial \omega}\sin\omega + r\cos\omega.$$

Also wenn ω_0, ω_1 die Werthe von ω sind, die den Endpunkten entsprechen und der Bogen nur wächst mit wachsendem ω (§. 42, IV), dieser Bogen =

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \sqrt{1+\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2}}\,\frac{\partial x}{\partial \omega}\,\partial\omega = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2}\,\partial\omega^{*}$$

$$= \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2 + r^2}\,\partial\omega.$$

Wir wollen nun diese Formeln ebenfalls auf einige Beispiele anwenden.

---

* Streng genommen sollte man hier die Fälle unterscheiden, da $\frac{\partial x}{\partial \omega}$ positiv oder negativ ist. Ist nämlich $\frac{\partial x}{\partial \omega} < 0$, so ist $\sqrt{1+\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2}}\,\frac{\partial x}{\partial \omega} = -\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2}$. Allein wenn $\frac{\partial x}{\partial \omega} < 0$, so nimmt x ab mit wachsendem ω (§. 20, I); setzt man aber voraus, es wachse der Bogen s mit wachsendem ω, so ist $\frac{\partial s}{\partial \omega} > 0$, also $\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\frac{\partial s}{\partial \omega}}{\frac{\partial x}{\partial \omega}} < 0$, wie natürlich, da jetzt s wächst mit abnehmendem x. Demnach ist $\frac{\partial s}{\partial x} = -\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$, $\frac{\partial s}{\partial \omega} = \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \omega} = -\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\frac{\partial x}{\partial \omega} = +\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2}$, gerade wie wenn $\frac{\partial x}{\partial \omega} > 0$. So lange also s wächst mit wachsendem ω gilt die Formel $\frac{\partial s}{\partial \omega} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2}$, also auch die Formel des Textes, in der natürlich $\omega_1 > \omega_0$ seyn muss. Aehnliche Betrachtungen werden in allen künftigen ähnlichen Fällen maassgebend seyn.

Digitized by Google

§. 48.

Beispiele zu §. 47.

I. Man soll den Parabelbogen AN (Fig. 23) berechnen, wenn $AM = x_1$.

Hier ist $y^2 = 2px$, $y\frac{\partial y}{\partial x} = p$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{y}$, $\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{\sqrt{y^2+p^2}}{y} = \frac{\sqrt{2px+p^2}}{\sqrt{2px}} = \sqrt{\frac{2x+p}{2x}}$, also

$$AN = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{2x+p}{x}}\,\partial x.$$

Man setze nun $\frac{2x+p}{x} = z^2$, $x = \frac{p}{z^2-2}$, $\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{2zp}{(z^2-2)^2}$, so ist

$$\int\sqrt{\frac{2x+p}{x}}\,\partial x = -2p\int\frac{z^2}{(z^2-2)^2}\partial z = -\frac{2p}{4}\int\left[\frac{1}{(z+\sqrt{2})^2} - \frac{1}{\sqrt{2}(z+\sqrt{2})} + \frac{1}{(z-\sqrt{2})^2} + \frac{1}{\sqrt{2}(z-\sqrt{2})}\right]\partial z \text{ (§. 29)}$$

$$= -\frac{2p}{4}\left[-\frac{1}{z+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}l(z+\sqrt{2}) - \frac{1}{z-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}l(z-\sqrt{2})\right] = -\frac{p}{2}\left[-\frac{2z}{z^2-2} - \frac{1}{\sqrt{2}}l\left(\frac{z+\sqrt{2}}{z-\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{pz}{z^2-2} + \frac{p}{2\sqrt{2}}l\left(\frac{z+\sqrt{2}}{z-\sqrt{2}}\right) = \frac{p\sqrt{\frac{2x+p}{x}}}{\frac{2x+p}{x}-2} +$$

$$\frac{p}{2\sqrt{2}}l\left(\frac{\sqrt{\frac{2x+p}{x}}+\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{2x+p}{x}}-\sqrt{2}}\right) = \sqrt{x(p+2x)} + \frac{p}{2\sqrt{2}}l\left(\frac{\sqrt{p+2x}+\sqrt{2x}}{\sqrt{p+2x}-\sqrt{2x}}\right),$$

mithin

$$AN = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{2x+p}{x}}\,\partial x = \sqrt{\frac{x_1(p+2x_1)}{2}} + \frac{p}{4}l\left(\frac{\sqrt{p+2x_1}+\sqrt{2x_1}}{\sqrt{p+2x_1}-\sqrt{2x_1}}\right).$$

Wie man NQ (= AQ — AN) hieraus finden kann, ist wohl klar.

II. Für den Zykloidenbogen AN (Fig. 24) ist (§. 46, VI): $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \omega}}{\frac{\partial x}{\partial \omega}}$ (§. 21) $= \frac{\sin\omega}{1-\cos\omega}$,

$$\int\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\partial x = \int\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\frac{\partial x}{\partial \omega}\partial\omega \text{ (§. 28)} = \int\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\omega}\right)^2}\partial\omega\,*$$

* Man darf nur dann $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$ setzen, wenn a positiv ist; für $a < 0$ ist $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}$. In unserem Falle ist aber $\frac{\partial x}{\partial\omega} > 0$, da x wächst mit ω (§. 20, I); also ist

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\frac{\partial x}{\partial\omega} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^2\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\omega}\right)^2}.$$

Digitized by Google

$$= r\int\sqrt{(1-\cos\omega)^2+\sin^2\omega}\,\partial\omega = r\int\sqrt{2-2\cos\omega}\,\partial\omega = r\sqrt{2}\int\sqrt{2\sin^2\frac{\omega}{2}}\,\partial\omega =$$

$$2r\int\sin\frac{\omega}{2}\,\partial\omega = -4r\cos\frac{\omega}{2},$$

$$AN = \int_0^{\omega_1}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\omega}\right)^2}\,\partial\omega = -4r\cos\frac{\omega_1}{2}+4r = 4r\left(1-\cos\frac{\omega_1}{2}\right) = 8r\sin^2\frac{\omega_1}{4}.$$

Für $\omega_1 = \pi$, $\sin^2\frac{\omega}{4} = \sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$, ist AE also $= 4r$, $AEB = 8r$.

Für eine Epizykloide, deren Grundkreis R zum Halbmesser hat, während r der Halbmesser des rollenden Kreises ist, so dass deren Gleichungen

$$x = (R+r)\cos\omega - r\cos\frac{(R+r)\omega}{r},$$

$$y = (R+r)\sin\omega - r\sin\frac{(R+r)\omega}{r}$$

sind, findet man eben so als Länge eines ganzen Umlaufs (für den der obere Werth von $\omega = \frac{2r\pi}{R}$) die Grösse $\frac{8(R+r)r}{R}$.

III. Für die archimedische Spirale ist $r = a\omega$, $\frac{\partial r}{\partial\omega} = a$, also der von $\omega = 0$ bis $\omega = \omega_1$ sich erstreckende Bogen:

$$\int_0^{\omega_1}\sqrt{a^2+a^2\omega^2}\,\partial\omega = a\int_0^{\omega_1}\sqrt{1+\omega^2}\,\partial\omega = \frac{a}{2}\,\omega_1\sqrt{1+\omega_1^{\,2}}+\frac{a}{2}\,l\left(\omega_1+\sqrt{1+\omega_1^{\,2}}\right).$$

Ist r_1 die Länge des letzten Fahrstrahls, so ist $r_1 = a\omega_1$, $\omega_1 = \frac{r_1}{a}$.

Für die logarithmische Spirale ist $r = a^\omega$, $\frac{\partial r}{\partial\omega} = a^\omega\,l(a)$, also die Bogenlänge von $\omega = 0$ bis $\omega = \omega_1$:

$$\int_0^{\omega_1}\sqrt{a^{2\omega}+a^{2\omega}\,l(a)^2}\,\partial\omega = \int_0^{\omega_1}a^\omega\sqrt{1+l(a)^2}\,\partial\omega = \frac{\sqrt{1+l(a)^2}}{l(a)}\left(a^{\omega_1}-1\right).$$

Für die Lemmiscate (Fig. 25) ist $r^2 = a^2\cos 2\omega$, $r\frac{\partial r}{\partial\omega} = -a^2\sin 2\omega$, $\frac{\partial r}{\partial\omega} = -\frac{a^2\sin 2\omega}{r}$, $\left(\frac{\partial r}{\partial\omega}\right)^2+r^2 = \frac{a^4\sin^2 2\omega}{r^2}+r^2 = \frac{a^4\sin^2 2\omega+a^4\cos^2 2\omega}{a^2\cos 2\omega} = \frac{a^2}{\cos 2\omega} = \frac{a^2}{1-2\sin^2\omega}$,

also ist

$$BM = a\int_0^{\omega_1}\frac{\partial\omega}{\sqrt{1-2\sin^2\omega}},\quad BMA = a\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\partial\omega}{\sqrt{1-2\sin^2\omega}},$$

welches Integral hier nicht weiter bestimmt werden kann. (Vergl. §. 160, I).

Parallele Kurven.

IV. Seyen (Fig. 31, siehe nächste Seite) AC und BD zwei parallele Kurven, deren Abstand $AB = CD = a$ sey; seyen ferner M und M′ zwei unendlich nahe Punkte des Bogens AC; OM, OM′ die in denselben gezogenen Normalen, die sich also im Krümmungsmittelpunkte O scheiden; eben so

Digitized by Google

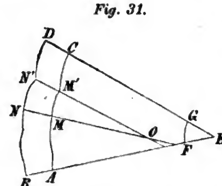


Fig. 31.

seyen N,N' zwei benachbarte Punkte des Bogens BD, ON der Krümmungshalbmesser (§. 56, III) für BD im Punkte N. Sey also OM $= \varrho$, mithin ON $= \varrho + a$, so ist, da MM' als Kreisbogen vom Halbmesser ϱ und dem Winkel MOM' $= d\omega$ angesehen werden kann:

$$MM' = \varrho\, d\omega, \quad NN' = (\varrho + a)\, d\omega,$$

und da, wenn ω der Winkel ist, den OM mit der ersten Normale AE macht, $\omega + d\omega$, wie man sich leicht überzeugt, der Winkel seyn wird, den OM' mit AE macht, so folgt hieraus, dass wenn ω_1 der Winkel AEC der ersten und letzten Normale (AE und CE) ist, man haben werde (vorausgesetzt, dass der Bogen immer wachse mit wachsendem ω):

$$AC = \int_0^{\omega_1} \varrho\, \partial\omega,\ BD = \int_0^{\omega_1} (\varrho + a)\, \partial\omega = \int_0^{\omega_1} \varrho\, \partial\omega + a \int_0^{\omega_1} \partial\omega = AC + a\,\omega_1.$$

Nun ist $a\,\omega_1$ die Länge eines mit dem Halbmesser EF $= a$ zwischen den Seiten des Winkels AEC beschriebenen Kreisbogens FG, so dass also

$$BD = AC + FG.$$

Der Kreisausschnitt MOM' ist eben so $\frac{1}{2}\varrho^2 d\omega$, NON' $= \frac{1}{2}(\varrho + a)^2 d\omega$, also NMM'N' $=$ NON' $-$ MOM' $= \frac{1}{2}[2a\varrho + a^2]\, d\omega = a\varrho\, d\omega + \frac{a^2}{2}\, d\omega$, mithin ist die Fläche des Streifens

$$ABCD = \int_0^{\omega_1} a\,\varrho\, \partial\omega + \int_0^{\omega_1} \frac{a^2}{2}\, \partial\omega = a \int_0^{\omega_1} \varrho\, \partial\omega + \frac{a^2}{2}\,\omega_1 = a \,.\, AC + \frac{a^2 \omega_1}{2},$$

und da nun $\frac{a^2 \omega_1}{2}$ die Fläche des Ausschnitts EFG ist, so hat man

$$ABDC = a \,.\, AC + DFG,$$

wo a.AC das Rechteck ist, das über der Grundlinie AC mit der Höhe a errichtet ist.

§. 49.

Inhalte von Rotationskörpern und Rotationsflächen.

I. Dreht sich die Linie NN' (Fig. 32) um die Axe der x, so erzeugt die Fläche MM'NN' einen Körper, dessen Inhalt man nach §. 20, V, in genau derselben Weise, wie in §. 45 finden wird gleich

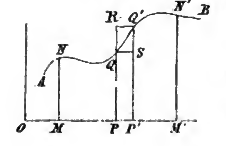


Fig. 32.

$$\pi \int_a^b y^2\, \partial x,$$

wenn a und b die Abszissen von N und N' (d. h. OM und OM') und y (als Funktion von x) die Ordinate der Kurve NN' ist.

Digitized by Google

II. Ganz eben so ist die von NN′ erzeugte Fläche, gemäss §. 20, VI:

$$2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\partial x,$$

wobei wir voraussetzen wollen, dass der Bogen NN′ immer wachse mit wachsendem x. *

III. Will man die in §. 47, III gebrauchten Polarkoordinaten ($x = r\cos\omega$, $y = r\sin\omega$) anwenden, immerhin aber den durch MM′NN′ (Fig. 32) entstandenen Körper oder die durch NN′ entstandene Fläche berechnen, so wird man am besten auf §. 20 zurückgehen, wo in der dortigen V und VI jetzt:

$$\frac{\partial v}{\partial \omega} = \pi y^2 \frac{\partial x}{\partial \omega},\quad \frac{\partial z}{\partial \omega} = 2y\pi\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\frac{\partial x}{\partial \omega},$$

wenn $y > 0$ und $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ positiv gedacht sind. Demnach ist

$$\frac{\partial v}{\partial \omega} = \pi r^2 \sin^2\omega \frac{\partial (r\cos\omega)}{\partial \omega} = \pi r^2 \sin^2\omega \left[\cos\omega \frac{\partial r}{\partial \omega} - r\sin\omega\right];$$

$$\frac{\partial z}{\partial \omega} = 2r\sin\omega\,\pi\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2} = 2r\pi\sin\omega\sqrt{r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2},$$

wenn für die letzte Formel vorausgesetzt wird, es wachse z mit ω, wobei auch $r\sin\omega$ immer > 0 seyn muss. Daraus ergibt sich dann, statt der Formel in I:

$$\pi\int_{\omega_0}^{\omega_1} r^2\sin^2\omega\left(\cos\omega\frac{\partial r}{\partial \omega} - r\sin\omega\right)\partial\omega,$$

wo r aus der Polargleichung der Kurve zu ziehen ist. Dabei muss, wenn $\omega_1 > \omega_0$, der Ausdruck unter dem Integralzeichen innerhalb der ganzen Ausdehnung des Integrals positiv seyn; negativ dagegen, wenn $\omega_1 < \omega_0$.

Für die Formel in II ergibt sich eben so

$$2\pi\int_{\omega_0}^{\omega_1} r\sin\omega\sqrt{r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2}\partial\omega,$$

wo $r\sin\omega > 0$ und $\omega_1 > \omega_0$ seyn muss. Für $\omega_1 < \omega_0$ hätte man das — Zeichen vorzusetzen.

---

* Diese Bedingung ist unerlässlich, wenn obige Formeln gelten sollen. Sie setzt voraus, dass $b - a > 0$ sey, und dass y positiv genommen werde, was immer genügend seyn wird. Für den Fall der Figur 30 (§. 47) würde man zur Berechnung des von AD entstandenen Körpers oder der entstandenen Oberfläche die Formeln

$$\pi\left[\int_\alpha^\beta y_1^2\partial x + \int_\gamma^\beta y_2^2\partial x + \int_\gamma^\delta y_3^2\partial x\right] \text{ und } 2\pi\left[\int_\alpha^\beta y_1\sqrt{1+\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^2}\partial x\right.$$

$$\left.+\int_\gamma^\beta y_2\sqrt{1+\left(\frac{\partial y_2}{\partial x}\right)^2}\partial x + \int_\gamma^\delta y_3\sqrt{1+\left(\frac{\partial y_3}{\partial x}\right)^2}\partial x\right]$$

haben, wo y_1, y_2, y_3 die Ordinaten für die Stücke AB, CB, CD sind. Wie man in andern Fällen zu verfahren hätte, wird aus diesem Beispiele klar genug hervorgehen.

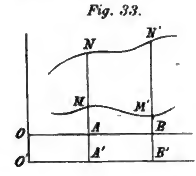
Digitized by Google

IV. Dreht sich die Figur MM'N'N (Fig. 17 in §. 45) um die Axe der x, so ist der entstandene Rotationskörper seinem Inhalte nach (§. 45, II):

$$\pi\int_a^b y^2 \partial x - \pi\int_a^b y_1{}^2 \partial x = \pi\int_a^b (y^2 - y_1{}^2)\partial x,$$

wobei jedoch wesentlich vorausgesetzt ist, dass die beiden Kurven auf derselben Seite der Abszissenaxe liegen. Im andern Falle würde + an die Stelle von — treten, wenn man dann überhaupt noch nach dem Inhalte fragen will.

Fig. 33.



V. Gesetzt die Fläche MNN'M' (Fig. 33) rotire um die Axe OB, so ist der Inhalt des erzeugten Körpers gleich

$$\pi\int_a^b (y^2 - y_1{}^2)\partial x,$$

wobei OB als Abszissenaxe angenommen ist; y die Ordinaten der Kurve NN', y_1 die von MM' bedeuten, und $OA = a$, $OB = b$ ist.

Rotirt nun aber dieselbe Fläche um die Axe O'B', die parallel mit OB in der Entfernung $OO' = m$ gezogen ist, so dass OB zwischen OB' und der Fläche MNN'M' liegt (wobei keine der beiden Axen diese Fläche schneidet), so ist der Inhalt des entstandenen Körpers eben so:

$$\pi\int_a^b [(y+m)^2 - (y_1+m)^2]\partial x = \pi\int_a^b (y^2 - y_1{}^2)\partial x + 2m\pi\int_a^b (y - y_1)\partial x.$$

Heisst also K der Körperinhalt des durch Umdrehung um OB entstandenen Körpers, K' der Inhalt des Körpers, der bei der Drehung um OB' entsteht; ist ferner F die Fläche der Figur, die nach §. 45, II gleich $\int_a^b (y - y_1)\partial x$ ist, so hat man:

$$K' = K + 2m\pi F,$$

mittelst welches Satzes man leicht den einen Körper aus dem andern berechnen kann.

VI. Dreht sich die Kurve NN' (Fig. 33) um die Axe OB, so ist nach II der Inhalt der erzeugten Oberfläche $= 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\partial x$, wobei die Bedeutung der einzelnen Grössen aus II klar ist.

Dreht sich nun dieselbe Kurve um die Axe O'B', die parallel mit OB in der Entfernung $OO' = m$ gezogen ist, so dass OB zwischen O'B' und der Kurve liegt, so erhält man den Inhalt der entstandenen Rotationsfläche, wenn man in der vorgehenden Formel $y + m$ für y setzt. Dadurch wird sie

$$2\pi\int_a^b (y+m)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\partial x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\partial x + 2m\pi\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\partial x.$$

Verglichen mit §. 47, I folgt hieraus nachstehender Satz:

Digitized by Google

Ist F der Inhalt der durch Drehung von NN′ um OB entstandenen Fläche, F′ der Inhalt derjenigen Fläche, welche durch Drehung derselben Kurve um OB′ entsteht, S die Länge des Bogens NN, so ist

$$F' = F + 2 m \pi S.$$

VII. Ist Y^2 der mittlere Werth des Quadrats der Ordinate zwischen a und b (§. 39, IV), so ist der Inhalt des in I betrachteten Körpers gleich

$$\pi (b - a) Y^2,$$

also gleich einem Zylinder vom Halbmesser Y, und der Höhe (b — a).

Wir haben im Vorstehenden immer angenommen, die Kurve mache eine vollständige Umdrehung. Geschieht diess nicht, so erhält man das Körper- oder Flächenstück, das bei einem Drehungswinkel von α Grad beschrieben wurde, unmittelbar aus der Gleichung

$$\frac{T}{G} = \frac{\alpha}{360},$$

wo G das bei einer Rotation von 360° (wie wir oben vorausgesetzt) beschriebene Stück, T das bei einer Rotation von α^0 beschriebene ist.

§. 50.

Beispiele zu §. 49.

I. Dreht sich (Figur 20) die Fläche CFGH um CF, so ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 - \alpha^2 x^2}{a^2 - x^2}}$ wo $\alpha^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$; also ist der von dieser Fläche erzeugte Körper für $CF = x_1$:

$$\frac{\pi b^2}{a^2}\int_0^{x_1}(a^2 - x^2)\,\partial x = \frac{\pi b^2}{a^2}\left(a^2 x_1 - \frac{x_1^3}{3}\right).$$

Für $x = a$ erhält man den von CHB erzeugten Körper $= \frac{2ab^2\pi}{3}$, also den durch Rotation der Ellipse um AB erzeugten Körper $= \frac{4}{3} a b^2 \pi$.

Die von HG erzeugte Fläche ist, wenn $a^2 > b^2$, also die Ellipse sich um ihre grosse Axe dreht:

$$\frac{2b\pi}{a}\int_0^{x_1}\sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{\frac{a^2 - \alpha^2 x^2}{a^2 - x^2}}\,\partial x = \frac{2b\pi}{a}\int_0^{x_1}\sqrt{a^2 - \alpha^2 x^2}\,\partial x = \frac{2b\pi}{a\alpha}\left[\frac{\alpha x_1}{2}\sqrt{a^2 - \alpha^2 x_1^2}\right.$$
$$\left. + \frac{a^2}{2}\,arc\left(sin = \frac{\alpha x_1}{a}\right)\right] = \frac{b}{a}\pi x_1\sqrt{a^2 - \alpha^2 x_1^2} + \frac{ab\pi}{\alpha}\,arc\left(sin = \frac{\alpha x_1}{a}\right),\quad \alpha = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Für $x = a$ hat man die von HB erzeugte Fläche $= b\pi\sqrt{a^2 - \alpha^2 a^2} + \frac{ab\pi}{a}$ $arc(sin = \alpha) = b^2\pi + \frac{ab\pi}{\alpha}\,arc(sin = \alpha)$, also die von der Ellipse erzeugte Fläche $= 2b^2\pi + \frac{2ab\pi}{\alpha}\,arc(sin = \alpha)$.

Dreht sich die Ellipse um ihre kleine Axe, so ist $b^2 > a^2$, also $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$ $\sqrt{\frac{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}$ und wenn $b^2 - a^2 = a^2\beta^2$: $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + \beta^2 x^2}{a^2 - x^2}}$, also die von HG erzeugte Fläche (wo nun AB die kleine Axe der Ellipse):

Digitized by Google

$$2\pi\frac{b}{a}\int_0^{x_1}\sqrt{a^2+\beta^2x^2}\,\partial x,\ \beta^2=\frac{b^2-a^2}{a^2}.$$

Das hier vorkommende Integral wird nach §. 33 bestimmt, und man findet:

$$\int\sqrt{a^2+\beta^2x^2}\,\partial x=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+\beta^2x^2}+\frac{a^2}{2\beta}l(\beta x+\sqrt{a^2+\beta^2x^2}).$$

Also ist die Fläche =

$$\frac{\pi b x_1}{a}\sqrt{a^2+\beta^2x_1^2}+\frac{ab\pi}{\beta}l(\beta x_1+\sqrt{a^2+\beta^2x_1^2})-\frac{ab\pi}{\beta}l(a)=\frac{b\pi x_1}{a}\sqrt{a^2+\beta^2x_1^2}+$$
$$\frac{ab\pi}{\beta}l\left(\frac{\beta x_1+\sqrt{a^2+\beta^2x_1^2}}{a}\right).$$

Für $x_1=a$ erhält man die halbe Rotationsfläche, und da dann $a^2+\beta^2x_1^2=a^2+b^2-a^2=b^2$, so ist dieselbe =

$$b^2\pi+\frac{ab\pi}{\beta}l\left(\beta+\frac{b}{a}\right),\ \beta=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}.$$

II. Der Zykloidenbogen AN drehe sich um AB (Fig. 24). Alsdann ist (§. 48, II):

$$\int y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x=\int y\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\omega}\right)^2}\,\partial\omega=2r^2\int \sin\frac{\omega}{2}(1-\cos\omega)\,\partial\omega$$
$$=4r^2\int\sin^3\frac{\omega}{2}\,\partial\omega,$$

und wenn man hier $\omega=2\varphi$ setzt:

$$\int\sin^3\frac{\omega}{2}\,\partial\omega=2\int\sin^3\varphi\,\partial\varphi=2\left[-\frac{\sin^2\varphi\cos\varphi}{3}-\frac{2\cos\varphi}{3}\right]=-\frac{2}{3}\cos\varphi(2+\sin^2\varphi)$$
$$=-\frac{2}{3}\cos\frac{\omega}{2}\left(2+\sin^2\frac{\omega}{2}\right),$$

also die von AN erzeugte Fläche, wenn ω_1 der zu N gehörige Werth von ω ist:

$$2\pi\int_0^{\omega_1}y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\frac{\partial x}{\partial\omega}\,\partial\omega=8r^2\pi\int_0^{\omega_1}\sin^3\frac{\omega}{2}\,\partial\omega=-\frac{16}{3}r^2\pi\cos\frac{\omega_1}{2}\left(2+\sin^2\frac{\omega_1}{2}\right)$$
$$+\frac{16}{3}r^2\pi.2=\frac{16}{3}r^2\pi\left[2-2\cos\frac{\omega_1}{2}-\cos\frac{\omega_1}{2}\sin^2\frac{\omega_1}{2}\right].$$

Für $\omega_1=\pi$ hat man die von AE erzeugte Fläche $=\frac{32r^2\pi}{3}$, also die von AEB erzeugte $=\frac{64r^2\pi}{3}$.

Für den durch Rotation von ANM erzeugten Körper findet man eben so:

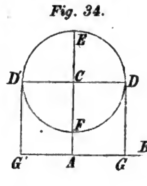
$$r^3\pi\int_0^{\omega_1}(1-\cos\omega)^3\,\partial\omega=r^3\pi\left[\omega_1-3\sin\omega_1+\frac{3\sin\omega_1\cos\omega_1}{2}+\frac{3}{2}\omega_1-\frac{\sin\omega_1\cos^2\omega_1}{3}\right.$$
$$\left.-\frac{2}{3}\sin\omega_1\right]=r^3\pi\left[\frac{5}{2}\omega_1-\frac{11}{3}\sin\omega_1+\frac{3\sin\omega_1\cos\omega_1}{2}-\frac{\sin\omega_1\cos^2\omega_1}{3}\right].$$

Für $\omega_1=\pi$ erhält man den durch Rotation von ACE um AB erzeugten Körper $=\frac{5r^3\pi^2}{2}$, also der von AEB erzeugte Körper $=5r^3\pi^2$.

Digitized by Google

III. Der Kreis FE (Fig. 34) dreht sich um die Gerade AB, die ausserhalb desselben liegt; man soll den Körperinhalt finden, den derselbe beschreibt, so wie den Inhalt der Oberfläche, die von dem Kreisumfange erzeugt wird.

Fig. 34.



Sey C der Mittelpunkt des Kreises, CA senkrecht auf AB und die Länge von CA=a, r der Halbmesser des Kreises. Wählen wir A als Anfangspunkt der Koordinaten, AB als Abszissenaxe (was wir müssen, da die Rotationsaxe immer Abszissenaxe seyn muss), so ist die Gleichung des Kreises:

$$(y-a)^2+x^2=r^2,\ y=a\pm\sqrt{r^2-x^2}.$$

Von den zwei Zeichen gilt das obere für die Hälfte DED', das untere für DFD', wenn DD' parallel mit AB gezogen ist. Man muss also diese beiden Halbkreise nun scheiden.

a) Halbkreis DED': $y=a+\sqrt{r^2-x^2},\ \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}},\ 1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=1+\frac{x^2}{r^2-x^2}$

$$\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}=\frac{r^2}{r^2-x^2}.$$

Die Gränzen des Integrals sind $-$CD' und $+$CD, d. h. $-r$ und $+r$, so dass also der Inhalt des von der Fläche GDED'G' erzeugten Körpers =

$$\pi\int_{-r}^{+r}(a+\sqrt{r^2-x^2})^2\partial x=\pi\int_{-r}^{+r}(a^2+2a\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2)\partial x,$$

und die von DED' erzeugte Oberfläche =

$$2\pi\int_{-r}^{+r}(a+\sqrt{r^2-x^2})\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\partial x=2r\pi\int_{-r}^{+r}\left(\frac{a}{\sqrt{r^2-x^2}}+1\right)\partial x$$

ist

b) Halbkreis DFD': $y=a-\sqrt{r^2-x^2},\ \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}},\ 1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=\frac{r^2}{r^2-x^2};$

mithin ist der Inhalt des von der Fläche GDFD'G' erzeugten Körpers =

$$\pi\int_{-r}^{+r}(a-\sqrt{r^2-x^2})^2\partial x=\pi\int_{-r}^{+r}(a^2-2a\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2)\partial x,$$

und der Inhalt der von DFD' erzeugten Fläche =

$$2\pi\int_{-r}^{+r}(a-\sqrt{r^2-x^2})\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\partial x=2r\pi\int_{-r}^{+r}\left(\frac{a}{\sqrt{r^2-x^2}}-1\right)\partial x.$$

Hieraus ergibt sich nun:

Inhalt des von DFD'ED erzeugten Körpers $=\pi\int_{-r}^{+r}(a^2+2a\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2)\partial x-$

$$\pi\int_{-r}^{+r}(a^2-2a\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2)\partial x=\pi\int_{-r}^{+r}4a\sqrt{r^2-x^2}\,\partial x=4a\pi\int_{-r}^{+r}\sqrt{r^2-x^2}\,\partial x$$

$$=4a\frac{r^2\pi^2}{2}\ (\text{§. 46, II})=2ar^2\pi^2.$$

Inhalt der vom Kreis erzeugten Fläche $=2r\pi\int_{-r}^{+r}\left(\frac{a}{\sqrt{r^2-x^2}}+1\right)\partial x+$

$$2r\pi\int_{-r}^{+r}\left(\frac{a}{\sqrt{r^2-x^2}}-1\right)\partial x=2r\pi\int_{-r}^{+r}\frac{2a}{\sqrt{r^2-x^2}}\partial x=4ra\pi\int_{-r}^{+r}\frac{\partial x}{\sqrt{r^2-x^2}}=4ra\pi\pi=4ar\pi^2.$$

Digitized by Google

Wird $a = r$, so ist GG' Tangente an den Kreis, und man erhält also, wenn ein Kreis vom Halbmesser r um seine Tangente rotirt:

$$\text{Inhalt des entstandenen Körpers} = 2r^3\pi^2,$$
$$\text{„ der „ Fläche} = 4r^2\pi^2.$$

Da der Inhalt des Kreises $= r^2\pi$, sein Umfang $= 2r\pi$, so ergeben sich nach §. 49, V und VI hieraus:

$$\text{Inhalt des Körpers durch Rotation um } GG' = 2r^3\pi^2 + r^2\pi 2(a-r)\pi = 2ar^2\pi^2,$$
$$\text{„ der Fläche „ „ „ „} = 4r^2\pi^2 + 2r\pi 2(a-r)\pi = 4ar\pi^2,$$

wie so eben.

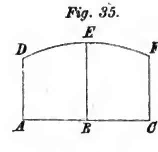


Fig. 35.

IV. Sey DEF (Fig. 35) eine Kurve, deren Gleichung $y = A + Bx + Cx^2$ (§. 46, IX), und sey $AB = BC = h$, $AD = CF = a$, $BE = b$ ($b > a$), wobei B der Anfangspunkt der rechtwinkligen Koordinaten, BC die Abszissenaxe ist. Der von dieser Kurve bei ihrer Drehung um AC beschriebene Körper stellt alsdann ein gewöhnliches Fass vor, in dem a der Halbmesser des Bodens, b die halbe Spuntentiefe und 2 h die Höhe ist.

Da die Kurve durch D, E, F gehen soll, so muss

$$a = A - Bh + Ch^2,\ b = A,\ a = A + Bh + Ch^2$$

seyn, woraus $A = b$, $B = 0$, $C = -\frac{b-a}{h^2}$ folgt, so dass die Gleichung der Kurve ist:

$$y = b - \frac{b-a}{h^2}x^2.$$

Der Inhalt des von der Fläche ADFC beschriebenen Körpers ist also

$$\pi\int_{-h}^{+h} y^2 \partial x = \pi\int_{-h}^{+h}\left[b - \frac{b-a}{h^2}x^2\right]^2 \partial x = 2\pi\left[b^2 h - \frac{2b(b-a)h}{3} + \frac{(b-a)^2 h}{5}\right]$$
$$= 2h\pi\left[\frac{a^2}{3} + \frac{2b^2}{3} - \frac{2}{15}(b-a)^2\right].$$

Wie man leicht sieht, folgt hieraus die Regel: „Der Kubikinhalt eines Fasses ist gleich $\frac{1}{3}$ des über dem Boden errichteten Zylinders, dazu addirt $\frac{2}{3}$ des über dem Schnitte durch die Fassmitte errichteten, und von der Summe subtrahirt $\frac{2}{15}$ des Zylinders, dessen Grundfläche den Unterschied der Durchmesser der genannten beiden Zylinder zum Durchmesser hat, wenn alle diese Zylinder dieselbe Höhe wie das Fass haben."

Lambert in seinen „Beiträgen" I, S. 225, §. 21 beachtet nur die zwei ersten Glieder dieser Formel. Letztere selbst rührt von Grunert her, der in seinem „Archiv" XX, S. 313 sie auch noch aus der Annahme gefunden, DF sey ein Kreisbogen.

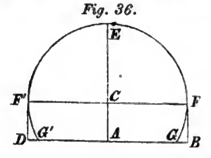


Fig. 36.

V. Der Kreis GEG' rotirt um die Axe AB, die ihn durchschneidet; man soll den Inhalt des von GEG' erzeugten Körpers und Oberfläche berechnen (Fig. 36).

Sey wieder CA senkrecht auf AB, $CA = a$, r der Halbmesser des Kreises, AB Axe der x, A Anfangspunkt, so ist die Gleichung des Kreises: $(y-a)^2 + x^2 = r^2$, $y = a \pm \sqrt{r^2 - x^2}$, wo das obere Zeichen für FEF', das untere für FG und F'G' gilt, wenn F'F

Digitized by Google

parallel AB. Um die Koordinaten von G und G′ zu finden, hat man $y = 0$ zu setzen und findet $x = \pm\sqrt{r^2 - a^2}$ als Abszissen dieser Punkte. Da nun

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mp \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}},\quad 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{r^2}{r^2 - x^2},\quad y\sqrt{1 + \frac{\partial y}{\partial x^2}} = \left(a \pm \sqrt{r^2 - x^2}\right)\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$
$$= r\left(\frac{a}{\sqrt{r^2 - x^2}} + 1\right),$$

so ist der Inhalt der von

$$\text{FEF}' \text{ erzeugten Oberfläche} = 2r\pi\int_{-r}^{+r}\left(\frac{a}{\sqrt{r^2 - x^2}} + 1\right)\partial x = 4r\pi\int_0^r\left(\frac{a}{\sqrt{r^2 - x^2}} + 1\right)\partial x,$$

$$\text{GF} \quad „ \quad „ \quad = 2r\pi\int_{\sqrt{r^2 - a^2}}^{+r}\left(\frac{a}{\sqrt{r^2 - x^2}} - 1\right)\partial x,$$

$$\text{G}'\text{F}' \quad „ \quad „ \quad = 2r\pi\int_{-r}^{-\sqrt{r^2 - a^2}}\left(\frac{a}{\sqrt{r^2 - x^2}} - 1\right)\partial x,$$

wo die zwei letzteren Grössen einander gleich sind. Demnach ist die ganze Oberfläche:

$$4r\pi\left\{\int_0^r\left(\frac{a}{\sqrt{r^2 - x^2}} + 1\right)\partial x + \int_{\sqrt{r^2 - a^2}}^{r}\left(\frac{a}{\sqrt{r^2 - x^2}} - 1\right)\partial x\right\} = 4r\pi\left\{\frac{a\pi}{2} + r + \frac{a\pi}{2} - \right.$$
$$\left. a\,arc\left(sin = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r}\right) - r + \sqrt{r^2 - a^2}\right\} = 4r\pi\left[a\pi + \sqrt{r^2 - a^2} - \right.$$
$$\left. a\,arc\left(sin = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r}\right)\right].$$

Für $a = 0$ findet man $4r^2\pi$ für die Oberfläche einer Kugel.

Ferner ist der körperliche Inhalt des von

$$\text{BFEF}'\text{D erzeugten Körpers} = \pi\int_{-r}^{+r}(a + \sqrt{r^2 - x^2})^2\partial x = 2\pi\int_0^r(a + \sqrt{r^2 - x^2})^2\partial x,$$

$$\text{BFG} \quad „ \quad „ \quad = \pi\int_{\sqrt{r^2 - a^2}}^{r}(a - \sqrt{r^2 - x^2})^2\partial x.$$

$$\text{DG}'\text{F} \quad „ \quad „ \quad = \pi\int_{-r}^{-\sqrt{r^2 - a^2}}(a - \sqrt{r^2 - x^2})^2\partial x,$$

wo wieder die zwei letzten gleich sind. Mithin ist der von GEG′ erzeugte Körper =

$$2\pi\left[\int_0^r(a + \sqrt{r^2 - x^2})^2\partial x - \int_{\sqrt{r^2 - a^2}}^{r}(a - \sqrt{r^2 - x^2})^2\partial x\right] = 2\pi\left[a^2 r + r^3 - \frac{r^3}{3} + ar^2\frac{\pi}{2} - \right.$$
$$a^2 r + a^2\sqrt{r^2 - a^2} - r^3 + r^2\sqrt{r^2 - a^2} + \frac{r^3}{3} - \frac{(\sqrt{r^2 - a^2})^3}{3} - a^2\sqrt{r^2 - a^2} + ar^2\frac{\pi}{2} -$$
$$\left. ar^2 arc\left(sin = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r}\right)\right] = 2\pi\left[ar^2\pi + \frac{2r^2 + a^2}{3}\sqrt{r^2 - a^2} - ar^2\,arc\left(sin = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r}\right)\right].$$

Digitized by Google

VI. Dreht sich die Lemniscate (Fig. 25, S. 180) um die Axe AB, so ist der durch Rotation von AMB entstehende Körperinhalt, da jetzt $r^2 = a^2 \cos 2\omega$, $r \frac{\partial r}{\partial \omega} = - a^2 \sin 2\omega$, und die Bedingungen in §. 49, III erfüllt sind:

$$-\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \sin^2\omega \frac{\left(r \frac{\partial r}{\partial \omega} \cos\omega - r^2 \sin\omega\right)}{r} \partial\omega = a^3 \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\omega \cos 2\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}} (\sin 2\omega \cos\omega +$$

$$\cos 2\omega \sin\omega) \partial\omega = a^3\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\omega \cos 2\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}} \sin 3\omega \partial\omega = a^3\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\omega \sin 3\omega \sqrt{\cos 2\omega}\, \partial\omega =$$

$$a^3\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (3\sin^2\omega - 4\sin^4\omega) \sin\omega \sqrt{\cos 2\omega}\, \partial\omega \quad (§. 5, IV).$$

Da $\cos 2\omega = 1 - 2\sin^2\omega$, so setze man $1 - 2\sin^2\omega = z^2$, wo die Gränzen von z seyn werden: 1,0; und hat $-4\sin\omega\cos\omega \frac{\partial\omega}{\partial z} = 2z$, $\sin\omega \frac{\partial\omega}{\partial z} = -\frac{z}{2\cos\omega} = \frac{-z}{2\sqrt{1-\sin^2\omega}}$ $= -\frac{z}{2\sqrt{1-\frac{1-z^2}{2}}} = -\frac{z}{2\sqrt{\frac{1+z^2}{2}}}$, $\sin^2\omega = \frac{1-z^2}{2}$, so dass der Inhalt =

$$a^3\pi \int_1^0 (3\sin^2\omega - 4\sin^4\omega) \sqrt{1 - 2\sin^2\omega}\, \sin\omega \frac{\partial\omega}{\partial z} \partial z = -\frac{a^3\pi}{\sqrt{2}} \int_1^0 \left[3\frac{1-z^2}{2} - 4\left(\frac{1-z^2}{2}\right)^2\right] \times$$

$$z \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \partial z = \frac{a^3\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{z^2 + z^4 - 2z^6}{\sqrt{1+z^2}} \partial z = \frac{a^3\pi}{4\sqrt{2}} l(1+\sqrt{2}) - \frac{a^3\pi}{12},$$

d. h. der durch Rotation der ganzen Lemniscate entstandene Körper hat zum Inhalte:

$$\frac{a^3\pi}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} l(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{3}\right].$$

VII. Sey $r = a\sqrt[n]{\cos\omega}$ die Polargleichung einer Kurve, wo n eine positive ganze Zahl und $a > 0$ ist, so wird ω nur von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{und 0 bis } -\frac{\pi}{2}\right)$ gehen können, da sonst $\sqrt[n]{\cos\omega}$ negativ oder imaginär wäre.

Demnach ist der durch Rotation dieser Kurve um ihre Axe entstandene Körperinhalt gleich

$$-\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^2\omega \left(\cos\omega \frac{\partial r}{\partial\omega} - r\sin\omega\right) \partial\omega$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^{\frac{2}{n}}\omega \sin^2\omega \left[\frac{a}{n} \cos\omega \cos^{\frac{1}{n}-1}\omega \sin\omega + a\cos^{\frac{1}{n}}\omega \sin\omega\right] \partial\omega$$

$$= a^3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{n}}\omega \sin^3\omega \left(\frac{1}{n} + 1\right) \partial\omega = a^3 \frac{n+1}{n} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{n}}\omega \sin^3\omega\, \partial\omega.$$

Aus §. 34 Formel (b) folgt aber

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{n}}\omega \sin^3\omega\, \partial\omega = \frac{2n}{3(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{n}}\omega \sin\omega\, \partial\omega.$$

Digitized by Google

Ferner (§. 28)

$$\int cos^{\frac{3}{n}} \omega \, sin\, \omega \, \partial \omega = -\frac{n}{n+3} cos^{\frac{n+3}{n}} \omega, \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{\frac{3}{n}} \omega \, sin\, \omega \, \partial\omega = \frac{n}{n+3};$$

demnach

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{\frac{3}{n}} \omega \, sin^3 \omega \, \partial \omega = \frac{2n^2}{3(n+1)(n+3)},$$

und der Körperinhalt:

$$a^3 \pi \frac{n+1}{n} \frac{2n^2}{3(n+1)(n+3)} = \frac{2a^3 n\pi}{3(n+3)}.$$

(Dass der Ausdruck unter dem Integralzeichen von $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{\pi}{2}$ positiv ist, wird unmittelbar klar seyn).

Wir verweisen den Leser, der weitere Beispiele dieser Art kennen zu lernen wünscht, namentlich solche, die für die technischen Anwendungen von Wichtigkeit sind, auf die Schrift: „Die Geometrie der Körper. Für Gewerbeschulen und zum Selbstunterrichte von Dr. Zehme. Iserlohe, 1859."

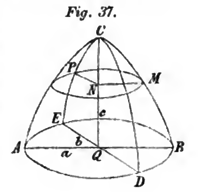
§. 51.

Berechnung von Körper- und Flächeninhalten bei bekannten Inhalten paralleler Schnitte.

In manchen Fällen kann man die Berechnung eines Körperinhalts oder einer Oberfläche dadurch ermöglichen, dass man im Stande ist, die Gestalt und den Inhalt eines ebenen Schnitts, der einer gewissen Ebene parallel ist, zu ermitteln. Legt man nämlich zwei sehr nahe parallele solche Schnitte, so wird man das dazwischen liegende Körperstück als zylindrisch oder prismatisch anzusehen desto mehr das Recht haben, je näher die Schnitte sind, so dass man bei unendlich nahen Schnitten, d. h. wenn man zu den Gränzwerthen übergeht, den Körper als eine Summe von solchen zylindrischen Körpertheilen ansehen kann. (Vergl. §. 6, III.) Eben so wird man das zwischen zwei solchen Schnitten liegende Flächenstück als eben ansehen und darnach berechnen dürfen. Einige Beispiele mögen dies Verfahren wieder erläutern.

I. Denken wir uns zwei Ellipsen, die denselben Mittelpunkt haben und deren Ebenen auf einander senkrecht stehen, so gelegt, dass ihre einen Hauptaxen 2c zusammenfallen, während die andern 2a und 2b auf einander senkrecht stehen; denken uns ferner eine dritte bewegliche Ellipse, deren Ebene immer senkrecht ist zu der gemeinschaftlichen Hauptaxe 2c und deren Endpunkte der Hauptaxen immer in den zwei genannten Ellipsen liegen, so beschreibt diese bewegliche Ellipse das dreiaxige Ellipsoid, wovon die eine Hälfte in Figur 37 abgebildet ist. Dort sind ABC, ECD die halben festen Ellipsen, AEBD ist eine Lage der beweglichen Ellipse, MP eine andere.

Fig. 37.



Digitized by Google

Sey nun $QN = x$, so ist $NM = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - x^2}$, $NP = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - x^2}$, so dass also die Halbaxen der Ellipse MP bekannt sind. Die Fläche derselben ist (§. 46, II) also $\frac{ab(c^2-x^2)}{c^2}\pi$. Denkt man sich nun eine zweite Lage der beweglichen Ellipse in der Entfernung $x + \varDelta x$ von AB, so wird man das zwischen den beiden Ebenen liegende Körperstück mehr und mehr (d. h. mit abnehmendem $\varDelta x$) als einen Zylinder ansehen können, dessen Inhalt also $= \frac{ab(c^2-x^2)}{c^2}\pi\,\varDelta x$ ist, so dass der Inhalt des Körpers ABC =

$$\frac{ab\pi}{c^2}\int_0^c (c^2 - x^2)\,\partial x = \frac{ab\pi}{c^2}\left(c^3 - \frac{c^3}{3}\right) = \frac{2}{3}abc\pi$$

ist (vergl. §. 45). Der Inhalt des ganzen Körpers ist also $\frac{4}{3}abc\pi$.

Fig. 38.

II. In dem Eckpunkte C des Dreiecks ABC (Fig. 38) sey eine Senkrechte CD auf die Ebene des Dreiecks errichtet. In der Ebene ACD ziehe man eine Viertelsellipse, deren Halbaxen AC und CD seyen, eben so in der Ebene BCD eine, deren Halbaxen BC und CD sind; endlich lasse man eine Gerade parallel mit AB sich so bewegen, dass ihre Endpunkte immer in den Ellipsen AD, BD sich befinden, so beschreibt sie die Oberfläche des elliptischen Klostergewölbes.

Durch den Punkt c der Geraden CD lege man die Ebene acb parallel ACB, so ist ab eine der Lagen der erzeugenden Geraden und das Dreieck abc ist ähnlich ACB. Ist nun $\varDelta$ die Fläche des Dreiecks ABC, δ die von abc, so hat man

$$\frac{\delta}{\varDelta} = \frac{ac^2}{AC^2}, \quad \delta = \varDelta\frac{ac^2}{AC^2}.$$

Da aber AD eine Ellipse ist, so hat man, wenn $CD = h$, $Cc = x$:

$$\frac{ac^2}{AC^2} + \frac{x^2}{h^2} = 1, \quad \frac{ac^2}{AC^2} = 1 - \frac{x^2}{h^2}, \quad \delta = \left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right)\varDelta.$$

Legt man einen zweiten Schnitt parallel acb und in der Entfernung dx von demselben, so wird man, bei unendlich kleinem dx, das zwischenliegende Körperstück als prismatisch, vom Inhalte $\left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right)\varDelta . dx$ ansehen können, so dass also der Inhalt des Körpers ABCD =

$$\varDelta\int_0^h \left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right)\partial x = \varDelta\left(h - \frac{1}{3}h\right) = \frac{2}{3}\varDelta h = \frac{2}{3}.ABC.CD.$$

Will man den Inhalt der Fläche ABD haben, so verfährt man in ähnlicher Weise. Das zwischen den zwei parallelen Schnitten gelegene Flächenstückchen kann als ein ebenes Parallelogramm angesehen werden, dessen Grundlinie ab und dessen Höhe die (auf der Fläche gemessene) Entfernung der beiden Parallelen ist. Um nun letztere zu finden, wollen wir durch die auf AB senkrecht stehende Gerade CE und durch CD eine Ebene legen, welche die Fläche in DE schneiden soll; diese Kurve DE wird nun auf ab, so wie auf allen mit AB parallelen Geraden senkrecht stehen. Was dieselbe anbelangt, so ist sie eine Ellipse. Denn es ist, wenn ec parallel EC:

Digitized by Google

$$\frac{ec^2}{EC^2} = \frac{ac^2}{AC^2}, \quad \frac{ac^2}{AC^2} + \frac{Cc^2}{CD^2} = 1,$$

also auch

$$\frac{ec^2}{EC^2} + \frac{Cc^2}{CD^2} = 1,$$

was beweist, dass ED eine Ellipse ist, deren Halbaxen CE und CD sind. Die Höhe des Parallelogramms ist also ein Stück dieses elliptischen Bogens, das zum Axenstück dx gehört, mithin (§. 50, I) gleich $\sqrt{\frac{h^4-(h^2-a^2)x^2}{h^2(h^2-x^2)}}\,dx$ gesetzt werden kann, wenn (dx unendlich klein, und) CE = a ist. Also ist, da ab : AB = ac : AC, und

$$\frac{ac^2}{AC^2} + \frac{Cc^2}{CD^2} = 1, \quad \frac{ac^2}{AC^2} = 1 - \frac{x^2}{h^2}, \quad \frac{ac}{AC} = \sqrt{1-\frac{x^2}{h^2}} = \frac{ab}{AB}, \; ab = AB\sqrt{1-\frac{x^2}{h^2}},$$

wenn man AB durch b bezeichnet, die Fläche jenes Parallelogramms zu setzen:

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{h^2}}\sqrt{\frac{h^4-(h^2-a^2)x^2}{h^2(h^2-x^2)}}\,dx = \frac{b}{h^2}\sqrt{h^4-(h^2-a^2)x^2}\,dx.$$

Sey nun:

a) $h^2 > a^2$ und dann $h^2 - a^2 = h^2\alpha^2$, so ist $\frac{b}{h^2}\sqrt{h^4-(h^2-a^2)x^2} = \frac{b}{h}\sqrt{h^2-\alpha^2 x^2}$, also die Fläche:

$$\frac{b}{h}\int_0^h \sqrt{h^2-\alpha^2 x^2}\,\partial x = \frac{b}{h}\left[\frac{h}{2}\sqrt{h^2-\alpha^2 h^2} + \frac{h^2}{2\alpha} arc\left(sin = \frac{\alpha h}{h}\right)\right] = \frac{ab}{2} + \frac{bh}{2\alpha} arc\,(sin = \alpha),$$

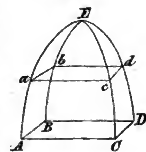
wo $\frac{ab}{2} = \Delta =$ der Fläche des Dreiecks ABC ist.

b) $h^2 < a^2$, $h^2 - a^2 = -\beta^2 h^2$, so ist die Fläche =

$$\frac{b}{h}\int_0^h \sqrt{h^2+\beta^2 x^2}\,\partial x = \frac{b}{h}\left[\frac{h}{2}\sqrt{h^2+\beta^2 h^2} + \frac{h^2}{2\beta} l\left(\frac{\beta h + \sqrt{h^2+\beta^2 h^2}}{h}\right)\right] = \frac{ab}{2} + \frac{bh}{2\beta} l\left(\beta + \frac{a}{h}\right).$$

III. Bei der gewöhnlichen Pyramide verhalten sich die Dimensionen (Seiten) der mit der Grundfläche parallelen Schnitte wie die Entfernung derselben von der Spitze, so dass man sagen kann, es entstehe dieselbe, indem eine ebene Figur sich parallel mit sich selbst bewegt, und dabei ihre Dimensionen proportional dem durchlaufenen Wege vergrössert. Gesetzt nun aber, die bewegte Figur vergrössere ihre Dimensionen im Verhältniss der Quadratwurzel der Entfernung von der Spitze, so entsteht eine Pyramide, deren Kanten statt gerader Linien Parabeln sind (Fig. 39). Ist nun h die Höhe der Pyramide, d. h. die Entfernung der Spitze E von ABCD, x der Abstand des Schnitts abcd von F, G der Inhalt der Grundfläche, so ist der Inhalt des Schnitts abcd $= G\frac{x}{h}$, so dass der Inhalt der ganzen Pyramide =

Fig. 39.



$$G\int_0^h \frac{x}{h}\,\partial x = G \cdot \frac{1}{2}\,\frac{h^2}{h} = \frac{1}{2}\,Gh.$$

Hat man eine abgekürzte Pyramide dieser Art und ist g deren obere Fläche, h die Höhe, x die (unbekannte) Entfernung der oberen Fläche von der Spitze, so ist

$$\frac{g}{G} = \frac{x}{x+h}, \quad x = \frac{gh}{G-g},$$

also die abgekürzte Pyramide:

$$\frac{1}{2} G(h+x) - \frac{1}{2} g x = \frac{1}{2}(G+g) h.$$

Um diese Resultate zu erhalten bedarf es der Annahme, es seyen die parallelen Schnitte ähnlich, nicht, sondern es genügt, dass die Flächen der parallelen Schnitte sich verhalten, wie ihre Entfernungen von der Spitze der Pyramide.

IV. Gesetzt ein Körper sey so beschaffen, dass wenn man (ebene) Schnitte durch denselben, parallel einer festen Ebene, legt, die Fläche eines solchen Schnitts, der in dem Abstand x von der festen Ebene sich befindet, durch den Ausdruck $A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ gegeben sey, wo A, B, C, D von x nicht abhängen, so ist der Inhalt eines Stück des Körpers, das zwischen zwei mit der festen Ebene parallelen Schnitten liegt, die in den Entfernungen a und b ($b > a$) von derselben gezogen sind, gleich

$$\int_a^b (A + Bx + Cx^2 + Dx^3) \partial x.$$

Sey nun F_1 der Inhalt des Schnitts in der Entfernung a (Grundfläche), F_3 der Inhalt des Schnitts in der Entfernung b (obere Fläche), F_2 der Inhalt des Schnitts in der Entfernung $\frac{1}{2}(a+b)$, d. h. des Schnitts in der Mitte zwischen beiden, so ist, wenn man $b - a = 2h$, also $b = a + 2h$, $\frac{1}{2}(a+b) = a + h$ setzt, in §. 46, XI für x_0 bloss a, für y_0, y_1, y_2 aber F_1, F_2, F_3 zu setzen; demnach

$$\int_a^b (A + Bx + Cx^2 + Dx^3) \partial x = \frac{b-a}{6}(F_1 + 4F_2 + F_3).$$

Ist also h die Höhe eines von parallelen Grundflächen begränzten Körpers, sind ferner die mit diesen Grundflächen parallel geführten Schnitte so beschaffen, dass die Flächen derselben durch $A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ gegeben sind, wo A, B, C, D Konstanten und x der Abstand eines Schnitts von der Grundfläche (allgemein von einer mit der Grundfläche parallelen festen Ebene), so ist der Inhalt desselben

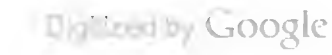
$$\frac{h}{6}(g + 4\gamma + G),$$

wo g, G die Inhalte der beiden Grundflächen, γ die Fläche des Mittelschnitts (in der halben Höhe durch den Körper gelegten Schnittes) ist.

Hieher gehören die sämmtlichen Körper, welche die elementare Stereometrie betrachtet, so wie die so genannten Obelisken; * die in I—III hier betrachteten werden

---

* Man pflegt unter Obelisk einen Körper zu verstehen, dessen obere und untere Fläche



ebenfalls nach derselben Formel berechnet werden können, eben so eine Menge Rotationskörper u. s. w. — Dass einige der Konstanten A, B, C, D auch Null seyn können, versteht sich von selbst.

V. Diese Formel lässt sich zur Aufstellung einer Näherungsformel benützen. Gesetzt nämlich, man habe einen von zwei parallelen Flächen begränzten Körper, dessen Höhe = h sey; man theile letztere in 2n gleiche Theile und mache in den Theilpunkten Schnitte durch den Körper parallel mit den Grundflächen. Die Flächeninhalte dieser Schnitte seyen:

$$g, \gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots, \gamma_{2n-1}, G.$$

Alsdann wird man das Körperstück, das zwischen den Flächen g und $\gamma_2, \gamma_3, \ldots\ldots, \gamma_{2n-2}$ und G liegt, desto genauer als einen Körper ansehen können, der nach obiger Formel berechnet wird, je grösser 2n ist. Daraus ergibt sich dann wie in §, 46, X als sehr genäherten Inhalt des Körpers:

$$\frac{h}{6n}[g + G + 4(\gamma_1 + \gamma_3 + \ldots + \gamma_{2n-1}) + 2(\gamma_2 + \gamma_4 + \ldots + \gamma_{2n-2})].$$

Allgemeiner Ausdruck.

VI. Unter Beachtung von §. 39, IV kann man den Inhalt eines hier überhaupt betrachteten Körpers gleich setzen dem eines Prisma's von derselben Höhe mit dem Körper, dessen Grundfläche aber der mittlere Werth aller Schnitte ist. — Dieser Ausdruck eignet sich für alle Rotationskörper, die ohnehin sämmtlich hieher gehören, und ersetzt §. 49, VII.

---

parallele (aber nicht nothwendig ähnliche) Vielecke von gleicher Seitenanzahl und dessen Seitenflächen (ebene) Paralleltrapeze sind. Dabei können sogar einzelne Seiten der parallelen Flächen zu Null geworden seyn, so dass die betreffenden Seitenflächen Dreiecke sind.

Die bekannteste Form ist der Ponton, dessen obere und untere Fläche Rechtecke sind. Sind A, B die zwei verschiedenen Seiten des untern Rechtecks; a, b die mit ihnen parallelen des obern; so ist G = AB, g = ab. Der Mittelschnitt ist gleichfalls ein Rechteck, dessen Seiten $\frac{1}{2}(A + a)$, $\frac{1}{2}(B + b)$ sind, so dass dessen Fläche $= \frac{(A + a)(B + b)}{4}$ ist. Nach der angeführten Formel ist also der Inhalt des Pontons:

$$[AB + (A + a)\ (B + b) + ab]\frac{h}{6},$$

wo h die Höhe desselben bedeutet.

Man vergleiche hiemit meine „ebene Polygonometrie“ S. 58, Note. Die dort gelöste Aufgabe gehört offenbar hieher und würde leicht nach der angegebenen Weise gelöst werden können.

Digitized by Google

Neunter Abschnitt.

Die Theoreme von Taylor und Maclaurin, nebst deren Anwendungen.

§. 52.

Taylor's und Maclaurin's Sätze.

I. Es ist identisch (§. 26)

$$\int f'(x)\,\partial x = f(x) + C.$$

Setzen wir hier (§. 28) $x = a + h - z$, wo a und h Konstanten sind, so ist $\frac{\partial x}{\partial z} = -1$, also

$$\int f'(x)\,\partial x = \int f'(x)\frac{\partial x}{\partial z}\,\partial z = -\int f'(a+h-z)\,\partial z,$$

so dass auch

$$-\int f'(a+h-z)\,\partial z = f(a+h-z) + C,$$

$$\int f'(a+h-z)\,\partial z = -f(a+h-z) - C.$$

Dabei ist aber $f'(a+h-z)$ nicht etwa der Differentialquotient von $f(a+h-z)$ nach z, sondern der von $f(x)$ nach x, wenn x schliesslich durch $a+h-z$ ersetzt wird. Natürlich ist eben so

$$\int f'(a+h-x)\,\partial x = -f(a+h-x) - C,$$

worin $f'(a+h-x) = \frac{\partial f(u)}{\partial u}$, wenn nach der Differentiation $u = a + h - x$ gesetzt wird. Aus dieser Gleichung folgt (§. 41)

$$\int_0^h f'(u)\,\partial x = -f(a) + f(a+h) = f(a+h) - f(a),$$

so dass also

$$f(a+h) - f(a) = \int_0^h f'(u)\,\partial x, \qquad \text{(a)}$$

wo $u = a + h - x$ endgiltig zu setzen ist.

Auf das Integral der zweiten Seite der Gleichung (a) wollen wir die Formel der theilweisen Integration (§. 27) anwenden. Wir setzen dabei

$$y = f'(u) \quad\Big|\quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f'(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = -f''(u)\ (\S.\ 13),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \quad\Big|\quad z = x,$$



Digitized by Google

so dass

$$\int f'(u)\,\partial x = x f'(u) + \int x f^2(u)\,\partial x,$$

$$\int_0^h f'(u)\,\partial x = h f'(a) + \int_0^h x f^2(u)\,\partial x \text{ (§. 42, V).}$$

Auf dieses Integral ist wieder dieselbe Formel anzuwenden, wobei $y = f^2(u)$. $\frac{\partial z}{\partial x} = x$. also $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f^2(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = -f^3(u)$, $z = \frac{x^2}{2}$, und

$$\int x f^2(u)\,\partial x = \frac{x^2}{2} f^2(a+h-x) + \int \frac{x^2}{2} f^3(u)\,\partial x,$$

$$\int_0^h x f^2(u)\,\partial x = \frac{h^2}{2} f^2(a) + \int_0^h \frac{x^2}{2} f^3(u)\,\partial x.$$

Unter fortwährender Anwendung der Sätze in §. 27 und §. 42, V erhält man so:

$$\int \frac{x^2}{2} f^3(u)\,\partial x = \frac{x^3}{2.3} f^3(a+h-x) + \int \frac{x^3}{2.3} f^4(u)\,\partial x,$$

$$\int_0^h \frac{x^2}{2} f^3(u)\,\partial x = \frac{h^3}{2.3} f^3(a) + \int_0^h \frac{x^3}{2.3} f^4(u)\,\partial x;$$

$$\int \frac{x^3}{2.3} f^4(u)\,\partial x = \frac{x^4}{2.3.4} f^4(a+h-x) + \int \frac{x^4}{2.3.4} f^5(u)\,\partial x,$$

$$\int_0^h \frac{x^3}{2.3} f^4(u)\,\partial x = \frac{h^4}{2.3.4} f^4(a) + \int_0^h \frac{x^4}{2.3.4} f^5(u)\,\partial x;$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\int \frac{x^{n-1}}{2.3\ldots n-1} f^n(u)\,\partial x = \frac{x^n}{2.3\ldots n} f^n(a+h-x) + \int \frac{x^n}{2.3\ldots n} f^{n+1}(u)\,\partial x,$$

$$\int_0^h \frac{x^{n-1}}{2.3\ldots n-1} f^n(u)\,\partial x = \frac{h^n}{2.3\ldots n} f^n(a) + \int_0^h \frac{x^n}{2.3\ldots n} f^{n+1}(u)\,\partial x,$$

wo $f^r(a)$ den Werth von $\frac{\partial^r f(u)}{\partial u^r}$ für $u = a$ [oder von $f^r(x)$ für $x = a$] bezeichnet, und $2.3\ldots n-1$ das Produkt der ganzen Zahlen von 2 bis $n-1$, $2.3\ldots n$ eben so das Produkt der ganzen Zahlen von 2 bis n.

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (a) ein, so erhält man nach einander:

$$\begin{aligned}
f(a+h) - f(a) &= \int_0^h f'(u)\,\partial x \\
&= h f'(a) + \int_0^h x f^2(u)\,\partial x \qquad\qquad (b) \\
&= h f'(a) + \frac{h^2}{2} f^2(a) + \int_0^h \frac{x^2}{2} f^3(u)\,\partial x \\
&= h f'(a) + \frac{h^2}{2} f^2(a) + \frac{h^3}{2.3} f^3(a) + \int_0^h \frac{x^3}{2.3} f^4(u)\,\partial x \\
&= \ldots \\
&\vdots \\
&= h f'(a) + \frac{h^2}{2} f^2(a) + \ldots\ldots + \frac{h^n}{2.3\ldots n} f^n(a) + \int_0^h \frac{x^n}{2.3\ldots n} f^{n+1}(u)\,\partial x.
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Daraus also

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f^2(a) + \frac{h^3}{1.2.3} f^3(a) + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{1.2..n} f^n(a) + \int_0^h \frac{x^n}{1.2..n} f^{n+1}(u)\,\partial x. \qquad (1)$$

Diese Formel bildet den Taylor'schen Satz. Sie setzt voraus, dass für alle angewandten bestimmten Integrale die Grössen unter dem Integralzeichen innerhalb der Integrationsgränzen endlich sind (§. 39, I, §. 41, I), dass also

$$f'(u),\ f^2(u),\ \ldots,\ f^{n+1}(u),\ (u = a + h - x)$$

von $x = 0$ bis $x = h$, d. h. von $u = a + h$ bis $u = a$ endlich seyen. Nach §. 10 sind aber $f^n(u)$, $f^{n-1}(u)$, ..., $f'(u)$ stetig (also endlich) wenn $f^{n+1}(u)$ endlich ist, so dass diese letzte Bedingung genügt.

Setzt man in der Formel (1) $a = 0$, so ist sie

$$f(h) = f(0) + \frac{h}{1} f'(0) + \frac{h^2}{1.2} f^2(0) + \ldots + \frac{h^n}{1.2..n} f^n(0) + \int_0^h \frac{x^n}{1\ldots n} f^{n+1}(v)\,\partial x,\ v = h - x,$$

oder wenn wir a statt h schreiben:

$$f(a) = f(0) + \frac{a}{1} f'(0) + \frac{a^2}{1.2} f^2(0) + \ldots + \frac{a^n}{1.2..n} f^n(0) + \int_0^a \frac{x^n}{1.2..n} f^{n+1}(v)\,\partial x, \qquad (2)$$

wo $v = a - x$. Diess ist Maclaurin's Satz. Er verlangt, dass $f^{n+1}(v)$ endlich sey von $v = 0$ bis $v = a$, wobei bekanntlich $f^r(0)$ den Werth von $f^r(v)$ für $v = 0$ bedeutet.

Der zweite Satz ergibt sich hiernach aus dem ersten, so dass wir letztern, als den allgemeinern, genauer untersuchen wollen.

Restglied.

II. Aus (1) folgt, dass wenn man setzt

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f^2(a) + \ldots + \frac{h^n}{1.2..n} f^n(a), \qquad (3)$$

man der zweiten Seite noch zuzufügen habe:

$$\int_0^h \frac{x^n}{1.2..n} f^{n+1}(u)\,\partial x,\ u = a + h - x, \qquad (4)$$

welche Grösse desshalb das Ergänzungs- oder Restglied heisst, das wir nun weiter betrachten wollen. Wir bemerken aber vorher, dass wenn man in (3) $n = 0$ setzen will, diess heisst, man schreibe $f(a+h) = f(a)$; alsdann ist (4), nach (b), gleich $\int_0^h f'(u)\,\partial x$; setzt man $n = 1$, so ist $f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a)$ gesetzt und (4) ist, ebenfalls nach (b): $\int_0^h \frac{x}{1} f^2(u)\,\partial x$.

Wenden wir auf (4) den Satz (7) des §. 39 an, in welchem $a = 0$ gewählt werde, so dass

$$\int_0^h F(x)\,\partial x = hF(\Theta h), \qquad (c)$$

so ist $F(x) = \frac{x^n}{1.2..n} f^{n+1}(u)$. In dieser Grösse ist statt x zu setzen Θh, wodurch $u = a + h - x$ zu $a + h - \Theta h = a + (1 - \Theta) h$ wird, so dass (c) gibt:

$$\int_0^h \frac{x^n}{1.2..n} f^{n+1}(u)\,\partial x = \frac{h(\Theta h)^n}{1.2...n} f^{n+1}[a + (1-\Theta)h].$$

Θ ist dabei ein ächter positiver Bruch; setzen wir also $\Theta = 1 - \Theta_1$, d. h. $\Theta_1 = 1 - \Theta$, so ist auch Θ_1 ein positiver ächter Bruch. Dadurch wird

$$\int_0^h \frac{x^n}{1.2...n} f^{n+1}(u)\,\partial x = \frac{(1-\Theta_1)^n h^{n+1}}{1.2...n} f^{n+1}(a + \Theta_1 h),$$

oder, da Θ_1 eben eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl bedeutet, was wir auch kurzweg mit Θ bezeichnen:

$$\int_0^h \frac{x^n}{1.2..n} f^{n+1}(u)\,\partial x = \frac{(1-\Theta)^n h^{n+1}}{1.2..n} f^{n+1}(a + \Theta h), \qquad (d)$$

wo Θ zwischen 0 und 1.

Wir können aber auf (4) auch den Satz (8) des §. 39 anwenden, wenn wir dort $F(x) = \frac{x^n}{1.2..n}$ setzen, da diese Grösse ihr Zeichen nicht ändert, wenn x von 0 bis h geht (wo h positiv oder negativ seyn kann). Alsdann ist bloss in $f^{n+1}(u)$ für x zu setzen Θh, da das a in jenem Satze 0, b—a aber h ist. Dadurch wird $f^{n+1}(u) = f^{n+1}(a+h-x)$ zu $f^{n+1}[a + (1-\Theta)h]$, oder da auch $1 - \Theta$ zwischen 0 und 1 liegt, wie so eben, zu $f^{n+1}(a + \Theta h)$. Demnach auch

$$\int_0^h \frac{x^n}{1.2..n} f^{n+1}(u)\,\partial x = f^{n+1}(a + \Theta h) \int_0^h \frac{x^n}{1.2..n}\,\partial x = \frac{h^{n+1}}{1.2...(n+1)} f^{n+1}(a+\Theta h). \qquad (e)$$

Für $n = 0$ heissen die Formen (d) und (e) beide:

$$\frac{h}{1} f'(a + \Theta h),$$

wie der Satz (c) unmittelbar gibt.

§. 53.

Zweite Form der beiden Sätze.

I. Mittelst der Entwicklungen in §. 52, II (d) und (e) nimmt nun Taylor's Satz die folgenden zwei Formen an:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f^2(a) + \dots + \frac{h^n}{1.2..n} f^n(a) + \frac{(1-\Theta)^n h^{n+1}}{1.2...n} f^{n+1}(a + \Theta h), \qquad (5)$$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f^2(a) + \dots + \frac{h^n}{1.2..n} f^n(a) + \frac{h^{n+1}}{1.2..n+1} f^{n+1}(a + \Theta h), \qquad (5')$$

Digitized by Google

worin Θ zwischen 0 und 1 liegt, alle vorkommenden Grössen endlich seyn müssen, namentlich aber $f^{n+1}(x)$ endlich seyn muss von $x=a$ bis $x=a+h$.

Als spezielle Formen mögen zugefügt werden:

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\Theta h);$$

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{(1-\Theta)h^2}{1}f^2(a+\Theta h),$$

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1.2}f^2(a+\Theta h),$$

von denen die zwei letzten sich aus (5) und (5′) für $n=1$ ohne Schwierigkeit ergeben; die erste für $n=0$ daraus gefolgert werden kann, wenn man $1.2..n$ alsdann $=1$ setzt. (Vergl. „Anhang" unter **N**).

II. Setzt man in (5) und (5′) $a=0$, dann a für h, so erhält man:

$$f(a)=f(0)+\frac{a}{1}f'(0)+\frac{a^2}{1.2}f^2(0)+\ldots+\frac{a^n}{1.2..n}f^n(0)+\frac{(1-\Theta)^n a^{n+1}}{1.2..n}f^{n+1}(\Theta a), \quad (6)$$

$$f(a)=f(0)+\frac{a}{1}f'(0)+\frac{a^2}{1.2}f^2(0)+\ldots+\frac{a^n}{1.2..n}f^n(0)+\frac{a^{n+1}}{1.2..n+1}f^{n+1}(\Theta a), \quad (6')$$

worin wieder alle vorkommenden Grössen endlich seyn müssen, namentlich aber $f^{n+1}(x)$ endliche Werthe haben muss von $x=0$ bis $x=a$. Als speziellen Fall kann man zufügen:

$$f(a)=f(0)+\frac{a}{1}f'(\Theta a),$$

Die herkömmliche Form der Sätze (5) und (6) verlangt, dass x an die Stelle von a gesetzt sey, unter der wir sie auch anwenden wollen.

Unendliche Reihen.

III. Lässt man in der Formel (3) des §. 52 die Zahl n wachsen, so nimmt die Zahl der Glieder der zweiten Seite zu. Ist nun das Ergänzungsglied (4) so beschaffen, dass dasselbe mit unendlich wachsendem n mehr und mehr gegen Null geht, d. h. ist

$$Gr\int_0^h \frac{x^n}{1.2..n}f^{n+1}(u)\,\partial x=0, \quad (7)$$

wobei *Gr* sich auf ein unendlich wachsendes n bezieht, so kann man die Reihe (3) in's Unendliche gehen lassen, also setzen:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1.2}f^2(a)+\frac{h^3}{1.2.3}f^3(a)+\ldots\ldots \quad (8)$$

wobei wir durch die Punkte, denen kein letztes Glied folgt, andeuten, man solle die angefangene Reihe nach dem in den ersten Gliedern ausgesprochenen Bildungsgesetze unbegränzt fortführen.

Da wir (7) als bestehend ansehen, so wird man, wenn man immer mehr und mehr Glieder von (8) zusammen nimmt, der Grösse $f(a+h)$ immer näher kommen. Desshalb nennt man $f(a+h)$ die Summe der unendlichen Reihe in (8). (Vergl. §. 6, II und §. 60).

Digitized by Google

Man kann diess in schärferer Form auch schreiben:

$$Gr\left[f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\ldots\ldots+\frac{h^n}{1.2..n}f^n(a)\right]=f(a+h), \qquad (9)$$

wo *Gr* sich auf unendlich wachsende n bezieht, und wobei natürlich (7) als richtig vorausgesetzt ist. Benützt man die in §. 52, II gegebenen Formen des Restglieds, so hat man also:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f^3(x)+\ldots\ldots\ \ldots, \qquad (10)$$

wenn

$$Gr\frac{(1-\Theta)^n h^{n+1}}{1.2\ldots n}f^{n+1}(x+\Theta h)=0, \text{ oder } Gr\frac{h^{n+1}}{1.2..n+1}f^{n+1}(x+\Theta h)=0. \qquad (10')$$

Eben so aus (6):

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f^2(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f^3(0)+\ldots\ldots\ldots, \qquad (11)$$

wenn

$$Gr\frac{(1-\Theta)^n x^{n+1}}{1.2\ldots n}f^{n+1}(\Theta x)=0, \text{ oder } Gr\frac{h^{n+1}}{1.2..n+1}f^{n+1}(\Theta x)=0. \qquad (11')$$

Hilfsmittel, um die Richtigkeit von (10') oder (11') zu prüfen.

IV. Sollen die Sätze (10) und (11) angewendet werden, so hat man vor Allem zu prüfen, ob die Gleichungen (10') oder (11') erfüllt sind [oder auch (7)]. Diess geschieht entweder ganz unmittelbar, oder mittelst des folgenden Satzes.

Seyen $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ eine Reihe endlicher Grössen so beschaffen, dass für sehr grosse n immer

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<1, \text{ so ist } Gr\,u_n=0, \qquad (12)$$

wobei das Gränzzeichen, wie in III, sich auf unendlich wachsende n bezieht. Dabei beachten wir die Vorzeichen der Glieder obiger Reihe nicht, nehmen also alle kurzweg positiv.

Ist α eine Zahl kleiner als 1 (die nöthigen Falls beliebig nahe an 1 liegen kann), so wird man hiernach für ein sehr grosses (ganzes, positives) m setzen können:

$$\frac{u_{m+1}}{u_m}<\alpha,\ \frac{u_{m+2}}{u_{m+1}}<\alpha,\ \frac{u_{m+3}}{u_{m+2}}<\alpha,\ \ldots\ldots,\ \frac{u_{m+r}}{u_{m+r-1}}<\alpha.$$

Durch Multiplikation:

$$\frac{u_{m+1}}{u_m}\,\frac{u_{m+2}}{u_{m+1}}\,\frac{u_{m+3}}{u_{m+2}}\ldots\frac{u_{m+r}}{u_{m+r-1}}<\alpha^r, \text{ d. h. } \frac{u_{m+r}}{u_m}<\alpha^r,$$

oder

$$u_{m+r}<u_m\alpha^r.$$

Da nun u_m, wie alle Glieder, endlich ist, so ist $u_m\,\alpha^r$ endlich und klein, da die Potenz α^r in dieser Lage ist; u_{m+r} bedeutet das $m+r^{te}$

Digitized by Google

Glied der Reihe; ist also r sehr gross, so ist u_{m+r} ein weit vom Anfang abstehendes. Da dasselbe als positiv angesehen wird, so hat man also

$$0 < u_{m+r} < \alpha^r u_m.$$

Nun nähert sich α^r mit wachsendem r beliebig der Null, * also (§. 7, I) nähert sich u_{m+r} mit wachsendem r ebenfalls der Null. Diess ist in (12) ausgesprochen.

Die Anwendung dieses Satzes für unsern Fall ist leicht. Soll man etwa untersuchen, ob die zweite Gleichung (10′) richtig ist, so ist jetzt

$$u_n = \frac{h^{n+1}}{1.2..n+1} f^{n+1}(x + \Theta h);$$

man hat also zu sehen ob die Grösse

$$\frac{\frac{h^{n+2}}{1.2..n+2} f^{n+2}(x + \Theta h)}{\frac{h^{n+1}}{1.2..n+1} f^{n+1}(x + \Theta h)}$$

für grosse n immer kleiner als 1 ist, und weiss dann, dass wenn diess der Fall ist, auch die fragliche Gleichung (10′) stattfindet.

Wäre der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, so würden die Glieder der Reihe $u_1, u_2, \ldots$ schliesslich wachsen, und die Gleichung $Gr\, u_n = 0$ könnte nicht bestehen.

§. 54.

Bildung unendlicher Reihen mittelst obiger Sätze.

Wir wollen von den Sätzen in §. 53, III und IV zunächst einige Anwendungen auf die Bildung unendlicher Reihen machen, werden jedoch die Beispiele nicht sehr zahlreich aufführen, da dieser Gegenstand von minderer Wichtigkeit ist. (Vergl. auch „Anhang“ unter 𝔄).

Die Binomialreihe.

I. Setzt man in der Formel (10) des §. 53 $f(x) = x^m$, so erhält man (§. 18, II):

$$(x+h)^m = x^m + \frac{h}{1} m x^{m-1} + \frac{h^2}{1.2} m(m-1) x^{m-2} + \frac{h^3}{1.2.3} m(m-1)(m-2) x^{m-3} + \ldots,$$

d. h

$$(x+h)^m = x^m + \frac{m}{1} x^{m-1} h + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} h^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^{m-3} h^3 + \ldots, \quad (13)$$

welche Formel den **allgemeinen binomischen Satz** ausdrückt (§. 5 und §. 18′). Darin ist m eine beliebige konstante Zahl. — Die Reihe (13) ist endlich, wenn m eine positive ganze Zahl; in allen andern Fällen ist sie unendlich.

---

* Man kann r immer gross genug nehmen, damit $\alpha^r < \beta$, wo β beliebig klein. Es genügt dazu dass $r > \frac{\log \beta}{\log \alpha}$.

Digitized by Google

Da jetzt $f^n(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$, $f^{n+1}(x) = m(m-1)\ldots\ldots(m-n)x^{m-n-1}$, so ist das Ergänzungsglied, das in der ersten Gleichung (10′) vorkommt:

$$\frac{m(m-1)\ldots.(m-n)}{1.2\ldots,n}(1-\Theta)^n h^{n+1}(x+\Theta h)^{m-n-1}.$$

Um nun zu sehen, ob dasselbe mit unendlichem n verschwindet, hat man nach §. 53, IV den Quotienten:

$$\frac{\frac{m(m-1)\ldots.(m-n-1)}{1.2\ldots..(n+1)}(1-\Theta)^{n+1}h^{n+2}(x+\Theta h)^{m-n-2}}{\frac{m(m-1)\ldots\ldots.(m-n)}{1.2\ldots n}(1-\Theta)^n \quad h^{n+1}(x+\Theta h)^{m-n-1}} = \frac{m-n-1}{n+1}\,\frac{(1-\Theta)h}{x+\Theta h}$$

zu untersuchen. Derselbe ist auch

$$\left(\frac{m}{n+1}-1\right)\frac{1-\Theta}{1+\Theta\frac{h}{x}}\,\frac{h}{x}$$

und wird für wachsende n gegen

$$\frac{1-\Theta}{1+\Theta\frac{h}{x}}\,\frac{h}{x} \tag{a}$$

gehen (ohne Rücksicht auf das Vorzeichen). Diese Grösse ist nun < 1, wenn $\frac{h}{x}$ zwischen -1 und $+1$ liegt. Denn ist

1) $\frac{h}{x} > 0$ und < 1, so ist $1+\Theta\frac{h}{x} > 1$, $1-\Theta < 1$, also $\frac{1-\Theta}{1+\Theta\frac{h}{x}} < 1$ und folglich, da $\frac{h}{x}$ auch < 1, die Grösse (a) jedenfalls < 1. Diess ist selbst für $\Theta = 0$ der Fall, da dieselbe dann einfach $\frac{h}{x}$ ist.

2) $\frac{h}{x} < 0$ aber > -1. Alsdann ist $1+\Theta\frac{h}{x} < 1$ und wenn wir $\frac{h}{x} = -\alpha$ setzen, wo $\alpha < 1$, so ist $1+\Theta\frac{h}{x} = 1-\Theta\alpha$; aber $\Theta\alpha < \Theta$, also $1-\Theta\alpha > 1-\Theta$, und mithin $\frac{1-\Theta}{1-\Theta\alpha} < 1$, so dass wieder die (a) kleiner als 1 ist.

Wäre $\frac{h}{x} > 1$, so kann man dasselbe nicht mehr erweisen.

Demnach gilt die Formel (13), ausser bei positivem ganzem m, wenn $\frac{h}{x}$ zwischen -1 und $+1$ liegt, d. h. wenn $\frac{h^2}{x^2} < 1$.

So für $x = 1$, $h = a$:

$$(1+a)^m = 1 + \frac{m}{1}a + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3 + \ldots\ldots,\quad a^2 < 1.$$

Die Reihe für den natürlichen Logarithmus.

II. Ist in derselben Gleichung (10) $f(x) = l(x)$, so erhält man (§. 18, II):

$$l(x+h) = l(x) + \frac{h}{x} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3} - \frac{1}{4}\frac{h^4}{x^4} + \ldots\ldots\ldots \tag{14}$$

Digitized by Google

Jetzt ist $f^n(x) = \pm \frac{1.2\ldots(n-1)}{x^n}$, $f^{n+1}(x) = \mp \frac{1.2\ldots n}{x^{n+1}}$; also in (10'):

$$\mp \frac{1.2\ldots.n}{(x+\Theta h)^{n+1}} \cdot \frac{(1-\Theta)^n}{1.2\ldots n} h^{n+1} = \mp \frac{(1-\Theta)^n h^{n+1}}{(x+\Theta h)^{n+1}}.$$

Der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ in §. 53, IV ist

$$\frac{\frac{(1-\Theta)^{n+1} h^{n+2}}{(x+\Theta h)^{n+2}}}{\frac{(1-\Theta)^n h^{n+1}}{(x+\Theta h)^{n+1}}} = \frac{(1-\Theta) h}{x+\Theta h} = \frac{1-\Theta}{1+\Theta\frac{h}{x}} \frac{h}{x},$$

genau die Grösse (a) in I. Demnach gilt (14) für $\frac{h^2}{x^2} < 1$.

Die Reihe für e^x.

III. Setzt man in (11) $f(x) = e^x$, also $f^n(x) = e^x$, $f^n(0) = 1$, so ist

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots.. \qquad (15)$$

$$f^{n+1}(x) = e^x;\ \frac{x^{n+1}}{1.2..n+1} f^{n+1}(\Theta x) = \frac{x^{n+1} e^{\Theta x}}{1.2..n+1};$$

damit diese Grösse mit unendlichem n verschwinde, muss nach §. 53, IV der Quotient

$$\frac{\frac{x^{n+2}}{1.2..n+2} e^{\Theta x}}{\frac{x^{n+1}}{1.2..n+1} e^{\Theta x}} = \frac{x}{n+2}$$

für sehr grosse n kleiner als 1 ist. Was auch x seyn mag, ist diess der Fall, so dass wegen der zweiten Gleichung (11') die (15) für alle x gilt.

Die Reihen für Sinus und Cosinus.

IV. Setzt man in (11) $f(x) = \sin x$, so ergibt sich:

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2..7} + \ldots\ldots.. \qquad (16)$$

Jetzt ist

$$\frac{x^{n+1}}{1.2..n+1} f^{n+1}(\Theta x) = \frac{x^{n+1}}{1.2..n+1} \sin\left(\Theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right). \quad \text{(Vergl. §. 18, II.)}$$

Da nun immer $\sin\left(\Theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right)$ zwischen -1 und $+1$, so verschwindet diese Grösse, wenn $\frac{x^{n+1}}{1.2..n+1}$ mit unendlichem n verschwindet. Für diese letztere ist (§. 53, IV):

$$\frac{\frac{x^{n+2}}{1.2..n+2}}{\frac{x^{n+1}}{1.2..n+1}} = \frac{x}{n+2},$$

wie in III. Demnach gilt (16) für alle x.

Digitized by Google

Dasselbe erhält man, wenn man, indem in (11) $f(x) = \cos x$ gesetzt wird, die Reihe

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2..6} + \ldots\ldots \quad (17)$$

untersucht.

V. Aus III. folgt leicht, dass

$$e^{ax} = 1 + \frac{ax}{1} + \frac{a^2x^2}{1.2} + \frac{a^3x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

und wenn man hier $a = i = \sqrt{-1}$ setzt und beachtet, dass $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1, \ldots\ldots$:

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - \ldots + i\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1...5} - \ldots\right) = \cos x + i \sin x,$$

woraus

$(\cos x + i \sin x)^n = (e^{ix})^n = e^{nix} = \cos(nx) + i \sin(nx)$; $(\cos x - i \sin x)^n = \cos(nx) - i \sin(nx)$.

Diese Resultate haben wir in §. 4, so wie in §. 9 schon näher betrachtet.

§. 55.

Ermittelung einer Fehlergränze.

Die Formeln des §. 53 dienen nun noch zu einem andern wichtigen Zwecke. Man ist nämlich mittelst derselben im Stande, die Fehlergränze zu bestimmen, wenn man die dortigen Reihen bei einem bestimmten Gliede abbricht. Setzt man nämlich

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2..n} f^n(x), \quad (a)$$

so ist der begangene Fehler $= \frac{h^{n+1}}{1.2..n+1} f^{n+1}(x + \Theta h)$,* und wenn man den grösstmöglichen Werth dieser letzteren Grösse ermittelt, oder überhaupt einen Werth, der grösser ist als dieselbe, so ist der begangene Fehler sicherlich kleiner als diese so erhaltene Grösse. Aehnlich verhält es sich mit $\frac{x^{n+1}}{1.2..n+1} f^{n+1}(\Theta x)$, wenn man

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{1.2..n} f^n(0) \quad (b)$$

setzt. Wir wollen diess an einigen Beispielen erläutern.

Fehlergränze beim Binom.

I. Sey in der Formel (a) $f(x) = x^m$, also $f^n(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$, $f^{n+1}(x+\Theta h) = m(m-1)\ldots(m-n)(x+\Theta h)^{m-n-1}$, so ist wenn man

* Bei $n = o$, d. h. wenn man $f(x+h) = f(x)$ setzt, ist der Fehler $h f'(x + \Theta h)$; für $n = 1$, d. h. wenn $f(x+h) = f(x) + h f'(x)$, ist dieser Fehler $= \frac{h^2}{2} f''(x + \Theta h)$, wie diess aus §. 53, I sofort hervorgeht.

Digitized by Google

$$(x+h)^m = x^m + \frac{m}{1} x^{m-1} h + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} h^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots.n} x^{m-n} h^n \quad (c)$$

setzt, der begangene Fehler gleich

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2\ldots n+1} h^{n+1} (x+\Theta h)^{m-n-1} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2\ldots n+1} (x+\Theta h)^m \left(\frac{h}{x+\Theta h}\right)^{n+1}.$$

In jedem einzelnen Falle wird es leicht seyn, Gränzen für diese letztere Grösse anzugeben.

Sey z B. $m = -1$, $n = 1$, also

$$\frac{1}{x+h} = \frac{1}{x} - \frac{h}{x^2},$$

so ist der begangene Fehler $= \frac{1}{x+\Theta h}\left(\frac{h}{x+\Theta h}\right)^2 = \frac{h^2}{(x+\Theta h)^3}$, so dass, wenn x und h positiv sind, derselbe sicherlich kleiner als $\frac{h^2}{x^3}$ ist. Sind dagegen x und h von verschiedenen Zeichen, aber der Werth von h geringer als der von x, so ist der begangene Fehler kleiner als $\frac{h^2}{(x+h)^3}$. Für $x = 1$ und $h > 0$ ist der begangene Fehler also kleiner als h^2, d. h. wenn man

$$\frac{1}{1+h} = 1 - h$$

setzt, so fehlt man nicht um h^2. (Es wird von diesem Satze namentlich vielfache Anwendung gemacht.)

II. Sey $m = \frac{1}{r}$, $n = 1$, so ist wenn man setzt

$$\sqrt[r]{x+h} = \sqrt[r]{x} + \frac{h}{r\sqrt[r]{x^{r-1}}},$$

der begangene Fehler gleich

$$\frac{1}{1.2}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}-1\right)(x+\Theta h)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{h}{x+\Theta h}\right)^2 = -\frac{r-1}{2r^2}\,\frac{h^2}{\sqrt[r]{(x+\Theta h)^{2r-1}}}.$$

Ist nun x sowohl als h positiv, so ist diese Grösse (ihrem absoluten Werthe nach) geringer als $\frac{r-1}{2r^2}\,\frac{h^2}{\sqrt[r]{x^{2r-1}}}$, so dass man also nicht um diesen Werth fehlt; ist aber $\frac{h}{x} < 0$, jedoch seinem Werthe nach unter 1, so ist der Fehler geringer als $\frac{r-1}{2r^2}\,\frac{h^2}{\sqrt[r]{(x+h)^{2r-1}}}$.

Für $x = 1$, $h > 0$ ist also

$$\sqrt[r]{(1+h)} = 1 + \frac{h}{r}$$

und der dabei begangene Fehler ist kleiner als $\frac{r-1}{2r^2} h^2$ (wo übrigens $1 + \frac{h}{r}$ zu gross ist). Für $r = 2$ ist $\sqrt{(1+h)} = 1 + \frac{1}{2} h$ und der Fehler kleiner als $\frac{h^2}{8}$. Daraus folgt bekanntlich die Regel, dass wenn man aus einer Zahl, die mit 1 als Ganze

Digitized by Google

anfängt und dann halb so viele Nullen enthält, als man Dezimalstellen in der Wurzel haben will, die Quadratwurzel auszuziehen hat, man sie nach der obigen Regel finden kann. So ist z. B. auf 8 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt{1{\cdot}00007346} = 1 + \tfrac{1}{2} 0{\cdot}00007346 = 1{\cdot}00003673.$$

Denn der hiebei begangene Fehler ist kleiner als

$$\frac{0{\cdot}00007346^2}{8} \text{ d. h. } < \frac{0{\cdot}0001^2}{8} < \frac{1}{8.\,10^8},$$

und da diess kleiner als $\frac{1}{10^8}$, so ist also der Fehler kleiner als eine Einheit der achten Dezimale (in unserem Falle kleiner als eine Einheit der neunten Dezimale).

Für $r = 3$ ist $\sqrt[3]{1+h} = 1 + \frac{1}{3} h$ und der begangene Fehler kleiner als $\frac{1}{9} h^2$. Daraus folgt dieselbe Regel, wie so eben. So ist auf 6 Dezimalen genau

$$\sqrt[3]{1{\cdot}000627} = 1 + \frac{1}{3} 0{\cdot}000627 = 1{\cdot}000209,$$

denn der begangene Fehler ist kleiner als $\frac{1}{9} 0{\cdot}000627^2$ d. h. $< \frac{1}{9} \left(\frac{1}{10^3}\right)^2 < \frac{1}{9} \frac{1}{10^6} < \frac{1}{10^6}$. Eben so lassen sich sehr leicht die folgenden nützlichen Regeln beweisen:

Genäherte Wurzelausziehung.

III. Behält man von einer ganzen Zahl mehr als die Hälfte der ersten Ziffern und ersetzt die übrigen durch Nullen, so wird die Quadratwurzel aus letzterer Zahl nicht um 1 verschieden seyn von der Quadratwurzel der erstern.

Ganz dieselbe Regel gilt, wenn man „Hälfte“ und „Quadratwurzel“ durch „Drittel“ und „Kubikwurzel“ ersetzt.

Ist a die erste Zahl, α die zweite, so ist $a = \alpha + (a - \alpha)$ und wenn man in (c) $x = \alpha$, $h = a - \alpha$ setzt, ferner $m = \frac{1}{2}$, $n = 0$, so ist für $\sqrt{a} = \sqrt{\alpha}$ der begangene Fehler gleich $\frac{1}{2} [\alpha + \Theta (a - \alpha)]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{a - \alpha}{\alpha + \Theta (a - \alpha)}\right]^1 = \frac{1}{2} \frac{a - \alpha}{\sqrt{[\alpha + \Theta (a - \alpha)]}}$, d. h. da $a - \alpha > 0$, dieser Fehler ist kleiner als $\frac{1}{2} \frac{a - \alpha}{\sqrt{\alpha}}$. Da nun $a - \alpha$ nicht die Hälfte der Ziffern von a, d. h. auch von α enthält, so ist immer $\frac{a - \alpha}{2\sqrt{\alpha}}$ unter 1, was unsere Behauptung rechtfertigt (da z. B. $\frac{9999}{2\sqrt{100000000}} < 1$).

Für den Fall der Kubikwurzel ist bei $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{\alpha}$ der Fehler gleich $\frac{1}{3} [\alpha + \Theta (a - \alpha)]^{\frac{1}{3}}$ $\frac{a - \alpha}{a + \Theta (a - \alpha)} = \frac{1}{3} \frac{a - \alpha}{\sqrt[3]{[\alpha + \Theta (a - \alpha)]^2}}$, also kleiner als $\frac{1}{3} \frac{a - \alpha}{\sqrt[3]{\alpha^2}}$ und da $a - \alpha$ nicht 2 Drittel der Ziffern von a oder α enthält, so ist diese Grösse unter 1 (zum Beispiel $\frac{99999}{3\sqrt[3]{10000000^2}} < 1$).

So werden $\sqrt{835472532}$ und $\sqrt{835470000}$ nicht um 1; $\sqrt{325{\cdot}734825}$ und $\sqrt{325{\cdot}730000}$ nicht um $0{\cdot}001$ verschieden seyn u. s. w. *

---

* Daraus folgt, dass wenn man $\sqrt{\frac{13}{7}}$ auf 5 Dezimalen genau haben will, man $\frac{13}{7}$ blos

Digitized by Google

IV. Gesetzt man solle $\sqrt[n]{a}$ mit m Ziffern genau ausziehen und wähle $a-\alpha$ für a, so müssen also $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[n]{a-\alpha}$ in den m ersten Ziffern übereinstimmen; dazu genügt es, dass $\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{(a-\alpha)}}{\sqrt[n]{a}} < \frac{1}{10^m}$ sey. Nun ist $\sqrt[n]{a-\alpha} = \sqrt[n]{a} - \frac{1}{n}\frac{\alpha}{\sqrt[n]{(a-\Theta\alpha)^{n-1}}}$, so dass also

$$\frac{\alpha}{n\sqrt[n]{(a-\Theta\alpha)^{n-1}}\sqrt[n]{a}} < \frac{1}{10^m}, \quad \frac{\alpha}{\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{(a-\Theta\alpha)^{n-1}}} < \frac{n}{10^m}$$

seyn muss. Macht man $\frac{\alpha}{\sqrt[n]{(a-\alpha)}\sqrt[n]{(a-\alpha)^{n-1}}} < \frac{n}{10^m}$, so ist dieser Bedingung genügt, so dass also $\frac{\alpha}{a-\alpha} < \frac{n}{10^m}$, $\frac{\alpha}{a} < \frac{n}{10^m+n}$. Nun ist $n \overline{>} 2$, $n < 10^m$, also $\frac{n}{10^m+n} > \frac{2}{10^m+10^m}$, d. h. $> \frac{1}{10^m}$, und also braucht bloss $\frac{\alpha}{a} < \frac{1}{10^m}$ zu seyn, woraus dann folgt $\frac{a-(a-\alpha)}{a} < \frac{1}{10^m}$, so dass a und $a-\alpha$ in den $m+1$ ersten Ziffern zusammenstimmen müssen.* Soll z. B. $\sqrt[3]{\frac{375300}{\pi}}$ auf 2 Dezimalstellen entwickelt werden, so müssen also, da $\sqrt[3]{\frac{375300}{\pi}}$ jedenfalls zwei Ziffern vor dem Einheitspunkt hat, 4 Ziffern dieser Zahl genau werden, so dass $\frac{375300}{\pi}$ auf 5 Ziffern genau seyn muss. Nimmt man nun $\pi+\alpha$ für π, so hat man $\frac{375300}{\pi+\alpha} = \frac{375300}{\pi} - \frac{375300\,\alpha}{(\pi+\Theta\alpha)^2}$,

auf 5 Dezimalen zu entwickeln brauche, und die übrigen durch Nullen ersetzen könne; dass um $\sqrt[3]{\frac{253}{6}}$ auf 5 Dezimalen zu erhalten, man $\frac{253}{6}$ bloss bis auf 4 Dezimalen zu entwickeln brauche u. s. w.

* Sind zwei ganze Zahlen A und B ($A > B$) so beschaffen, dass $\frac{A-B}{A} < \frac{1}{10^m}$, so müssen die m ersten Ziffern zusammenstimmen. Denn stimmen nur die $m-1$ ersten zusammen, so wird $A-B$ nur $m-1$ Ziffern weniger haben als A; die Division von $A-B$ durch A gibt also nach dem Einheitspunkt noch $m-2$ Nullen, die $m-1^{te}$ Stelle kann Null seyn, muss aber nicht, die m^{te} Stelle ist jedenfalls nicht Null. Demnach wäre ganz bestimmt $\frac{A-B}{A} > \frac{1}{10^m}$, wenn nur die $m-1$ ersten Ziffern zusammenstimmen (d. h. dieselben sind). — Man wird sich von der Richtigkeit dieser Behauptung am besten durch Zahlenbeispiele überzeugen.

Soll also $\frac{A-B}{A}$ jedenfalls $< \frac{1}{10^m}$, so genügt es nicht, die m ersten Ziffern in A und B bloss gleich anzunehmen (sie müssen es jedenfalls sein); denn wenn blòss die m ersten Ziffern gleich sind, so kann, wie wir eben gesehen (wenn man nur m statt $m-1$ spricht), möglicher Weise bei der Division von $A-B$ durch A die m^{te} Stelle nicht Null seyn, wo dann also $\frac{A-B}{A} > \frac{1}{10^m}$ wäre. Sind aber die $m+1$ ersten Ziffern in A und B dieselben, so ist jedenfalls die m^{te} Stelle nach dem Einheitspunkt Null, und unsere Bedingung also sicher erfüllt.

Digitized by Google

so dass der Fehler $< \frac{375300\alpha}{\pi^2}$ ist; da nun 5 Stellen richtig seyn sollen, so muss also der Fehler < 1 seyn (da $\frac{375300}{\pi}$ sechs Stellen vor dem Einheitspunkt hat); dazu genügt $\alpha < \frac{\pi^2}{375300}$, d. h. $< \frac{1}{100000}$, so dass also, wenn man $\pi = 3\,14160$ setzt, die Zahl $\frac{375300}{3 \cdot 14160}$ in ihren 5 ersten Ziffern die verlangten gibt.

V. Will man nach diesen Formeln genäherte Werthe berechnen, so ist diess sehr leicht. Soll z. B. $\sqrt[3]{25}$ berechnet werden, so setze man in (c) $x = 27$, $h = -2$, $m = \frac{1}{3}$, und hat

$$\sqrt[3]{25} = (27-2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt[3]{27^2}} - \frac{1.2}{3.6} \cdot \frac{4}{\sqrt[3]{27^5}} - \frac{1.2.5}{3.6.9} \cdot \frac{8}{\sqrt[3]{27^8}}$$

$$= 3 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{243} - \frac{5}{81} \cdot \frac{8}{6561},$$

während der begangene Fehler ($m = \frac{1}{3}$, $n=3$, $x=27$, $h = -2$) gleich $-\frac{1.2.5.8}{3.6.9.12} \sqrt[3]{27-2\Theta}\left(\frac{-2}{27-2\Theta}\right)^4$, also negativ ist; derselbe ist sicher kleiner als $\frac{1.2.5.8}{3.6.9.12} \sqrt[3]{27} \cdot \left(\frac{2}{25}\right)^4 = 0{\cdot}000006$. Nun ist

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = 0{\cdot}07407407$$

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{4}{243} = 0{\cdot}00182898 \qquad 3 - 0{\cdot}07597831 = 2{\cdot}9240217, \text{ während}$$

$$\frac{5}{81} \cdot \frac{8}{6561} = 0{\cdot}00007526 \qquad \sqrt[3]{25} = 2{\cdot}9240177, \text{ Differenz} = 0{\cdot}000004 < 0{\cdot}000006.$$

$$\overline{0{\cdot}07597831}$$

Logarithmen.

VI. Sey in der Formel (a) $f(x) = \log x$, wo wir unter dem Zeichen *log* die Logarithmen für die Grundzahl 10 verstehen wollen. Alsdann ist (§. 12, III) $f'(x) = \log e \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\log e \frac{1}{x^2}$, ... $f^n(x) = \pm \frac{1.2\ldots(n-1)}{x^n} \log e$, so dass also, wenn

$$\log(x+h) = \log x + \log e \left[\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \ldots\ldots \pm \frac{h^n}{nx^n}\right] \qquad (d)$$

gesetzt wird, der begangene Fehler $= \mp \log e \frac{h^{n+1}}{(n+1)(x+\Theta h)^{n+1}}$ seyn wird. Für den Fall natürlicher Logarithmen ist

$$l(x+h) = l(x) + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \ldots \pm \frac{h^n}{nx^n} \qquad (d')$$

mit dem Fehler $\mp \frac{h^{n+1}}{(n+1)(x+\Theta h)^{n+1}}$. Wir wollen zunächst darthun, in welcher Weise mittelst dieser Formeln die Genauigkeit der gewöhnlichen Interpolation

Digitized by Google

bewiesen werden kann. Setzt man $x = a$ und nimmt $h < 1$, so folgt aus (d) für $n = 1$:

$$log\,(a+h) - log\,a = log\,e\,\frac{h}{a} - \frac{log\,e}{2}\,\frac{h^2}{(a+\Theta h)^2},$$

$$log\,(a+1) - log\,a = log\,e\,\frac{1}{a} - \frac{log\,e}{2}\,\frac{1}{(a+\Theta_1)^2},$$

wo Θ und Θ_1 zwischen 0 und 1 sind. Ist nun a eine ganze Zahl, so geben die Tafeln sowohl $log\,a$ als $log\,(a+1)$, also auch deren Differenz $= \Delta$; die Differenz $log\,(a+h) - log\,a = \delta$ findet sich sodann, wenn man $\delta = h\Delta$ setzt, vorausgesetzt, dass man das gewöhnliche Verfahren anwendet. Nun ist aber

$$\delta = log\,e\,\frac{h}{a} - \frac{log\,e}{2}\,\frac{h^2}{(a+\Theta h)^2},\quad h\Delta = log\,e\,\frac{h}{a} - \frac{log\,e}{2}\,\frac{h}{(a+\Theta_1)^2},$$

also

$$\delta - h\Delta = \frac{log\,e}{2}\left[\frac{h}{(a+\Theta_1)^2} - \frac{h^2}{(a+\Theta h)^2}\right].$$

Die eingeklammerte Grösse, da $h < 1$ und > 0, ist sicher kleiner als $\frac{1}{a^2}$, und und da $log\,e < \frac{1}{2}$, so ist also $\delta - h\Delta < \frac{1}{4a^2}$; ist mithin $a > 10,000$, so ist $\delta - h\Delta < \frac{1}{400,000,000}$, so dass, wenn man $\delta = h\Delta$ setzt, man nicht um $\frac{1}{400,000,000}$ fehlt, was bei 7stelligen Tafeln vollkommen scharf genug ist.

VII. Sey in (d'), $h = 1$, $x = 2z + 1$, wo $z > 0$, und für n gesetzt 2 n:

$$l\,(2z+2) = l\,(2z+1) + \frac{1}{2z+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2z+1)^2} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2n-1}\,\frac{1}{(2z+1)^{2n-1}} - \frac{1}{2n}\,\frac{1}{(2z+1)^{2n}},$$

mit dem Fehler $= + \frac{1}{(2n+1)\,(2z+1+\Theta)^{2n+1}}$.

Eben so für $x = 2z + 1$, $h = -1$:

$$l\,(2z) = l\,(2z+1) - \frac{1}{2z+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2z+1)^2} - \ldots$$
$$- \frac{1}{2n-1}\,\frac{1}{(2z+1)^{2n-1}} - \frac{1}{2n}\,\frac{1}{(2z+1)^{2n}},$$

mit dem Fehler $= \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)\,(2z+1-\Theta_1)^{2n+1}} = \frac{-1}{(2n+1)\,(2z+1-\Theta_1)^{2n+1}}$.

Subtrahirt man beide Resultate, so ist:

$$l\left(\frac{2z+2}{2z}\right) = 2\left[\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{(2z+1)^3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\,\frac{1}{(2z+1)^{2n-1}}\right],$$

mit dem Fehler $\frac{1}{(2n+1)\,(2z+1+\Theta)^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+1)\,(2z+1-\Theta_1)^{2n+1}}$. Dieser Fehler ist jedenfalls kleiner als

$$\frac{1}{(2n+1)\,(2z+1)^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+1)\,(2z)^{2n+1}} = \frac{1}{2n+1}\left[\frac{1}{(2z+1)^{2n+1}} + \frac{1}{(2z)^{2n+1}}\right].$$

Digitized by Google

Aber $\frac{2z+2}{2z} = \frac{z+1}{z}$, so dass also auch

$$l(z+1) = l(z) + 2\left[\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(2z+1)^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2z+1)^5} + \dots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2n-1}\frac{1}{(2z+1)^{2n-1}}\right],$$

wobei der Fehler kleiner als

$$\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{(2z+1)^{2n+1}} + \frac{1}{(2z)^{2n+1}}\right),$$

oder noch kleiner als

$$\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{(2z)^{2n+1}} + \frac{1}{(2z)^{2n+1}}\right),$$

d. h. als $\frac{2}{2n+1}\frac{1}{(2z)^{2n+1}}$ ist.

Setzt man nun hier $z = 1$, so ist

$$l(2) = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{2n-1}\frac{1}{3^{2n-1}}\right), \text{ Fehler} < \frac{2}{2n+1}\frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Soll der Fehler etwa $< \frac{1}{10^7}$ seyn, so muss $\frac{2}{2n+1}\frac{1}{2^{2n+1}}$ höchstens $= \frac{1}{10^7}$, d. h. es muss $(2n+1)2^{2n}$ mindestens $= 10^7$ seyn.

Dann für $z = 2$:

$$l(3) = l(2) + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{2n-1}\frac{1}{5^{2n-1}}\right), \text{ Fehler} < \frac{2}{2n+1}\frac{1}{4^{2n+1}}$$

u. s. w.

Die Exponentialfunktion. Trigonometrische Funktionen.

VIII. Sey in (b) $f(x) = e^x$, so wird also wenn

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \dots + \frac{x^n}{1.2..n}, \qquad (e)$$

der begangene Fehler $= \frac{x^{n+1}}{1.2..n+1} e^{\Theta x}$ seyn. Diese Grösse ist bei positivem x kleiner als $\frac{x^{n+1}e^x}{1.2..n+1}$, bei negativem x dagegen kleiner als $\frac{x^{n+1}}{1.2..n+1}$. So ist für $x = 1$:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \dots + \frac{1}{1.2..n}, \qquad (e')$$

und der begangene Fehler kleiner als $\frac{e}{1.2\ .n+1}$.

Da wir e jedoch in §. 8 bereits berechnet, so wollen wir darauf nicht wieder zurückkommen.

IX. Sey $f(x) = \sin x$, so ist aus (b), wenn man 2n für n setzt:

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \dots \pm \frac{x^{2n-1}}{1.2\dots 2n-1}$$

Digitized by Google

mit dem Fehler $\frac{x^{2n+1} \sin\left(\Theta x + \frac{2n+1}{2}\pi\right)}{1.2....2n+1}$ (§. 54, IV), welche Grösse immer kleiner als $\frac{x^{2n+1}}{1......2n+1}$ ist. Eben so ist, wenn

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - ..... \pm \frac{x^{2n}}{1,...2n}$$

gesetzt wird, der Fehler kleiner als $\frac{x^{2n+2}}{1...2n+2}$. (Man vergleiche mein Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, erste Abth. §. 16.)

§. 56.

Weitere Anwendungen des Taylor'schen Satzes.

I. Sey $f(x)$ eine Funktion von x, die für alle Werthe von x, die zwischen a und b liegen, endlich sey; eben so sollen deren Differentialquotienten in derselben Lage seyn. In so ferne nun nur Werthe von x betrachtet werden, welche diese Gränzen nicht überschreiten, hat man (§. 11):

$$Gr \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x). \quad \text{(a)}$$

Weiter ist (§. 53):

$$f(x+2\Delta x) = f(x) + \frac{2\Delta x}{1} f'(x) + \frac{4\Delta x^2}{1.2} f''(x) + \frac{8\Delta x^3}{1.2.3} P,$$

$$2f(x+\Delta x) = 2f(x) + 2\frac{\Delta x}{1} f'(x) + 2\frac{\Delta x^2}{1.2} f''(x) + \frac{2\Delta x^3}{1.2.3} P_1,$$

$$f(x) = f(x),$$

wo P und P_1 endliche Grössen sind. Daraus folgt:

$$f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x) = \Delta x^2 f''(x) + \Delta x^3 Q,$$

wo Q ebenfalls endlich. Aus dieser Gleichung ergibt sich sofort, dass

$$Gr \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x^2} = f''(x). \quad \text{(b)}$$

Eben so

$$f(x+3\Delta x) = f(x) + \frac{3\Delta x}{1} f'(x) + \frac{9\Delta x^2}{1.2} f''(x) + \frac{27\Delta x^3}{1.2.3} f^3(x) + \frac{81\Delta x^4}{1..4} P,$$

$$3f(x+2\Delta x) = 3f(x) + \frac{6\Delta x}{1} f'(x) + \frac{12\Delta x^2}{1.2} f''(x) + \frac{24\Delta x^3}{1.2.3} f^3(x) + \frac{48\Delta x^4}{1..4} P_1,$$

$$3f(x+\Delta x) = 3f(x) + \frac{3\Delta x}{1} f'(x) + \frac{3\Delta x^2}{1.2} f''(x) + \frac{3\Delta x^3}{1.2.3} f^3(x) + \frac{3\Delta x^4}{1..4} P_2,$$

$$f(x) = f(x),$$

woraus

$$f(x+3\Delta x) - 3f(x+2\Delta x) + 3f(x+\Delta x) - f(x) = f^3(x)\Delta x^3 + Q\Delta x^4,$$

mithin

$$Gr \frac{f(x+3\Delta x) - 3f(x+2\Delta x) + 3f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x^3} = f^3(x). \quad \text{(c)}$$

Digitized by Google

Allgemein erhält man so:

$$Gr\frac{f(x+n\Delta x)-\frac{n}{1}f(x+\overline{n-1}\,\Delta x)+\frac{n(n-1)}{1.2}f(x+\overline{n-2}\,\Delta x)-\ldots\ldots\pm f(x)}{\Delta x^n}=f^n(x). \quad (18)$$

Den Beweis dieses Satzes können wir durch den Schluss von n auf n + 1 (§. 18) in folgender Weise führen.

Gesetzt die (18) sey richtig, so war also

$$f(x+n\Delta x)-\frac{n}{1}f(x+\overline{n-1}\,\Delta x)+\ldots\ldots$$
$$\pm f(x)=f^n(x)\,\Delta x^n+a\,f^{n+1}(x)\,\Delta x^{n+1}+b\,f^{n+2}(x)\,\Delta x^{n+2}+\ldots;$$

wo a, b, ... bestimmte Zahlen sind, die immer dieselben sind, was auch f(x) sey. (Man findet diese Form, wenn man bei der Entwicklung den Taylor'schen Satz über das Glied mit Δx^n hinausführt.) Eben desshalb lassen sich a, b, ... im Allgemeinen bestimmen. Setzt man etwa $f(x)=e^x$ und dividirt beiderseitig durch e^x, so hat man

$$e^{n\Delta x}-\frac{n}{1}e^{(n-1)\Delta x}+\ldots\pm 1=\Delta x^n+a\,\Delta x^{n+1}+b\,\Delta x^{n+2}+\ldots,$$

d. h.

$$(e^{\Delta x}-1)^n=\Delta x^n+a\,\Delta x^{n+1}+b\,\Delta x^{n+2}+\ldots,$$

oder nach §. 54, III:

$$\left(\frac{\Delta x}{1}+\frac{\Delta x^2}{1.2}+\frac{\Delta x^3}{1.2.3}+\ldots\right)^n=\Delta x^n+a\,\Delta x^{n+1}+b\,\Delta x^{n+2}+\ldots.$$

Hiernach muss also die n^{te} Potenz von $\frac{\Delta x}{1}+\frac{\Delta x^2}{1.2}+\ldots\ldots\ldots$ identisch seyn mit $\Delta x^n+a\,\Delta x^{n+1}+\ldots.$

Da uns bloss der Werth von a interessirt, so suchen wir in dieser Potenz den Koeffizienten von Δx^{n+1}. Aber es ist

$$\frac{\Delta x}{1}+\frac{\Delta x^2}{1.2}+\frac{\Delta x^3}{1.2.3}+\ldots=\Delta x\left[1+\frac{\Delta x}{2}+\frac{\Delta x^2}{2.3}+\ldots\right],$$
$$\left(\frac{\Delta x}{1}+\frac{\Delta x^2}{1.2}+\ldots\ldots\ldots\right)^n=\Delta x^n\left[1+\frac{\Delta x}{2}+\frac{\Delta x^2}{2.3}+\ldots\right]^n,$$

so dass wir in $(1+\frac{\Delta x}{2}+\ldots)^n$ den Koeffizienten von Δx zu suchen haben. Nun hat man:

$$\left(1+\frac{\Delta x}{2}+\frac{\Delta x^2}{2.3}+..\right)^n=1+\frac{n}{1}\left(\frac{\Delta x}{2}+\frac{\Delta x^2}{2.3}+..\right)+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{\Delta x}{2}+..\right)^2+\ldots \quad (\text{§. }5),$$

so dass der Koeffizient von Δx ist $\frac{n}{2}$ und also allgemein:

$$f(x+n\Delta x)-\frac{n}{1}f(x+\overline{n-1}\,\Delta x)+\ldots$$
$$\pm f(x)=f^n(x)\,\Delta x^n+\frac{n}{2}f^{n+1}(x)\,\Delta x^{n+1}+b\,f^{n+2}(x)\,\Delta x^{n+2}+\ldots. \quad (d)$$

Setzt man hier $x+\Delta x$ statt x und beachtet, dass (§. 53):

$$f^r(x+\Delta x)=f^r(x)+\Delta x\,f^{r+1}(x)+\frac{\Delta x^2}{1.2}f^{r+2}(x)+\ldots\ldots$$

welche Reihe man immer mit einem beliebigen Gliede abbrechen kann, so erhält man:

Digitized by Google

$$f(x+\overline{n+1}\,\Delta x)-\frac{n}{1}f(x+n\,\Delta x)+\ldots\ldots$$
$$\pm f(x+\Delta x)=f^n(x)\,\Delta x^n+\frac{n}{2}f^{n+1}(x)\,\Delta x^{n+1}+b\,f^{n+2}(x)\,\Delta x^{n+2}+\ldots$$
$$+f^{n+1}(x)\,\Delta x^{n+1}+\frac{n}{2}f^{n+2}(x)\,\Delta x^{n+2}+\ldots$$
$$+\ldots\ldots\ldots,$$

wo die weggelassenen Glieder höhere Potenzen von Δx als die $n+1^{te}$ enthalten.

Daraus folgt:

$$f(x+\overline{n+1}\,\Delta x)-\frac{n}{1}f(x+n\,\Delta x)+\ldots$$
$$\pm f(x+\Delta x)=f^n(x)\,\Delta x^n+\frac{n+2}{2}f^{n+1}(x)\,\Delta x^{n+1}+K\,\Delta x^{n+2}+\ldots$$

Subtrahirt man hievon die (d), so ist

$$f(x+\overline{n+1}\,\Delta x)-\frac{n+1}{1}f(x+n\,\Delta x)+\frac{(n+1)n}{1.2}f(x+\overline{n-1}\,\Delta x)-\ldots\mp f(x)$$
$$=f^{n+1}(x)\,\Delta x^{n+1}+J\,\Delta x^{n+2}+\ldots,$$

wo K, J endliche Grössen sind. Daraus folgt sofort:

$$Gr\frac{f(x+\overline{n+1}\,\Delta x)-\frac{n+1}{1}f(x+n\,\Delta x)+\ldots\mp f(x)}{\Delta x^{n+1}}=f^{n+1}(x),$$

und da diese Gleichung aus (18) hervorgeht, wenn man $n+1$ statt n setzt, so ist (18) eben damit erwiesen. *

II. Man kann den Satz (18) auch in etwas anderer Form darstellen. Ist $f(x)=y$, und bezeichnet man $f(x+\Delta x)$, $f(x+2\Delta x),\ldots, f(x+n\Delta x)$ durch $y_1, y_2, \ldots, y_n$; bildet ferner die Differenzenreihen nach folgendem Schema:

---

* Man kann daraus, dass in $f(x+n\,\Delta x)-\frac{n}{1}f(x+\overline{n-1}\,\Delta x)+\ldots\pm f(x)$, wenn man die einzelnen Glieder nach dem Taylor'schen Satze entwickelt, alle Differentialquotienten von $f(x)$, bis zum n^{ten}, wegfallen, der Koeffizient des n^{ten} aber Δx^n ist, folgern, dass:

$$1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\ldots\pm 1=0,$$

$$n-\frac{n}{1}(n-1)+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)+\ldots\mp n.1=0,$$

$$n^2-\frac{n}{1}(n-1)^2+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^2+\ldots\mp\frac{n}{1}1^2=0,$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$n^r-\frac{n}{1}(n-1)^r+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^r-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^r+\ldots\mp n.1^r=0,\quad \text{wenn } r<n.$$

Dagegen

$$n^n-\frac{n}{1}(n-1)^n+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^n-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^n+\ldots\mp n.1^n=1.2\ldots n.$$

(In allgemeinerer Form finden sich diese Sätze in meinen „Grundzügen" S. 63).

Digitized by Google

	1te Differenz	2te Diff.	3te Diff.	4te Diff.	5te Diff.
y					
y_1	$\Delta y = y_1 - y$				
y_2	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y$			
y_3	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^3 y = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y$		
y_4	$\Delta y_3 = y_4 - y_3$	$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$	$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$	$\Delta^4 y = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y$	
y_5	$\Delta y_4 = y_5 - y_4$	$\Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3$	$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2$	$\Delta^4 y_1 = \Delta^3 y_2 - \Delta^3 y_1$	$\Delta^5 y = \Delta^4 y_1 - \Delta^4 y,$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

so findet man leicht:

$$\Delta y = y_1 - y, \quad \Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y = y_2 - y_1 - (y_1 - y) = y_2 - 2y_1 + y,$$
$$\Delta^3 y = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y = y_3 - 2y_2 + y_1 - (y_2 - 2y_1 + y) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y, \ldots$$

allgemein

$$\Delta^n y = y_n - \frac{n}{1} y_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} y_{n-2} - \ldots\ldots \pm y, \; *$$

wo die Reihe mit abwechselnden Zeichen fortschreitet. Da $y = f(x)$ u. s. w., so ist also auch

$$\Delta^n f(x) = f(x + n\Delta x) - \frac{n}{1} f(x + \overline{n-1}\,\Delta x) + \frac{n(n-1)}{1.2} f(x + \overline{n-2}\,\Delta x) - \ldots \pm f(x),$$

und der Satz (18) heisst auch:

$$Gr\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = \frac{\partial^n y}{\partial x^n}, \quad Gr\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} = f^n(x). \tag{19}$$

Aus (19) folgt allgemein, dass

$$\frac{\Delta^n y}{(\Delta x)^n} = \frac{\partial^n y}{\partial x^n} + \alpha \tag{20}$$

gesetzt werden könne, wo α mit unendlich abnehmendem Δx ebenfalls unendlich abnimmt, so dass also $Gr\,\alpha = 0$. Man kann diese Gleichung auch schreiben:

$$\Delta^n y = \frac{\partial^n y}{\partial x^n}(\Delta x)^n + \alpha(\Delta x)^n, \tag{20'}$$

wo wieder $Gr\,\alpha = 0$. So ist also

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x}\Delta x + \alpha_1 \Delta x, \quad \Delta^2 y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \alpha_2 (\Delta x)^2, \ldots\ldots,$$

wo $Gr\,\alpha_1 = 0$, $Gr\,\alpha_2 = 0, \ldots\ldots$ (§. 15, I).

Krümmungskreis.

III. Legt man durch drei Punkte einer Kurve einen Kreis und lässt dann diese drei Punkte immer näher rücken, so wird der Kreis seine Gestalt und Lage ändern, sich aber einem bestimmten Kreise mehr und mehr nähern.

---

* Dieser Satz lässt sich durch den Schluss von n auf n + 1 erweisen. Man vergleiche hiemit „Grundzüge" S. 81.

Digitized by Google

Dieser (letzte) Kreis, den man erhielte, wenn man die drei Punkte völlig an einander rücken würde, heisst der Krümmungskreis der Kurve in dem fraglichen Kurvenpunkt.

Sind x, y die Koordinaten des Kurvenpunktes, in dem man den Krümmungskreis bestimmen soll, so ist y eine Funktion von x, gegeben durch die Gleichung der Kurve. Seyen $x+\Delta x$, $x+2\Delta x$ die Abszissen zweier anderer Punkte der Kurve, so werden die Ordinaten y_1, y_2 derselben aus y erhalten, wenn man in dieser Funktion $x+\Delta x$ und $x+2\Delta x$ für x setzt. — Sind weiter α, β die Koordinaten des Kreises, der durch die drei Punkte geht, ϱ der Halbmesser, so muss:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\varrho^2,\ (x+\Delta x-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2=\varrho^2,$$
$$(x+2\Delta x-\alpha)^2+(y_2-\beta)^2=\varrho^2$$

seyn.

Aus diesen drei Gleichungen hat man α, β, ϱ zu bestimmen. Bezeichnet man ihre ersten Seiten mit X_1, X_2, X_3, so kann man aus denselben leicht die folgenden drei bilden:

$$X_1=\varrho^2,\ X_2-X_1=0,\ X_3-2X_2+X_1=0,$$

d. h.

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\varrho^2,\ 2\Delta x(x-\alpha)+y_1^2-y^2-2(y_1-y)\beta=0,$$
$$2\Delta x^2+y_2^2-2y_1^2+y^2-2(y_2-2y_1+y)\beta=0.$$

Daraus folgt

$$\beta=\frac{2\Delta x^2+y_2^2-2y_1^2+y^2}{2(y_2-2y_1+y)},\ x-\alpha=\frac{y_1-y}{\Delta x}\beta-\frac{y_1^2-y^2}{2\Delta x}.$$

Lässt man Δx abnehmen, so nähern sich die zwei andern Punkte dem ersten, der Kreis dem Krümmungskreis; geht man also hier zu den Gränzwerthen über, so stellen dann α, β die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes vor. Aber

$$\beta=\frac{2+\frac{y_2^2-2y_1^2+y^2}{\Delta x^2}}{2\frac{y_2-2y_1+y}{\Delta x^2}},\quad Gr\,\beta=Gr\,\frac{2+\frac{y_2^2-2y_1^2+y^2}{\Delta x^2}}{2\frac{y_2-2y_1+y}{\Delta x^2}}.$$

Da y und y^2 Funktionen von x sind, so ist nach (18):

$$Gr\,\frac{y_2^2-2y_1^2+y^2}{\Delta x^2}=\frac{\partial^2(y^2)}{\partial x^2},\quad Gr\,\frac{y_2-2y_1+y}{\Delta x^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

so dass also

$$Gr\,\beta=\frac{2+\frac{\partial^2(y^2)}{\partial x^2}}{2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}=\frac{2+2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+2y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}=\frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}.$$

Bezeichnet man mit α, β kurzweg die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes, so ist also

Digitized by Google

$$\beta=\frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}},\ x-\alpha=\beta\, Gr\frac{y_1-y}{\Delta x}-Gr\frac{y_1{}^2-y^2}{2\Delta x}=\beta\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial(y^2)}{\partial x}$$

$$=\beta\frac{\partial y}{\partial x}-y\frac{\partial y}{\partial x}=(\beta-y)\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Hieraus

$$\beta-y=\frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}},\quad \alpha-x=-\frac{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}},\quad \varrho=\pm\frac{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}, \qquad (21)$$

wo das Doppelzeichen so zu wählen ist, dass ϱ positiv ausfällt.

Der hiedurch bestimmte Kreis misst offenbar die Krümmung der Kurve in dem betreffenden Punkte, und es wird dieselbe desto bedeutender seyn, je kleiner ϱ ist. (Vergl. §. 21, I u. IV; §. 48, IV.)

Für eine Ellipse etwa wäre $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, woraus $b^2x+a^2y\frac{\partial y}{\partial x}=0$, $b^2+a^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+a^2y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$, und also

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{b^2x}{a^2y},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{b^2(a^2y^2+b^2x^2)}{a^4y^3}=-\frac{a^2b^4}{a^4y^3}=-\frac{b^4}{a^2y^3},$$

$$\varrho=\frac{\left[1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right]^{\frac{3}{2}}y^3a^2}{b^4}=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4},$$

welche Formel für jeden Punkt der Ellipse den Krümmungshalbmesser gibt. Im Scheitel der grossen Axe ist $x=a$, $y=0$, also dann $\varrho=\frac{b^2}{a}$; im Scheitel der kleinen Axe aber $y=b$, $x=0$, also $\varrho=\frac{a^2}{b}$.

Zusatz zu §. 22 und 23.

IV. Führen die Vorschriften des §. 23 zur Bestimmung des Werthes der Formen $\frac{0}{0}$ nicht zum Ziele, so wird man geradezu zur Reihen-Entwicklung übergehen, wie diess im Grunde ja auch gleich anfänglich geschehen ist. (Vergl. §. 71.)

Wäre z. B. der Werth von

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

für $x=a$ zu ermitteln, was nach den früheren Methoden nicht wohl angienge, so setze man $x=a+h$, nehme sogleich $\frac{h}{a}<1$, und hat (§. 54, I):

Digitized by Google

$$\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}+\sqrt{h}}{\sqrt{(a+h)^2-a^2}}=\frac{(a+h)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{a}+\sqrt{h}}{\sqrt{2ah+h^2}}=\frac{\sqrt{a}+\frac{1}{2}\frac{h}{\sqrt{a}}-\frac{1}{8}\frac{h^2}{\sqrt{a^3}}+\ldots-\sqrt{a}+\sqrt{h}}{\sqrt{h}\sqrt{2a+h}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\frac{h}{\sqrt{a}}-\ldots.+\sqrt{h}}{\sqrt{h}\sqrt{2a+h}}=\frac{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{a}}-\ldots.+1}{\sqrt{2a+h}}.$$

Setzt man hier $h=0$, so erhält man $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ als Werth des obigen Bruches für $x=a$.

Es versteht sich ganz von selbst, dass man die Reihenentwicklung ganz unbedingt benützen darf, gleichviel, ob die früheren Methoden zum Ziele führen oder nicht.

§. 57.

Integration mittelst unendlicher Reihen.

Wir nennen eine unendliche Reihe konvergent, wenn sie eine bestimmte, endliche Summe hat, d. h. wenn, indem man mehr und mehr Glieder der Reihe von Anfang her zusammen nimmt, man einer bestimmten, endlichen Grösse sich unbegränzt nähert. (Vergl. §. 60, IV.)

I. Sey nun

$$u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n, \ldots.$$

eine (unendliche) Reihe, deren Glieder Funktionen von x seyn sollen, S deren Summe, und man setze

$$S=u_1+u_2+\ldots.+u_n+R_n, \qquad \text{(a)}$$

so muss die Grösse R_n desto mehr sich 0 nähern, je grösser n wird, so dass $Gr\,R_n=0$, wo *Gr* sich auf ein (unendliches) Wachsen von n bezieht.

Aus (a) folgt:

$$\int_a^b S\,\partial x=\int_a^b u_1\,\partial x+\int_a^b u_2\,\partial x+\ldots+\int_a^b u_n\partial x+\int_a^b R_n\,\partial x.$$

Nach §. 39, II ist aber

$$\int_a^b R_n\,\partial x=(b-a)R'_n,$$

wo R'_n ein Mittelwerth von R_n ist. Da aber R_n mit unendlichem n verschwindet, so verschwindet auch R'_n, so dass auch $Gr\int_a^b R_n\,\partial x=0$.

Nähert sich also die Summe

$$u_1+u_2+\ldots\ldots+u_n \text{ der Grösse } S,$$

so nähert sich

$$\int_a^b u_1\,\partial x+\int_a^b u_2\,\partial x+\ldots+\int_a^b u_n\,\partial x \text{ der Grösse } \int_a^b S\,\partial x.$$

Digitized by Google

Man pflegt diess auch so auszudrücken, dass man sagt, aus der Gleichung

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots. \qquad (b)$$

folge

$$\int_a^b S\partial x = \int_a^b u_1\partial x + \int_a^b u_2\partial x + \int_a^b u_3\partial x + \ldots\ldots, \qquad (c)$$

wo die Reihen in's Unendliche gehen, und nur vorausgesetzt ist, dass die erste konvergent ist (für alle x zwischen a nnd b).

II. Jedes unbestimmte Integral kann als ein bestimmtes angesehen werden. So ist

$$\int f(x)\partial x = \int_a^x f(x)\partial x + C,$$

wo a beliebig (aber konstant). Denn ist

$$\int f(x)\partial x = F(x), \text{ so ist } \int_a^x f(x)\partial x = F(x) - F(a)$$

(nach §. 41); also $\int_a^x f(x)\partial x + C = F(x) + C - F(a)$, oder weil F(a) konstant: $\int_a^x f(x)\partial x = F(x) + C'$.

Demnach gilt der in I. erwiesene Satz auch für unbestimmte Integrale, nur muss die unendliche Reihe für alle x, die man brauchen will, konvergent seyn, und man hat auf der zweiten Seite in (c) eine willkürliche Konstante zuzufügen.

III. Hierauf gründet sich die Methode der Integration mittelst unendlicher Reihen. Soll man nämlich das Integral $\int U\partial x$ bestimmen und ist im Stande, U in eine konvergente unendliche Reihe zu entwickeln, so erhält man, wenn $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = U$:

$$\int U\partial x = \int u_1\partial x + \int u_2\partial x + \int u_3\partial x + \ldots + C.$$

Die Entwicklung selbst kann in beliebiger Weise geschehen, etwa nach dem Mac-Laurin'schen Satze (§. 53, III), oder in anderer Art. Es lässt sich übrigens auch eine unmittelbare Formel aufstellen.

Man hat nämlich, wenn man in der Gleichung (5′) des §. 53 setzt:

$$f(x) = \int u\partial x,\ a = x,\ h = -x,\ f(0) = C:$$

$$C = \int u\partial x - \frac{x}{1}u + \frac{x^2}{1.2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{x^3}{1.2.3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{1.2\ldots n}\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1} u_1}{1.2\ldots(n+1)},$$

wo u_1 gleich ist dem Werthe von $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$, wenn man nach der Differenzirung an

Digitized by Google

die Stelle von x setzt $(1-\Theta)x$ oder Θx, da auch $1-\Theta$ zwischen 0 und 1 liegt. Daraus folgt

$$\int u\,\partial x = C + xu - \frac{x^2}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{x^3}{2.3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \ldots \pm \frac{x^n}{2.3..n}\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1}} \mp \frac{x^{n+1}u_1}{2.3..(n+1)}.^*$$

Beispiele.

IV. 1. Man soll

$$\int \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2\varphi}},\ e^2<1$$

bestimmen. Da (§. 54. I) für $e^2<1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = (1-e^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}e^2\sin^2\varphi + \frac{1.3}{2.4}e^4\sin^4\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}e^6\sin^6\varphi + \ldots,$$

so ist

$$\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \varphi + \frac{1}{2}e^2\int\sin^2\varphi\,\partial\varphi + \frac{1.3}{2.4}e^4\int\sin^4\varphi\,\partial\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}e^6\int\sin^6\varphi\,\partial\varphi + ..+C,$$

wo nun die noch vorkommenden Integrale nach §. 34 ermittelt werden.

2. Um $\int\frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\partial x$ zu bestimmen, wenn $e^2<1$ und x^2 eben so <1, hat man:

$$\sqrt{1-e^2x^2} = 1 - \frac{1}{2}e^2x^2 - \frac{1.1}{2.4}e^4x^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6}e^6x^6 - \ldots,$$

also

$$\int\frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\partial x = \int\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}e^2\int\frac{x^2\partial x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1.1}{2.4}e^4\int\frac{x^4\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$-\frac{1.1.3}{2.4.6}e^6\int\frac{x^6\partial x}{\sqrt{1-x^2}} - \ldots + C.$$

Was nun die hier vorkommenden Integrale anbelangt, so ist in §. 33 (e): $m=2n,\ r=-\frac{1}{2},\ n=2,\ a=-1,\ b=1$, also $\int\frac{x^{2n}\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{2n-1}\sqrt{1-x^2}}{2n} + \frac{2n-1}{2n}\int\frac{x^{2n-2}\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$, vermöge welcher Reduktionsformel jedes dieser Integrale bestimmt werden kann.

Man erhält allgemein:

$$\int\frac{x^{2n}\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\left[\frac{x^{2n-1}}{2n} + \frac{2n-1}{2n}\frac{x^{2n-3}}{2n-2} + \frac{2n-3}{2n-2}\,\frac{2n-1}{2n}\,\frac{x^{2n-5}}{2n-4} + \ldots\ldots\right.$$
$$\left. + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots3}{2n.2n-2\ldots4}\,\frac{x}{2}\right] + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots1}{2n(2n-2)\ldots2}\,arc(\sin = x) + C.$$

---

* Setzt man in der Formel (6') des §. 53 $f(x) = \int F(x)\,\partial x$, $f(0) = C$, so erhält man:

$$\int F(x)\,\partial x = C + \frac{x}{1}F(0) + \frac{x^2}{1.2}F'(0) + \ldots + \frac{x^n}{1\ldots n}F^{n-1}(0) + \frac{x^{n+1}}{1\ldots n+1}F^n(\Theta x).$$

Digitized by Google

3. Um $\int \frac{\partial x}{\sqrt{x+x^4}}$ zu bestimmen, wenn $x > 1$, setze man

$$\frac{1}{\sqrt{x+x^4}} = \frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} = \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{x^6} - \ldots\ldots\right)$$

und hat jetzt

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{x+x^4}} = \int \frac{\partial x}{x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{\partial x}{x^5} + \frac{1.3}{2.4}\int \frac{\partial x}{x^8} - \ldots\ldots + C,$$

wo, da $\frac{1}{x^3} < 1$, die Reihe konvergent ist (§. 54, I).

Eben so für $x > 1$:

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{x+x^3}} = \int \frac{\partial x}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\int \frac{\partial x}{x^3\sqrt{x}} + \frac{1.3}{2.4}\int \frac{\partial x}{x^5\sqrt{x}} - \ldots + C,$$

wo nun die einzelnen Integrale nach der Formel

$$\int \frac{\partial x}{x^n\sqrt{x}} = \int x^{\frac{-(2n+1)}{2}} \partial x = -\frac{2}{2n-1}\, x^{-\left(\frac{2n-1}{2}\right)} = -\frac{2}{2n-1}\,\frac{\sqrt{x}}{x^n}$$

bestimmt werden.

Reihen für *arc* (*sin* = x) und *arc* (*tg* = x).

V. Da für $x^2 < 1$ (§. 54, I)

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \ldots\ldots$$

so ist

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \ldots + C,$$

und da

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = arc\,(sin = x),$$

so ist also

$$arc\,(sin = x) = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots,\quad x^2 < 1.$$

wo die willkürliche Konstante sogleich weggelassen wurde, indem sowohl *arc* (*sin* = x), als auch die unendliche Reihe Null geben für $x = 0$, also $C = 0$ seyn muss.

Dieselbe Reihe hätte man auch aus §. 18′, V ableiten können. Bezeichnet man nämlich durch $y_0, y_0', y_0'', \ldots$ die Werthe von $y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots$ für $x = 0$, so ist

$$y_0^n = (n-2)^2 y_0^{n-2},\ y_0 = 0,\ y_0' = 1,\ y_0'' = 0.$$

Daraus folgt dann, dass $y_0^4, y_0^6, \ldots$ Null; ferner:

$y_0^3 = y_0' = 1,\ y_0^5 = 3^2 y_0^3 = 3^2,\ y_0^7 = 5^2 y_0^5 = 5^2.3^2, \ldots, y_0^{2n+1} = (2n-1)^2(2n-3)^2\ldots 3^2$

also da (§. 53)

$$arc\,(sin = x) = y_0 + y_0'\frac{x}{1} + y_0''\frac{x^2}{1.2} + y_0^3\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots,$$

Digitized by Google

so ist

$$arc\,(sin = x) = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

VI. Ganz eben so findet man

$$\int \frac{\partial x}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + C,$$

woraus

$$arc\,(tg = x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \quad x^2 < 1.$$

Dieselbe Reihe könnte man aus §. 18′, VI in der so eben angegebenen Weise ableiten, indem dort:

$$y_0^n = -(n-2)(n-1)\,y_0^{n-2}, \quad y_0 = 0, \quad y_0' = 1, \quad y_0'' = 0.$$

Zusatz zu §. 48.

VII. Für den elliptischen Bogen HG (Fig. 20, S. 177), für den $CF = x_1$, ist $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, $a^2 y \frac{\partial y}{\partial x} + b^2 x = 0$, $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)} = \frac{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)} = \frac{a^4 - (a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}$, also wenn $a^2 - b^2 = a^2\alpha^2$, d. h. $\alpha^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$ $(a > b)$, so ist $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 - \alpha^2 x^2}{a^2 - x^2}}$, und

$$HG = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{a^2 - \alpha^2 x^2}{a^2 - x^2}}\,\partial x.$$

Man setze hier, da $x < a : x = a\,sin\,\varphi$, so ist

$$\int\sqrt{\frac{a^2-\alpha^2x^2}{a^2-x^2}}\,\partial x = \int\sqrt{\frac{a^2 - a^2\alpha^2 sin^2\varphi}{a^2 - a^2 sin^2\varphi}}\,a\,cos\,\varphi\,\partial\varphi = a\int\sqrt{1-\alpha^2 sin^2\varphi}\,\partial\varphi,$$

also

$$HG = a\int_0^{\varphi_1}\sqrt{1-\alpha^2 sin^2\varphi}\,\partial\varphi, \quad sin\,\varphi_1 = \frac{x_1}{a}.$$

Ist hier $x_1 = a$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, so ist die Länge des vierten Theils der Ellipse =

$$a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\alpha^2 sin^2\varphi}\,\partial\varphi, \quad \alpha^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}.$$

Der Werth dieses Integrals lässt sich hier nur durch Entwicklung in unendliche Reihen finden (§. 160, I). Man hat:

$$\int\sqrt{1-\alpha^2 sin^2\varphi}\,\partial\varphi = \int\left[1 - \frac{1}{2}\alpha^2 sin^2\varphi - \frac{1.1}{2.4}\alpha^4 sin^4\varphi - \frac{1.1.3}{2.4.6}\alpha^6 sin^6\varphi - \ldots\right]\partial\varphi,$$

also

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\alpha^2 sin^2\varphi}\,\partial\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2\varphi\,\partial\varphi - \frac{1.1}{2.4}\alpha^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4\varphi\,\partial\varphi \ldots$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha^2 . \frac{1}{2} . \frac{\pi}{2} - \frac{1.1}{2.4}\alpha^4 . \frac{3.1}{4.2}\frac{\pi}{2} - \ldots \text{ (§. 43)},$$

Digitized by Google

$$HB = \frac{a\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1.\alpha}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\alpha^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2\ 4.6}\alpha^3\right)^2 - \ldots\right].$$

Für $a = b$ ist die Ellipse ein Kreis, $\alpha = 0$, also der Viertelkreis $= \frac{a\pi}{2}$, wie bekannt.

§. 58.

Summirung endlicher Reihen mittelst dieser Methode.

Dass man auch endliche Reihen mittelst des obigen Verfahrens summiren kann, ist wohl klar und es mögen einige Beispiele zur Erläuterung dienen.

I. Sey

$$(a + nb)(c + nd)\ldots(p + nq)x^{n\alpha} \tag{a}$$

das allgemeine Glied einer Reihe, deren einzelne Glieder erhalten werden, wenn man $n = 0, 1, 2, \ldots$ setzt; bezeichne ferner y die Summe der $n + 1$ ersten Glieder, so ist

$$\beta\int y x^\gamma dx = \frac{ac\ldots p\beta}{\gamma+1}x^{\gamma+1} + \frac{(a+b)(c+d)\ldots(p+q)\beta}{\alpha+\gamma+1}x^{\alpha+\gamma+1} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{(a+nb)(c+nd)\ldots(p+nq)\beta}{n\alpha+\gamma+1}x^{n\alpha+\gamma+1} + C.$$

Bestimmt man nun β und γ so, dass für jedes n:

$(a + nb)\beta = n\alpha + \gamma + 1$, d. h. $a\beta = \gamma + 1$, $b\beta = \alpha$; $\beta = \frac{\alpha}{b}$, $\gamma = \frac{a\alpha - b}{b}$,

was immer möglich ist, so ist

$$\beta\int y x^\gamma dx = c\ldots p x^{\gamma+1} + (c+d)\ldots(p+q)x^{\alpha+\gamma+1} + \ldots + (c+nd)\ldots(p+nq)x^{n\alpha+\gamma+1}. \tag{a'}$$

Gesetzt man könne die hier vorkommende Reihe summiren und sey z deren Summe, so ist

$$\beta y x^\gamma = \frac{\partial z}{\partial x}, \text{ also } y = \frac{1}{\beta x^\gamma}\frac{\partial z}{\partial x},$$

wodurch y gefunden wird. Was aber die Reihe z anbelangt, so hat, abgesehen von dem Faktor $x^{\gamma+1}$, ihr allgemeines Glied die Form

$$(c + nd)\ldots(p + nq)x^{n\alpha}, \tag{b}$$

d. h. wie das Glied (a), nur fehlt ein Faktor im Koeffizienten. So wie man von (a) auf (a') gelangt, kommt man jetzt von (b) auf

$$\beta'\int z x^{\gamma'} dx = e\ldots p x^{\gamma'+1} + (e+f)\ldots(p+q)x^{\alpha+\gamma'+1} + \ldots + (e+nf)\ldots(p+nq)x^{\alpha n+\gamma'+1},$$

wenn

$$\beta' = \frac{\alpha}{d}, \ \gamma' = \frac{c\alpha - d}{d},$$

so dass, die Summe der bleibenden Reihe $= u$ gesetzt, man hat

$$z = \frac{1}{\beta' x^{\gamma'}}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Digitized by Google

Wie man hier weiter geht, ist klar. Schliesslich hat man die Reihe

$$p + (p+q)x^\alpha + \ldots + (p+nq)x^{n\alpha}$$

zu summiren. Ist s die Summe, so hat man abermals

$$\beta_1 \int s x^{\gamma_1} \partial x = x^{\gamma_1+1} + x^{\alpha+\gamma_1+1} + \ldots + x^{n\alpha+\gamma_1+1} = x^{\gamma_1+1}\frac{[x^{(n+1)\alpha}-1]}{x^\alpha - 1},$$

wenn

$$\beta_1 = \frac{\alpha}{q},\ \gamma_1 = \frac{p\alpha - q}{q},$$

und dann

$$s = \frac{1}{\beta_1 x^{\gamma_1}} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x^{\gamma_1+1}(x^{(n+1)\alpha}-1)}{x^\alpha-1}\right].$$

II. In ähnlicher Weise kann eine Reihe, deren allgemeines Glied

$$\frac{x^{n\alpha}}{(a+nb)(c+nd)\ldots(p+nq)} \qquad (c)$$

ist, auf eine andere zurückgeführt werden, in der das allgemeine Glied einen Faktor weniger im Nenner hat. Ist nämlich y die Summe der $n+1$ ersten Glieder der Reihe (c), so hat man

$$\beta\frac{d(yx^\gamma)}{dx} = \frac{\beta\gamma x^{\gamma-1}}{ac..p} + \frac{\beta(\alpha+\gamma)x^{\alpha+\gamma-1}}{(a+b)(c+d)\ldots(p+q)} + \ldots + \frac{\beta(\alpha n+\gamma)x^{n\alpha+\gamma-1}}{(a+nb)(c+nd)\ldots(p+nq)},$$

und wenn nun

$$\beta(\alpha n+\gamma) = a+nb,\ \alpha\beta = b,\ \beta\gamma = a;\ \beta = \frac{b}{\alpha},\ \gamma = \frac{a\alpha}{b},$$

so ist

$$\beta\frac{d(yx^\gamma)}{dx} = x^{\gamma-1}\left[\frac{1}{c\ldots p} + \frac{x^\alpha}{(c+d)\ldots(p+q)} + \ldots + \frac{x^{n\alpha}}{(c+nd)\ldots(p+nq)}\right],$$

und wenn man diese Reihe summiren kann, so ist (ihre Summe $= z$ gesetzt):

$$\beta y x^\gamma = \int x^{\gamma-1} z\,dx,\ y = \frac{1}{\beta x^\gamma}\int x^{\gamma-1} z\,dx.$$

Da für $x = 0$ immerhin $y = \frac{1}{ac..p}$, so kann die eintretende willkürliche Konstante leicht bestimmt werden. Durch mehrfache Anwendung desselben Verfahrens gelangt man schliesslich zur Reihe:

$$\frac{1}{p} + \frac{x^\alpha}{p+q} + \frac{x^{2\alpha}}{p+2q} + \ldots + \frac{x^{n\alpha}}{p+nq},$$

für welche sich ergibt (wenn s deren Summe):

$$\beta'\frac{d(sx^{\gamma'})}{dx} = x^{\gamma'-1} + x^{\alpha+\gamma'-1} + \ldots + x^{n\alpha+\gamma'-1} = x^{\gamma'-1}\left[\frac{x^{(n+1)\alpha}-1}{x^\alpha-1}\right].$$

vorausgesetzt, es sey

$$\beta' = \frac{q}{\alpha},\ \gamma' = \frac{p\alpha}{q},$$

so dass

$$s = \frac{1}{\beta' x^{\gamma'}}\int x^{\gamma'-1}\left[\frac{x^{(n+1)\alpha}-1}{x^\alpha-1}\right]\partial x.$$

Digitized by Google

III. Die Reihe, deren allgemeines Glied

$$\frac{(a+nb)(c+nd)\ldots.(p+nq)}{(a'+nb')(c+nd')\ldots.(p'+nq')}x^{n\alpha} \qquad (d)$$

lässt sich durch Anwendung beider obigen Verfahrungsweisen auf eine andere reduziren, in der in Zähler und Nenner ein Faktor ausgefallen ist. Heisst nämlich y die Summe der n + 1 ersten Glieder der Reihe (d) so bekommt man:

$$\beta\int y x^{\gamma} dx = \sum_0^n \frac{(c+nd)\ldots(p+nq)}{(a'+nb')(c'+nd')\ldots(p'+nq')}x^{n\alpha+\gamma+1},$$

wenn wir durch $\sum\limits_0^n$ die Summe der Glieder bezeichnen, die man erhält, wenn man $n=0, 1, \ldots n$ setzt, vorausgesetzt es seyen β und γ bestimmt durch die Gleichungen

$$b\beta=\alpha,\ \gamma+1=a\beta.$$

Ist ferner

$$\sum_0^n \frac{(c+nd)\ldots(p+nq)}{(a'+nb')\ldots(p'+nq')}x^{n\alpha}=z,$$

so ist

$$\beta'\frac{d(zx^{\gamma'})}{dx}=\sum_0^n \frac{(c+nd)\ldots(p+nq)}{(c'+nd')\ldots(p'+nq')}x^{n\alpha+\gamma'-1}, \qquad (d')$$

wenn

$$\alpha\beta'=b',\ \beta'\gamma'=a';$$

ferner ist dann

$$\beta\int yx^{\gamma}dx=zx^{\gamma+1},\ \text{also}\ y=\frac{1}{\beta x^{\gamma}}\cdot\frac{d(x^{\gamma+1}z)}{dx},$$

während die Ermittlung von z möglich ist, wenn man die Summe (d′) bestimmt. Es ist leicht, diese Betrachtungen zum Schlusse zu führen, was wir dem Leser überlassen wollen.

IV. Gesetzt man kenne die Summen der beiden Reihen

$$A+Bx+Cx^2+\ldots.=X,$$
$$A'+\frac{B'}{x}+\frac{C'}{x^2}+\ldots.=X',$$

wo X und X′ Funktionen von x sind, so erhält man, indem man beide multiplizirt, eine Reihe, in der Glieder mit negativen und mit positiven Potenzen von x vorkommen, so wie eine Anzahl Glieder, die kein x enthalten. Diese letzteren sind offenbar

$$AA'+BB'+CC'+\ldots\ldots$$

während die ersteren die Form $\frac{\alpha}{x^n}$, die zweiten βx^n haben, wo $n=1, 2, \ldots.$ ist. Man hat also

$$XX'=AA'+BB'+CC'+\ldots.+\Sigma\frac{\alpha}{x^n}+\Sigma\beta x^n,$$

wo die Σ die Summen der Glieder erster und zweiter Art bezeichnen. Man setze nun hier

$$x=\cos z+i\sin z \text{ und } x=\cos z-i\sin z,$$

wodurch XX′ zu Z und Z′ werde, so ist wegen

$$\frac{1}{(\cos z\pm i\sin z)^n}=\cos nz\mp i\sin nz,\ (\cos z\pm i\sin z)^n=\cos nz\pm i\sin nz:$$

Digitized by Google

$$Z = AA' + BB' + \ldots + \Sigma\alpha(\cos nz - i\sin nz) + \Sigma\beta(\cos nz + i\sin nz),$$
$$Z' = AA' + BB' + \ldots + \Sigma\alpha(\cos nz + i\sin nz) + \Sigma\beta(\cos nz - i\sin nz),$$

also

$$Z + Z' = 2(AA' + BB' + \ldots) + 2\Sigma\alpha\cos nz + 2\Sigma\beta\cos nz,$$

und folglich da

$$\int_0^\pi \cos nz\,\partial z = 0:$$

$$AA' + BB' + CC' + \ldots = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (Z + Z')\,\partial z,$$

vermittelst welcher Gleichung die Summe der (endlichen oder unendlichen) Reihe erster Seite gefunden wird.

Zehnter Abschnitt.

Die Sätze von Bürmann und Lagrange.

§. 59.

Bürmann's Satz.

I. Aus §. 53, III schliessen wir, dass in so ferne die dortige Gleichung (11′) erfüllt ist, man setzen dürfe

$$f(0) + \frac{z}{1}f'(0) + \frac{z^2}{1.2}f''(0) + \ldots\ldots\ldots = f(z). \qquad (c)$$

Wir werden diess einfach dadurch ausdrücken, dass wir so sagen: so lange die Reihe erster Seite konvergent ist (§. 57), sey ihre Summe $= f(z)$. Dabei wollen wir bei unsern jetzigen Untersuchungen die Bedingungen, unter denen die (c) konvergent ist, nicht näher angeben, da es für unsere Absicht dieser mühsamen Arbeit nicht lohnen würde.

Wir wollen nun in (c) $z = \frac{x-a}{\varphi(x)}$ setzen und annehmen, es sey $\varphi(a)$ nicht Null, so dass für $z = 0$ nothwendig $x = a$ ist; wir wollen weiter voraussetzen, es sey von $x = a$ bis $x = b$ die Grösse $\frac{x-a}{\varphi(x)}$ immer endlich, so dass also $\varphi(x)$ niemals Null werde innerhalb dieser Gränzen. Damit endlich zu jedem bestimmten Werthe von z auch ein einziger bestimmter Werth von x gehöre, soll $\frac{x-a}{\varphi(x)}$ von $x = a$ bis $x = b$ beständig wachsen oder beständig abnehmen. Alsdann kann man sagen:

Ist die Reihe

Digitized by Google

$$f(0)+\frac{x-a}{\varphi(x)}f'(0)+\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^2\frac{f''(0)}{1.2}+\ldots\ldots\ldots \qquad (c')$$

konvergent von $x=a$ bis $x=b$, so ist ihre Summe $=f\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)$. *

Die Bedingungen, die wir oben angaben, bestehen darin, dass $\varphi(x)$ nicht Null werde, und $\frac{x-a}{\varphi(x)}$ beständig wachse oder abnehme. Letztere Bedingung aber ist erfüllt, wenn $\frac{\partial}{\partial x}\frac{x-a}{\varphi(x)}$ immer von demselben Zeichen ist (§. 20, I). Diese Grösse ist aber $=\frac{\varphi(x)-(x-a)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}$ und wird immer dasselbe Zeichen haben, wenn $\varphi(x)-(x-a)\varphi'(x)$ in derselben Lage ist, so dass wir also sagen wollen, letztere Grösse dürfe ihr Zeichen nicht wechseln von $x=a$ bis $x=b$.

II. Wir wollen nun $f\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)=F(x)$ setzen und unter dieser Voraussetzung $f(0)$, $f'(0)$, ... zu bestimmen suchen. Es sind dabei $f(0)$, $f'(0)$, ... die Werthe von $f(z)$, $f'(z)$, ... für $z=0$, d. h. $x=a$. Somit ist zunächst

$$f(0)=F(a).$$

Allgemein ist aber nach (c'):

$$F(x)=f(0)+\frac{x-a}{\varphi(x)}f'(0)+\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^2\frac{f''(0)}{1.2}+\ldots+\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^{n-1}\frac{f^{n-1}(0)}{1..n-1}$$
$$+\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^n\frac{f^n(0)}{1\ldots n}+\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^{n+1}\frac{f^{n+1}(0)}{1..n+1}+\ldots\ldots;$$

multiplizirt man diese Gleichung beiderseitig mit $[\varphi(x)]^n$ und nimmt die n^{ten} Differentialquotienten, so hat man

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}[F(x)\varphi(x)^n]=f(0)\frac{\partial^n}{\partial x^n}[\varphi(x)^n]+\frac{f'(0)}{1}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[\frac{x-a}{\varphi(x)}\varphi(x)^n\right]+\ldots\ldots$$
$$+\frac{f^n(0)}{1..n}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^n\varphi(x)^n\right]+\frac{f^{n+1}(0)}{1..n+1}\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\left[\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^{n+1}\varphi(x)^n\right]+\ldots\ldots$$

Setzt man hier $x=a$, so erhält man nach Gleichung (20) in §. 18':

---

* Die angegebenen Bedingungen sind nothwendig, theils aber darin auch schon enthalten, dass wir voraussetzen, die Reihe sey konvergent, d. h. habe eine Summe. So kann $\frac{x-a}{\varphi(x)}$ unmöglich ∞ werden, da sonst eine Summe nicht angebbar wäre; also kann $\varphi(x)$ nicht Null werden. Zu einem bestimmten Werthe von x kann auch nur ein einziger Werth von $\frac{x-a}{\varphi(x)}$ gehören dürfen, da man sonst in die Unmöglichkeit der Entscheidung, welcher Werth zu wählen sey, gelangen würde. Jedenfalls aber überheben uns die gesetzten Bedingungen allen Schwierigkeiten, und wir lassen unentschieden, ob nicht die eine oder andere zu eng gezogen sey.

Digitized by Google

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}[F(x)\varphi(x)^n]_a = f(0)\left[\frac{\partial^n}{\partial x^n}\varphi(x)^n\right]_a + \frac{n}{1}f'(0)\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\varphi(x)^{n-1}\right]_a + \ldots\ldots$$
$$+\frac{n(n-1)..2}{1.2..n-1}f^{n-1}(0)\left[\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)\right]_a + \frac{n(n-1)..1}{1.2..n}f^n(0),$$

welche Gleichung vollkommen richtig ist, da die Reihe zweiter Seite eine endliche ist. * Man kann sie auch schreiben:

$$\left[\frac{\partial^n}{\partial x^n}[F(x)\varphi(x)^n]\right]_a = f(0)\left[\frac{\partial^n\varphi(x)^n}{\partial x^n}\right]_a + \frac{n}{1}f'(0)\left[\frac{\partial^{n-1}\varphi(x)^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\right]_a + \ldots..$$
$$+\frac{n}{1}f^{n-1}(0)\left[\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right]_a + f^n(0).$$

Ganz eben so erhält man, wenn man die Gleichung (21) in §. 18′ beachtet:

$$\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(F(x)\frac{\partial\varphi(x)^n}{\partial x}\right)\right]_a = f(0)\left[\frac{\partial^n\varphi(x)^n}{\partial x^n}\right]_a + \frac{n}{1}f'(0)\left[\frac{\partial^{n-1}\varphi(x)^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\right]_a + \ldots.$$
$$+\frac{n}{1}f^{n-1}(0)\left[\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right]_a.$$

Subtrahirt man beide Resultate, so ergibt sich

$$f^n(0) = \left[\frac{\partial^n}{\partial x^n}[F(x)\varphi(x)^n]\right]_a - \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(F(x)\frac{\partial\varphi(x)^n}{\partial x}\right)\right]_a.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}[F(x)\varphi(x)^n] - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(F(x)\frac{\partial\varphi(x)^n}{\partial x}\right) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[\frac{\partial[F(x)\varphi(x)^n]}{\partial x} - F(x)\frac{\partial\varphi(x)^n}{\partial x}\right]$$
$$= \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[\frac{\partial F(x)}{\partial x}\varphi(x)^n + F(x)\frac{\partial\varphi(x)^n}{\partial x} - F(x)\frac{\partial\varphi(x)^n}{\partial x}\right] = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}[\varphi(x)^n F'(x)].$$

---

* Man kann hier allerdings die Frage aufwerfen, ob die Differenzirung einer unendlichen Reihe kurzweg gestattet sey. Ohne uns in allgemeinere Untersuchung einzulassen, bemerken wir, dass die Beantwortung dieser Frage hier umgangen werden kann. Setzt man nämlich

$$F(x) = f(0) + \frac{x-a}{\varphi(x)}\frac{f'(0)}{1} + \ldots\ldots.. + \left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^n \frac{f^n(x)}{1..n} + \left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^{n+1} R$$

nach §. 53, I, so ist jedenfalls

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}[F(x)\varphi(x)^n] = f(0)\frac{\partial^n}{\partial x^n}[\varphi(x)^n] + \ldots. +$$
$$\frac{f^n(0)}{1..n}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^n\varphi(x)^n\right] + \frac{\partial^n}{\partial x^n}[R(x-a)^{n+1}\varphi(x)].$$

Aus §. 18′ folgt aber, wenn nur R und $\varphi(x)$ nicht ∞ sind für $x = a$, dass für $x = a$ jedenfalls $\frac{\partial^n}{\partial x^n}[R\,\varphi(x)(x-a)^{n+1}]$ Null ist, so dass wir sofort den angegebenen Werth von $\frac{\partial^n}{\partial x^n}[F(x)\varphi(x)^n]_a$ erhalten.

Digitized by Google

Daraus folgt also dass allgemein

$$f^n(0) = \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} [\varphi(x)^n F'(x)]\right]_a$$

ist. Für $n = 1$ würde man eben so finden

$$f'(0) = [\varphi(x) F'(x)]_a.$$

Man hätte nämlich

$$f'(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}[F(x)\varphi(x)]\right)_a - \left(F(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}\right)_a,$$

was ganz unmittelbar die angegebene Formel gibt. Fasst man alles Bisherige zusammen, so erhält man folgenden Satz:

Konvergirt die unendliche Reihe

$$F(a) + [F'(x)\varphi(x)]_a \frac{x-a}{\varphi(x)} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial}{\partial x}[F'(x)\varphi(x)^2]\right)_a \left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^2$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}[F'(x)\varphi(x)^3]\right)_a \left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^3 + \ldots \quad (22)$$

von $x = a$ bis $x = b$, so ist ihre Summe $= F(x)$.

Dabei darf nicht $\varphi(a) = 0$ seyn, oder es muss $\frac{x-a}{\varphi(x)}$ Null seyn für $x = a$, nnd $\varphi(x) - (x-a)\varphi'(x)$ darf das Zeichen nicht wechseln (innerhalb der angegebenen Gränzen).

III. Setzt man $\frac{x-a}{\varphi(x)} = \psi(x)$, so hat man auch folgenden Satz:

Konvergirt die unendliche Reihe

$$F(a) + \left(F'(x)\frac{x-a}{\psi(x)}\right)_a \psi(x) + \frac{1}{1.2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{F'(x)\left(\frac{x-a}{\psi(x)}\right)^2\right\}\right]_a \psi(x)^2$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{F'(x)\left(\frac{x-a}{\psi(x)}\right)^3\right\}\right]_a \psi(x)^3 + \ldots\ldots \quad (22')$$

von $x = a$ bis $x = b$, so ist ihre Summe $= F(x)$. Dabei muss $\psi(x)$ nur wachsen oder nur abnehmen von $x = a$ bis $x = b$; ferner muss $\psi(a) = 0$, aber $\frac{x-a}{\psi(x)}$ für $x = a$ einen bestimmten Werth haben. Was diesen letzteren anbelangt, so ergibt er sich aus §. 22, I gleich $\frac{1}{\psi'(a)}$, so dass $\psi'(a)$ nicht Null seyn darf. Ueberhaupt darf $\psi'(x)$ sein Zeichen nicht wechseln von $x = a$ bis $x = b$.

Die Reihe (22′) pflegt die Bürmann'sche Reihe zu heissen. Für uns ist die Formel (22) jedoch die bequemere.

§. 60.

Ableitung des Satzes von Lagrange.

I. Gesetzt es gebe innerhalb der Gränzen, für welche die Summe der Reihe (22) gleich $F(x)$ ist, einen Werth α von x, für den

Digitized by Google

$$\frac{x-a}{\varphi(x)} = 1, \quad x = a + \varphi(x),$$

so ist für denselben die Summe

$$F(a) + [F'(x)\varphi(x)]_a + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left\{F'(x)\varphi(x)^2\right\}\right)_a$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{F'(x)\varphi(x)^3\right\}\right)_a + \ldots \tag{23}$$

gleich $F(\alpha)$. Man kann also sagen: Konvergirt die unendliche Reihe (23), so ist ihre Summe $= F(\alpha)$, wo α so beschaffen ist, dass $\frac{\alpha - a}{\varphi(\alpha)} = 1$, $\alpha = a + \varphi(\alpha)$, d. h. α ist eine Wurzel der Gleichung $x = a + \varphi(x)$.

Was α selbst betrifft, so ergibt sich diese Grösse aus (23), wenn $F(x) = x$ gesetzt wird, so dass

$$\alpha = a + \varphi(a) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)^2\right)_a + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x)^3\right)_a + \ldots\ldots, \tag{24}$$

(wenn die unendliche Reihe überhaupt eine Summe hat). Dabei aber muss $\varphi(a)$ nicht Null seyn, und $\varphi(x) - (x - a)\varphi'(x)$ darf von $x = a$ bis $x = \alpha$ das Zeichen nicht wechseln.

Fasst man das Gesagte zusammen, so kann man die letzten Sätze auch so aussprechen: Ist die unendliche Reihe

$$a + \varphi(a) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)^2\right)_a + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x)^3\right)_a + \ldots. \tag{24'}$$

konvergent und α ihre Summe, so ist die Summe der unendlichen Reihe (23), in so ferne diese Reihe konvergent ist, gleich $F(\alpha)$. Dabei aber muss vorausgesetzt werden, dass nicht $\varphi(x)$ Null oder ∞ seyn könne von $x = a$ bis $x = \alpha$, also dass auch nicht $\varphi(a) = 0$; ferner dass $\varphi(x) - (x - a)\varphi'(x)$ immer dasselbe Zeichen habe von $x = a$ bis $x = \alpha$ (was der Fall seyn wird, wenn diese Grösse nicht 0 oder ∞ wird). Alsdann ist auch α eine Wurzel der Gleichung $x = a + \varphi(x)$. Diess ist der Satz von Lagrange.

II. Nach den eben wiederholten Bedingungen ist also $\frac{x-a}{\varphi(x)}$ Null für $x = a$ und wächst von da an beständig, oder nimmt beständig ab, mit wachsendem x, wenn $\varphi(x) - (x - a)\varphi'(x)$ positiv oder negativ ist. Da für $x = a$ letztere Grösse $= \varphi(a)$ ist, so hat sie dasselbe Zeichen, wie $\varphi(a)$.

Ist also $\varphi(a) > 0$, so muss $\frac{x-a}{\varphi(x)}$ wachsen mit wachsendem x. Für $x = a$ ist diese Grösse 0, für $x = \alpha$ aber 1; sie ist mithin gewachsen. Dazu gehört dann, dass auch x gewachsen sey von $x = a$ bis $x = \alpha$, d. h. dass $\alpha > a$ ist.

Ist aber $\varphi(a) < 0$, so ist $\frac{x-a}{\varphi(x)}$ gewachsen mit abnehmendem x. Da

Digitized by Google

aber, wie so eben gezeigt, $\frac{x-a}{\varphi(x)}$ jedenfalls gewachsen ist, so muss also x abgenommen haben, d. h. es muss $\alpha < a$ seyn.

Zwischen a und α kann weiter keine Wurzel der Gleichung $x=a+\varphi(x)$ mehr liegen, da sonst die Grösse $\frac{x-a}{\varphi(x)}$ zwischen $x=a$ und $x=\alpha$ gleich 1 werden könnte, was gegen die Voraussetzung ist, es wachse diese Grösse beständig von $x=a$ bis $x=\alpha$.

Endlich ist α eine einfache Wurzel von $x=a+\varphi(x)$. Denn sonst müsste die Grösse $\frac{\partial}{\partial x}[a+\varphi(x)-x]=\varphi'(x)-1$ Null seyn für $x=\alpha$,* d. h. man müsste haben $\varphi'(\alpha)=1$, und da $\alpha=a+\varphi(\alpha)$, d. h. $\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha-a}=1$, so wäre $\varphi'(\alpha)=\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha-a}$, $\varphi(\alpha)-(\alpha-a)\varphi'(\alpha)=0$, gegen die Voraussetzung, dass $\varphi(x)-(x-a)\varphi'(x)$ von $x=a$ bis $x=\alpha$ nie Null oder ∞ wird.

III. Hieraus ergibt sich, dass der mittelst der Gleichung (24) bestimmte Werth von α eine einfache Wurzel der Gleichung

$$x=a+\varphi(x) \qquad (25)$$

ist; dass zwischen a und α keine weitere Wurzel dieser Gleichung liegt, und dass α grösser oder kleiner als a ist, je nachdem $\varphi(a)$ positiv oder negativ ist. Alles unter der Voraussetzung, $\varphi(x)$ sey nicht 0, und $\varphi(x)-(x-a)\varphi'(x)$ weder 0 noch ∞ von $x=a$ bis $x=\alpha$.

Bedingung der Endlichkeit einer Reihensumme.

IV. Wir haben hier mehrfach von unendlichen Reihen Gebrauch gemacht, und dabei je vorausgesetzt, dass die betreffende Reihe eine bestimmte endliche Summe habe.

Es lässt sich nun im Allgemeinen entscheiden, ob die Summe einer unendlichen Reihe endlich sey, oder ob sie unendlich sey. Diess geschieht mittelst des folgenden Satzes:

Ist die unendliche Reihe

$$u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots \qquad (d)$$

---

* Ist überhaupt $f(x)=0$ eine Gleichung und es ist $x=\alpha$ eine Wurzel derselben, d. h. $f(\alpha)=0$, so ist allgemein (§. 53)

$$f(\alpha+h)=hf'(\alpha)+\frac{h^2}{1.2}f''(\alpha)+\ldots+\frac{h^n}{1..n}f^n(\alpha)+\frac{h^{n+1}}{1..n+1}f^{n+1}(\alpha+\Theta h),$$

also wenn $h=x-\alpha$:

$$f(x)=(x-\alpha)f'(\alpha)+\frac{(x-\alpha)^2}{1.2}f''(\alpha)+..+\frac{(x-\alpha)^n}{1..n}f^n(\alpha)+\frac{(x-\alpha)^{n+1}}{1..n+1}f^{n+1}[\alpha+\Theta(x-\alpha)].$$

Ist nun nicht $f'(\alpha)=0$, so lässt sich die zweite Seite, mithin auch die erste bloss durch $x-\alpha$ dividiren; ist dagegen $f'(\alpha)=0$, durch $(x-\alpha)^2, \ldots$, so dass $f(x)$ im ersten Falle den Faktor $x-\alpha$, im zweiten $(x-\alpha)^2, \ldots$ enthält, d. h. $x=\alpha$ ist einfache, zweifache ... Wurzel.

Digitized by Google

so beschaffen, dass der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ bei sehr grossem n immer kleiner als 1 ist, so muss die Reihe eine endliche Summe haben.

Aus dieser Bedingung folgt nämlich (§. 53, IV), dass $u_{m+r} < \alpha^r u_m$, wo m gross und $\alpha < 1$. Demnach ist

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots < u_1 + u_2 + \ldots + u_m + u_m [\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots].$$

Aber (§. 6, II): $\alpha + \alpha^2 + \ldots = \frac{\alpha}{1-\alpha}$, so dass also die Summe der unendlichen Reihe (d) kleiner als $u_1 + \ldots + u_m + \frac{\alpha u_m}{1-\alpha}$, also jedenfalls nicht unendlich ist. — Dabei denken wir uns die sämmtlichen Glieder der Reihe positiv, was jedenfalls der ungünstigste Fall ist.

Sind aber alle Glieder der Reihe (d) positiv, und ist die genannte Bedingung erfüllt, so muss die Summe nothwendig eine endliche und bestimmte seyn. — Unendlich ist sie nämlich nicht; es könnte also nur der Fall eintreten, dass man, je nachdem man die Reihe schliesst, verschiedene endliche Werthe als Summen erhielte. Da aber bei dem fortwährenden Zufügen von positiven Gliedern die Summe immer wächst, so kann ein solches Schwanken unmöglich stattfinden. Demnach hat (d) eine bestimmte Summe, die einzig ist. Aber auch in dem Falle, da einzelne Glieder negativ, andere positiv sind, ergibt sich Dasselbe. Nimmt man nämlich die positiven allein, und eben so die negativen Glieder, so sind beide Reihen für sich so beschaffen, dass sie der Bedingung $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ genügen,* wie man leicht sieht; also haben beide bestimmte Summen, mithin auch ihre Differenz.

Unendliche Reihen, welche bestimmte Summen haben, heissen konvergent (§. 57), und es ist die oben gegebene Bedingung also die, wornach sich die Konvergenz entscheiden lässt. (Siehe auch §. 164, III u. V).

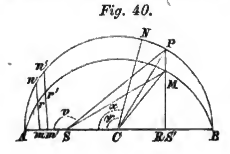
Als Beispiele der Anwendung wollen wir die nachstehenden wählen.

§. 61.

Das Kepler'sche Problem.

I. Die Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem Brennpunkte S (Fig. 40) sich die Sonne befindet. Sey AB die grosse Axe der Ellipse $= 2a$, S und S' ihre Brennpunkte, $CS = CS' = e$, wenn C der Mittelpunkt. Alsdann ist A das Perihelium (Sonnennähe), B das Aphelium (Sonnenferne). Der Planet selbst bewegt sich ungleichförmig um die Sonne, schneller in der Nähe des Periheliums, langsamer in der des Apheliums. Immerhin ist die Bewegung jedoch so, dass er die Hälfte von A bis B in derselben Zeit zurücklegt als die zweite. Um nun die hieher

Fig. 40.



* In der ursprünglichen Reihe ist ja $\frac{u_{n+r}}{u_n}$ auch < 1.

Digitized by Google

gehörigen Bestimmungen leichter durchführen zu können, denkt man sich einen (eingebildeten) Planeten, der mit dem wahren in demselben Augenblicke von A ausgeht, und in derselben Zeit nach B gelangt, als letzterer, jedoch mit gleichförmiger Geschwindigkeit den über AB beschriebenen Halbkreis durchläuft. Gesetzt nun, der wahre Planet sey in M, der scheinbare in N; man ziehe MR senkrecht auf AB, welche Linie den Kreis in P treffe; man ziehe ferner CM, CP, CN, SM, SP, so ist der Winkel $ACN = \psi$ die mittlere Anomalie, $ACP = x$ die exzentrische Anomalie, $ASM = v$ die wahre Anomalie, während $SM = r$ der Fahrstrahl ist. Kennt man v und r, so kennt man offenbar die Lage des Planeten vollständig. Sey nun τ die Umlaufszeit des Planeten; t die Zeit, welche verfliesst bis er in M ist, so ist auch τ die Umlaufszeit des eingebildeten Planeten und man hat also

$$\frac{t}{\tau} = \frac{\psi}{2\pi}, \quad \psi = \frac{2\pi t}{\tau},$$

wodurch ψ bekannt ist.

Nun lässt sich ganz elementar beweisen, dass die Fläche des elliptischen Ausschnitts ARM zu der des Kreisausschnitts APR sich verhält, wie die kleine Axe der Ellipse zur grossen, d. h. wie $\sqrt{a^2-e^2}$ zu a. * Ferner verhalten sich die Dreiecke RSM und RSP wie RM zu RP, d. h. wie $\sqrt{a^2-e^2} : a$, also auch ASM : ASP $= \sqrt{a^2-e^2} : a$.

Nach einem Gesetze der Bewegung muss die vom Fahrstrahl beschriebene Fläche der Zeit proportional seyn, d. h. da $a\sqrt{a^2-e^2}\,\pi$ die Fläche der Ellipse ist:

$$ASM : a\sqrt{a^2-e^2}\,\pi = t : \tau, \quad ASM = a\sqrt{a^2-e^2}\,\pi\frac{t}{\tau},$$

und da auch

$$ACN : a^2\pi = t : \tau, \quad ACN = a^2\pi\frac{t}{\tau},$$

so folgt

$$ASM : ACN = \sqrt{a^2-e^2} : a,$$

und da weiter

$$ASM : ASP = \sqrt{a^2-e^2} : a,$$

so ist

ACN = ASP, mithin da ACN = ACP − NCP, ASP = ACP − SCP, ist auch NCP = SCP. (a)

Ferner ist

$$NCP = \tfrac{1}{2}NP \cdot CN = \tfrac{1}{2}a(x-\psi)a = \tfrac{1}{2}a^2(x-\psi), \quad SCP = \tfrac{1}{2}SC \cdot PR = \tfrac{1}{2}e\,a\sin(180^0 - x) = \tfrac{1}{2}a\,e\sin x,$$

so dass aus (a) folgt:

$$a(x-\psi) = e\sin x, \quad x = \psi + \frac{e}{a}\sin x. \qquad \text{(b)}$$

Aus dieser Gleichung hat man x durch ψ zu finden. Kennt man dann x, so ergeben sich v und r. Es ist nämlich

---

* Sind m r, m′ r′ zwei unendlich nahe Ordinaten der Ellipse; m n, m′ n′ des Kreises, so muss (§. 20, II) m m′ r′ r sowohl als m m′ n′ n als Rechteck betrachtet werden. Die Flächen verhalten sich dann wie m r zu m n und da diese sich wie $\sqrt{a^2-e^2}$ zu a verhalten, so verhalten sich auch die Flächen eben so. Durch Summirung ähnlicher Elemente entstehen die genannten Ausschnitte, so dass der Satz bewiesen ist. (Vergl. §. 46, II.)

Digitized by Google

$CR = -a\cos x$, $SR = e - a\cos x$, $PR = a\sin x$, $MR:PR = \sqrt{a^2-e^2}:a$, $MR = \frac{a\sin x . \sqrt{a^2-e^2}}{a}$
$= \sqrt{a^2-e^2}\sin x$,

also

$r^2 = (e - a\cos x)^2 + (a^2-e^2)\sin^2 x = a^2 - 2ae\cos x + e^2\cos^2 x = (a - e\cos x)^2$, $r = a - e\cos x$.

Dann

$$\sin v = \frac{MR}{SM} = \frac{\sqrt{a^2-e^2}\sin x}{a - e\cos x},\quad \cos v = -\frac{SR}{SM} = \frac{a\cos x - e}{a - e\cos x},\quad \frac{\sin v}{1-\cos v}$$
$$= \frac{\sqrt{a^2-e^2}}{a-e}\,\frac{\sin x}{1-\cos x},$$

d. h.

$$tg\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{a+e}{a-e}}\,tg\tfrac{1}{2}x.$$

Die Gleichung (b) gehört nun zu den in §. 60 gelösten. In der dortigen Gleichung (25) ist $a = \psi$, $\varphi(x) = \frac{e}{a}\sin x$, so dass die Summe von

$$\psi + \frac{e}{a}\sin\psi + \frac{1}{1.2}\frac{e^2}{a^2}\frac{\partial \sin^2\psi}{\partial\psi} + \frac{1}{1.2.3}\frac{e^3}{a^3}\frac{\partial^2 \sin^3\psi}{\partial\psi^2} + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{e^4}{a^4}\frac{\partial^3 \sin^4\psi}{\partial\psi^3} + \ldots \quad (c)$$

den betreffenden Werth von x liefert.

Die Bedingungen sind: $\sin x$ nicht Null von $x = \psi$ bis zu dem betreffenden Werthe; dazu gehört, dass 0 oder 180° nicht zwischen diesen Werthen liegt. Da für $\psi = 0$ auch $x = 0$, für $\psi = 180°$ auch $x = 180°$, so werden wir uns also auf ψ zwischen 0 und 180°, was genügt, einschränken. — Ferner darf nicht $\frac{e}{a}\sin x - (x-\psi)\frac{e}{a}\cos x = 0$ seyn, d. h. nicht $tg\, x = x - \psi$. Diess ist ebenfalls nicht möglich, da sonst wegen (b) $\frac{e}{a}\sin x = tg\, x$, also $\cos x = \frac{a}{e}$ wäre, was wegen $\frac{a}{e} > 1$ nicht angeht.

Beachtet man diese Bedingungen weiter nicht, berechnet vielmehr die Summe der Reihe (c), so kann man endgiltig immer leicht sich überzeugen, ob der so gefundene Werth der (b) genügt.

II. Was die in (c) vorhandenen Differentialquotienten betrifft, so ist:

$$\frac{\partial \sin^n\psi}{\partial\psi} = n\sin^{n-1}\psi\cos\psi,$$

$$\frac{\partial^2 \sin^n\psi}{\partial\psi^2} = n(n-1)\sin^{n-2}\psi\cos^2\psi - n\sin^n\psi,$$

$$\frac{\partial^3 \sin^n\psi}{\partial\psi^3} = n(n-1)(n-2)\sin^{n-3}\psi\cos^3\psi - n(3n-2)\sin^{n-1}\psi\cos\psi,$$

$$\frac{\partial^4 \sin^n\psi}{\partial\psi^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)\sin^{n-4}\psi\cos^4\psi - 2n(n-1)(3n-4)\sin^{n-2}\psi\cos^2\psi$$
$$+ n(3n-2)\sin^n\psi, \text{ u. s. w., so dass}$$

$\frac{\partial \sin^2\psi}{\partial\psi} = 2\sin\psi\cos\psi$, $\frac{\partial^2 \sin^3\psi}{\partial\psi^2} = 6\sin\psi\cos^2\psi - 3\sin^3\psi$, $\frac{\partial^3 \sin^4\psi}{\partial\psi^3} = 24\sin\psi\cos^3\psi - 40\sin^3\psi \times \cos\psi$, $\frac{\partial^4 \sin^5\psi}{\partial\psi^4} = 120\sin\psi\cos^4\psi - 440\sin^3\psi\cos^2\psi + 65\sin^5\psi, \ldots\ldots$, mithin endlich

Digitized by Google

$$x = \psi + \frac{e}{a} \sin\psi + \left(\frac{e}{a}\right)^2 \sin\psi\cos\psi + \left(\frac{e}{a}\right)^3 (\sin\psi\cos^2\psi - \frac{1}{2}\sin^3\psi) + \left(\frac{e}{a}\right)^4 (\sin\psi\cos^3\psi$$
$$- \frac{5}{3}\sin^3\psi\cos\psi) + \left(\frac{e}{a}\right)^5 (\sin\psi\cos^4\psi - \frac{11}{3}\sin^3\psi\cos^2\psi + \frac{13}{24}\sin^5\psi) + \ldots\ldots$$

III. Man kann $\frac{\partial^{n-1}\sin^n\psi}{\partial\psi^{n-1}}$ auch in anderer Weise ausdrücken. Gemäss §. 54, V ist nämlich $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, also auch $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$, woraus $2\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i}$ $= i(e^{-ix} - e^{ix})$, da $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$; und $2\cos x = e^{ix} + e^{-ix}$. Daraus folgt für ein positives ganzes m:

$$(2\sin x)^{2m} = (e^{-ix} - e^{ix})^{2m} i^{2m} = (i^2)^m \Big(e^{-2mix} - \frac{2m}{1} e^{-(2m-2)ix}$$
$$+ \frac{2m(2m-1)}{1.2} e^{-(2m-4)ix} - \ldots + e^{2mix}\Big) \text{ (§. 5).}$$

Aber $(i^2)^m = (-1)^m$; ferner sind in der Reihe die Koeffizienten von Anfang und Ende her gleich: also ist diese Reihe

$$= e^{2mix} + e^{-2mix} - \frac{2m}{1}[e^{(2m-2)ix} + e^{-(2m-2)ix}] + \frac{2m(2m-1)}{1.2}[e^{(2m-4)ix} + e^{-(2m-4)ix}]$$
$$- \ldots \pm \frac{2m(2m-1)\ldots(m+1)}{1.2\ldots m} = 2\cos 2mx - 2\frac{2m}{1}\cos(2m-2)x + 2\frac{2m(2m-1)}{1.2}\cos(2m-4)x$$
$$- \ldots \mp 2\frac{2m(2m-1)\ldots(m+2)}{1.2\ldots(m-1)}\cos 2x \pm \frac{2m(2m-1)\ldots(m+1)}{1.2\ldots m},$$

so dass also

$$(-1)^m 2^{2m-1}\sin^{2m}x = \cos 2mx - \frac{2m}{1}\cos(2m-2)x + \ldots \mp \frac{2m(2m-1)\ldots(m+2)}{1.2\ldots m-1}\cos 2x$$
$$\pm \frac{1}{2}\,\frac{2m(2m-1)\ldots(m+1)}{1.2\ldots m}.$$

Ferner ist

$$(2\sin x)^{2m+1} = (i)^{2m+1}(e^{-ix} - e^{+ix})^{2m+1} = (i)^{2m+1}[e^{-(2m+1)ix} - \frac{2m+1}{1}e^{-(2m-1)ix} +$$
$$\ldots - e^{(2m+1)ix}] = (i)^{2m} i\,[(e^{-(2m+1)ix} - e^{(2m+1)ix}) - \frac{2m+1}{1}(e^{-(2m-1)ix} - e^{(2m-1)ix}) +$$
$$\ldots \pm \frac{(2m+1)2m\ldots m+2}{1.2\ldots m}(e^{-ix} - e^{ix})],$$ d. h. da $i[e^{-aix} - e^{aix}] = 2\sin ax$, $(i)^{2m} = (-1)^m$:

$$(-1)^m 2^{2m}\sin^{2m+1}x = \sin(2m+1)x - \frac{2m+1}{1}\sin(2m-1)x + \frac{(2m+1)2m}{1.2}\sin(2m-3)x$$
$$- \ldots\ldots \pm \frac{(2m+1)2m\ldots(m+2)}{1.2\ldots m}\sin x.$$

Daraus folgt nun nach §. 18:

$$(-1)^m 2^{2m-1}\frac{\partial^{2m-1}\sin^{2m}x}{\partial x^{2m-1}} = (2m)^{2m-1}\cos[2mx + \frac{2m-1}{2}\pi] - \frac{2m}{1}(2m-2)^{2m-1} \times$$
$$\cos[(2m-2)x + \frac{2m-1}{2}\pi] + \ldots \pm \frac{2m(2m-1)\ldots(m+2)}{1.2\ldots m-1}2^{2m-1}\cos[2x + \frac{2m-1}{2}\pi],$$

$$(-1)^m 2^{2m}\frac{\partial^{2m}\sin^{2m+1}x}{\partial x^{2m}} = (2m+1)^{2m}\sin[(2m+1)x + \frac{2m}{2}\pi] - \frac{2m+1}{1}(2m-1)^{2m} \times$$

Digitized by Google

$$CR = -a\cos x,\ SR = e - a\cos x,\ PR = a\sin x,\ MR:PR = \sqrt{a^2 - e^2}:a,\ MR = \frac{a\sin x.\sqrt{a^2-e^2}}{a} = \sqrt{a^2 - e^2}\sin x,$$

also

$$r^2 = (e - a\cos x)^2 + (a^2 - e^2)\sin^2 x = a^2 - 2ae\cos x + e^2\cos^2 x = (a - e\cos x)^2,\ r = a - e\cos x.$$

Dann

$$\sin v = \frac{MR}{SM} = \frac{\sqrt{a^2 - e^2}\sin x}{a - e\cos x},\quad \cos v = -\frac{SR}{SM} = \frac{a\cos x - e}{a - e\cos x},\quad \frac{\sin v}{1 + \cos v} = \frac{\sqrt{a^2 - e^2}}{a - e}\,\frac{\sin x}{1 + \cos x},$$

d. h.

$$tg\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{a+e}{a-e}}\,tg\tfrac{1}{2}x.$$

Die Gleichung (b) gehört nun zu den in §. 60 gelösten. In der dortigen Gleichung (25) ist $a = \psi$, $\varphi(x) = \frac{e}{a}\sin x$, so dass die Summe von

$$\psi + \frac{e}{a}\sin\psi + \frac{1}{1.2}\frac{e^2}{a^2}\frac{\partial \sin^2\psi}{\partial\psi} + \frac{1}{1.2.3}\frac{e^3}{a^3}\frac{\partial^2 \sin^3\psi}{\partial\psi^2} + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{e^4}{a^4}\frac{\partial^3 \sin^4\psi}{\partial\psi^3} + \ldots. \quad (c)$$

den betreffenden Werth von x liefert.

Die Bedingungen sind: $\sin x$ nicht Null von $x = \psi$ bis zu dem betreffenden Werthe; dazu gehört, dass 0 oder 180° nicht zwischen diesen Werthen liegt. Da für $\psi = 0$ auch $x = 0$, für $\psi = 180°$ auch $x = 180°$, so werden wir uns also auf ψ zwischen 0 und 180°, was genügt, einschränken. — Ferner darf nicht $\frac{e}{a}\sin x - (x - \psi)\frac{e}{a}\cos x = 0$ seyn, d. h. nicht $tg\, x = x - \psi$. Diess ist ebenfalls nicht möglich, da sonst wegen (b) $\frac{e}{a}\sin x = tg\, x$, also $\cos x = \frac{a}{e}$ wäre, was wegen $\frac{a}{e} > 1$ nicht angeht.

Beachtet man diese Bedingungen weiter nicht, berechnet vielmehr die Summe der Reihe (c), so kann man endgiltig immer leicht sich überzeugen, ob der so gefundene Werth der (b) genügt.

II. Was die in (c) vorhandenen Differentialquotienten betrifft, so ist:

$$\frac{\partial \sin^n\psi}{\partial\psi} = n\sin^{n-1}\psi\cos\psi,$$

$$\frac{\partial^2 \sin^n\psi}{\partial\psi^2} = n(n-1)\sin^{n-2}\psi\cos^2\psi - n\sin^n\psi,$$

$$\frac{\partial^3 \sin^n\psi}{\partial\psi^3} = n(n-1)(n-2)\sin^{n-3}\psi\cos^3\psi - n(3n-2)\sin^{n-1}\psi\cos\psi,$$

$$\frac{\partial^4 \sin^n\psi}{\partial\psi^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)\sin^{n-4}\psi\cos^4\psi - 2n(n-1)(3n-4)\sin^{n-2}\psi\cos^2\psi + n(3n-2)\sin^n\psi,\ \text{u. s. w., so dass}$$

$$\frac{\partial \sin^2\psi}{\partial\psi} = 2\sin\psi\cos\psi,\quad \frac{\partial^2 \sin^3\psi}{\partial\psi^2} = 6\sin\psi\cos^2\psi - 3\sin^3\psi,\quad \frac{\partial^3 \sin^4\psi}{\partial\psi^3} = 24\sin\psi\cos^3\psi - 40\sin^3\psi \times \cos\psi,$$

$$\frac{\partial^4 \sin^5\psi}{\partial\psi^4} = 120\sin\psi\cos^4\psi - 440\sin^3\psi\cos^2\psi + 65\sin^5\psi, \ldots\ldots,$$ mithin endlich

Digitized by Google

$$x = \psi + \frac{e}{a}\sin\psi + \left(\frac{e}{a}\right)^2 \sin\psi\cos\psi + \left(\frac{e}{a}\right)^3 (\sin\psi\cos^2\psi - \frac{1}{2}\sin^3\psi) + \left(\frac{e}{a}\right)^4 (\sin\psi\cos^3\psi$$
$$- \frac{5}{3}\sin^3\psi\cos\psi) + \left(\frac{e}{a}\right)^5 (\sin\psi\cos^4\psi - \frac{11}{3}\sin^3\psi\cos^2\psi + \frac{13}{24}\sin^5\psi) + \ldots..$$

III. Man kann $\frac{\partial^{n-1}\sin^n\psi}{\partial\psi^{n-1}}$ auch in anderer Weise ausdrücken. Gemäss §. 54, V ist nämlich $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, also auch $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$, woraus $2\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i}$ $= i(e^{-ix} - e^{ix})$, da $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$; und $2\cos x = e^{ix} + e^{-ix}$. Daraus folgt für ein positives ganzes m:

$$(2\sin x)^{2m} = (e^{-ix} - e^{ix})^{2m} i^{2m} = (i^2)^m \Big(e^{-2mix} - \frac{2m}{1} e^{-(2m-2)ix}$$
$$+ \frac{2m(2m-1)}{1.2} e^{-(2m-4)ix} - \ldots + e^{2mix}\Big) \text{ (§. 5).}$$

Aber $(i^2)^m = (-1)^m$; ferner sind in der Reihe die Koeffizienten von Anfang und Ende her gleich: also ist diese Reihe

$$= e^{2mix} + e^{-2mix} - \frac{2m}{1}[e^{(2m-2)ix} + e^{-(2m-2)ix}] + \frac{2m(2m-1)}{1.2}[e^{(2m-4)ix} + e^{-(2m-4)ix}]$$
$$- \ldots \pm \frac{2m(2m-1)\ldots(m+1)}{1.2\ldots m} = 2\cos 2mx - 2\frac{2m}{1}\cos(2m-2)x + 2\frac{2m(2m-1)}{1.2}\cos(2m-4)x$$
$$- \ldots \mp 2\frac{2m(2m-1)\ldots(m+2)}{1.2\ldots(m-1)}\cos 2x \pm \frac{2m(2m-1)\ldots(m+1)}{1.2\ldots m},$$

so dass also

$$(-1)^m 2^{2m-1}\sin^{2m} x = \cos 2mx - \frac{2m}{1}\cos(2m-2)x + \ldots \mp \frac{2m(2m-1)\ldots(m+2)}{1.2\ldots m-1}\cos 2x$$
$$\pm \frac{1}{2}\frac{2m(2m-1)\ldots(m+1)}{1.2\ldots m}.$$

Ferner ist

$$(2\sin x)^{2m+1} = (i)^{2m+1}(e^{-ix} - e^{+ix})^{2m+1} = (i)^{2m+1}[e^{-(2m+1)ix} - \frac{2m+1}{1}e^{-(2m-1)ix} +$$
$$\ldots - e^{(2m+1)ix}] = (i)^{2m} i[(e^{-(2m+1)ix} - e^{(2m+1)ix}) - \frac{2m+1}{1}(e^{-(2m-1)ix} - e^{(2m-1)ix}) +$$
$$\ldots \pm \frac{(2m+1)2m\ldots m+2}{1.2\ldots m}(e^{-ix} - e^{ix})],$$ d. h. da $i[e^{-aix} - e^{aix}] = 2\sin ax$, $(i)^{2m} = (-1)^m$:

$$(-1)^m 2^{2m}\sin^{2m+1} x = \sin(2m+1)x - \frac{2m+1}{1}\sin(2m-1)x + \frac{(2m+1)2m}{1.2}\sin(2m-3)x$$
$$- \ldots\ldots \pm \frac{(2m+1)2m\ldots(m+2)}{1.2\ldots m}\sin x.$$

Daraus folgt nun nach §. 18:

$$(-1)^m 2^{2m-1}\frac{\partial^{2m-1}\sin^{2m}x}{\partial x^{2m-1}} = (2m)^{2m-1}\cos[2mx + \frac{2m-1}{2}\pi] - \frac{2m}{1}(2m-2)^{2m-1} \times$$
$$\cos[(2m-2)x + \frac{2m-1}{2}\pi] + \ldots \pm \frac{2m(2m-1)\ldots(m+2)}{1.2\ldots m-1}2^{2m-1}\cos[2x + \frac{2m-1}{2}\pi],$$
$$(-1)^m 2^{2m}\frac{\partial^{2m}\sin^{2m+1}x}{\partial x^{2m}} = (2m+1)^{2m}\sin[(2m+1)x + \frac{2m}{2}\pi] - \frac{2m+1}{1}(2m-1)^{2m} \times$$

Digitized by Google

$$\sin[(2m-1)x + \frac{2m}{2}\pi] + \ldots \pm \frac{(2m+1)2m\ldots(m+2)}{1.2\ldots m}\sin[x + \frac{2m}{2}\pi],$$

d. h. da $\cos[\alpha + \frac{2m-1}{2}\pi] = \cos[\alpha + m\pi - \frac{1}{2}\pi] = \cos(\alpha - \frac{1}{2}\pi)\cos m\pi = (-1)^m \sin\alpha$, $\sin(\alpha + \frac{2m}{2}\pi) = \sin(\alpha + m\pi) = \sin\alpha\cos m\pi = (-1)^m \sin\alpha$:

$$2^{2m-1}\frac{\partial^{2m-1}\sin^{2m}x}{\partial x^{2m-1}} = (2m)^{2m-1}\sin 2mx - \frac{2m}{1}(2m-2)^{2m-1}\sin(2m-2)x + \ldots\ldots \pm \frac{2m(2m-1)\ldots(m+2)}{1.2\ldots(m-1)}2^{2m-1}\sin 2x,$$

$$2^{2m}\frac{\partial^{2m}\sin^{2m+1}x}{\partial x^{2m}} = (2m+1)^{2m}\sin(2m+1)x - \frac{2m+1}{1}(2m-1)^{2m}\sin(2m-1)x + \ldots \pm \frac{(2m+1)2m\ldots(m+2)}{1.2\ldots m}1^{2m}\sin x.$$

Hieraus folgt nun:

$$\frac{\partial\sin^2\psi}{\partial\psi} = \sin 2\psi,\ \frac{\partial^2\sin^3\psi}{\partial\psi^2} = \frac{1}{2^2}[3^2\sin 3\psi - 3\sin\psi],\ \frac{\partial^3\sin^4\psi}{\partial\psi^3} = \frac{1}{2^3}[4^3\sin 4\psi - 4.2^3\sin 2\psi],$$

$$\frac{\partial^4\sin^5\psi}{\partial\psi^4} = \frac{1}{2^4}[5^4\sin 5\varphi - 5.3^4\sin 3\psi + 10\sin\psi),\ \frac{\partial^5\sin^6\psi}{\partial\psi^5} = \frac{1}{2^5}[6^5\sin 6\psi - 6.4^5\sin 4\psi + 15.2^5\sin 2\psi],$$

$$\frac{\partial^6\sin^7\psi}{\partial\psi^6} = \frac{1}{2^6}[7^6\sin 7\psi - 7.5^6\sin 5\psi + 21.3^6\sin 3\psi - 35\sin\psi], \ldots$$

woraus auch:

$$x = \psi + \frac{e}{a}\sin\psi + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{a}\right)^2\sin 2\psi + \frac{1}{8}\left(\frac{e}{a}\right)^3(3\sin 3\psi - \sin\psi) + \frac{1}{6}\left(\frac{e}{a}\right)^4(2\sin 4\psi - \sin 2\psi) + \frac{1}{384}\left(\frac{e}{a}\right)^5(125\sin 5\psi - 81\sin 3\psi + 2\sin\psi) + \frac{1}{240}\left(\frac{e}{a}\right)^6[81\sin 6\psi - 64\sin 4\psi + 5\sin 2\psi] + \frac{1}{46080}\left(\frac{e}{a}\right)^7[16807\sin 7\psi - 15625\sin 5\psi + 2187\sin 3\psi - 5\sin\psi] + \ldots$$

Auflösung der Gleichung $x = a + b x^m$.

IV. Man soll die Gleichung

$$x = a + b x^m$$

auflösen. Hier ist $\varphi(x) = b x^m$, $\frac{\partial^{n-1}\varphi(x)^n}{\partial x^{n-1}} = b^n mn(mn-1)\ldots(mn-n+2)x^{mn-n+1}$, also ist die Summe der Reihe

$$a + b a^m + \frac{2m}{2}b^2 a^{2m-1} + \frac{3m(3m-1)}{2.3}b^3 a^{3m-2} + \ldots + \frac{mn(mn-1)\ldots(mn-n+2)}{2.\ldots n}b^n a^{mn-n+1} + \ldots\ldots,$$

falls diese Reihe konvergent ist, die a am nächsten liegende Wurzel jener Gleichung. Ist $b a^m > 0$, so ist diese Wurzel $> a$; ist $b a^m < 0$, so ist sie $< a$. Da $\varphi'(x) = m b x^{m-1}$, also $\varphi(x) - (x-a)\varphi'(x) = a m b x^{m-1} + b x^m - m b x^m = b x^{m-1}[a m - (m-1)x]$, so darf nicht 0 zwischen a und der Wurzel liegen, und auch nicht $\frac{m a}{m-1}$. Was die Konvergenz der Reihe anbelangt, so findet man als Quotienten zweier auf einander folgender Glieder (§. 60, IV)

Digitized by Google

$$\frac{(mn+m)(mn+m-1)\ldots(mn+m-n+1)}{mn(mn-1)\ldots(mn-n+2)(n+1)} b a^{m-1}$$

$$= \frac{(mn+m)\ (mn+m-1)\ldots(mn+2)\ (mn+1)}{(mn-n+m)\ (mn-n+m-1)\ldots(mn-n+2)\ (n+1)} b a^{m-1}$$

$$= \frac{\left(m+\frac{m}{n}\right)\left(m+\frac{m-1}{n}\right)\ldots\left(m+\frac{2}{n}\right)\left(m+\frac{1}{n}\right)}{\left(m-1+\frac{m}{n}\right)\left(m-1+\frac{m-1}{n}\right)\ldots\ldots\left(m-1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)} b a^{m-1},$$

was für $n = \infty$ zu $\frac{m^m}{(m-1)^{m-1}} b a^{m-1}$ wird. Somit muss $\pm \frac{m^m}{(m-1)^{m-1}} b a^{m-1} < 1$ seyn.

V. Für $m = 2$ ist die Reihe

$$a + b a^2 + 2 b^2 a^3 + 5 b^3 a^4 + \ldots + \frac{2n(2n-1)\ldots(n+2)}{2\ldots n} b^n a^{n+1} + \ldots\ldots$$

und es muss $\pm 4ab < 1$ seyn. Dabei darf die Summe dieser Reihe nicht so liegen, dass zwischen ihr und a sich 0 oder 2a befinden kann.

Da hier die Gleichung $x = a + bx^2$ aufzulösen ist, so findet man $x = \frac{1}{2b} \pm \frac{1}{2b}\sqrt{1-4ab}$. Entwickelt man nun nach §. 54, I $\sqrt{1-4ab}$, wo $\pm 4ab < 1$, so ist

$$\sqrt{1-4ab} = 1 - 2ab - 2a^2b^2 - \ldots - \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n+2)} . 4^{n+1} a^{n+1} b^{n+1} - \ldots\ldots,$$

also

$$\frac{1}{2b} - \frac{1}{2b}\sqrt{1-4ab} = a + a^2 b + \ldots\ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n+2)} . 2 . 4^n a^{n+1} b^n + \ldots\ldots;$$

und da

$$\frac{1.3..(2n-1)}{2.4..(2n+2)}.2.4^n = \frac{1.3.5..(2n-1)}{1.2.3..(n+1)} 2^n = \frac{1.2\ldots 2n}{1.2..(n+1).2.4..2n} 2^n = \frac{(n+2)(n+3)..2n}{2\ldots n},$$

so sieht man, dass die durch obige Reihe ausgedrückte Wurzel $= \frac{1}{2b} - \frac{1}{2b}\sqrt{1-4ab}$ ist. Man wird sich nunmehr auch überzeugen, dass alle übrigen Bedingungen erfüllt sind. Sey nämlich:

1) $a > 0$, $b > 0$, also auch $ba^2 > 0$, so ist $1 - 4ab < 1$, also die Wurzel > 0, aber auch $> a$ und $< 2a$. Denn für $x = a$ ist $x < a + bx^2$, für $x = 2a$ aber $a + bx^2 = a + 4a^2b = a(1 + 4ab) < 2a$, mithin $x > a + bx^2$, so dass zwischen a und 2a ein Werth von x liegt, für den $x = a + bx^2$, und dieser eben ist die betreffende Wurzel.

2) $a < 0$, $b > 0$, also $ba^2 > 0$, so ist $1 - 4ab$ positiv und > 1, also die Wurzel < 0, aber $> a$. Denn für $x = 0$ ist $x > a + bx^2$, für $x = a$ ist $a + bx^2 = a + ba^2 > a$, also ist $x < a + bx^2$, so dass eine Wurzel zwischen 0 und a liegt.

3) $a > 0$, $b < 0$, also $ba^2 < 0$; $1 - 4ab > 1$, die Wurzel positiv, aber $< a$ und > 0. Denn für $x = a : x > a + bx^2$; für $x = 0 : x < a + bx^2$, woraus die Behauptung folgt.

4) $a < 0$, $b < 0$, also $ba^2 < 0$; $1 - 4ab < 1$, also die Wurzel negativ, jedoch $< a$ und $> 2a$. Denn für $x = a : x > a + bx^2$; für $x = 2a : a + bx^2 = a(1 + 4ab) > 2a$, also $x < a + bx^2$, woraus wieder unsere Behauptung folgt.

Digitized by Google

§. 62.

Auflösung der Gleichung $f(x) = k$.

I. Setzt man in der Gleichung (24') des §. 60 $\varphi(x) = k\frac{x-a}{f(x)}$, wo k eine beliebige Konstante, so hat man, da jetzt $\frac{x-a}{\varphi(x)} = \frac{f(x)}{k}$, $\varphi(x) - (x-a)\varphi'(x) = \frac{k(x-a)^2}{f(x)^2} f'(x)$, folgenden Satz:

Ist die unendliche Reihe

$$a + k\left[\frac{x-a}{f(x)}\right]_a + \frac{k^2}{1.2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-a}{f(x)}\right)^2\right]_a + \frac{k^3}{1.2.3}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x-a}{f(x)}\right)^3\right]_a + \ldots\ldots \quad (26)$$

konvergent und α ihre Summe, so ist α eine einfache Wurzel von $f(x) = k$, vorausgesetzt, dass $\frac{x-a}{f(x)}$ nicht Null oder ∞ ist von $x = a$ bis $x = \alpha$, und $f'(x)$ nicht sein Zeichen wechselt innerhalb derselben Gränzen. — Zwischen a und α liegt dann keine andere Wurzel. [$f(a)$ muss Null seyn, sonst wäre $\frac{x-a}{f(x)}$ Null für $x = a$; $f'(a)$ aber darf nicht Null seyn].

II. Setzt man die (26) unter die Form

$$\alpha = a + A_1 k + A_2 k^2 + A_3 k^3 + \ldots\ldots\ldots; \quad (a)$$

setzt weiter in der Gleichung (22') des §. 59 $\psi(x) = f(x)$, $F(x) = x$, so hat man, verglichen mit (26), auch:

$$x = a + A_1 f(x) + A_2 f(x)^2 + \ldots. + A_n f(x)^n + \ldots., \quad (b)$$

woraus wir nun $A_1, A_2, \ldots,$ bestimmen wollen.

Zunächst ist hieraus

$$\frac{x-a}{f(x)} = A_1 + A_2 f(x) + \ldots.;$$

da $f(a) = 0$, so gibt diese Gleichung für $x = a$ (§. 22, I):

$$\left[\frac{x-a}{f(x)}\right]_a = \frac{1}{f'(a)} = A_1.$$

Sodann ist

$$\frac{x-a-A_1 f(x)}{f(x)^2} = A_2 + A_3 f(x) + \ldots.,$$

woraus für $x = a$:

$$A_2 = \left(\frac{x-a-A_1 f(x)}{f(x)^2}\right)_a.$$

Da die Grösse erster Seite einen bestimmten Werth hat, so ist es auch so mit der auf der zweiten Seite; da aber der Nenner für $x=a$ zu Null wird, so muss es auch der Zähler seyn, * wie man auch unmittelbar sieht. Aber

* Vergleiche die Note zu §. 30, S. 118.

Digitized by Google

$\frac{\partial f(x)^2}{\partial x}=2f(x)f'(x)$ ist noch 0 für $x=a$, also muss auch $\frac{\partial[x-a-A_1 f(x)]}{\partial x}=1-A_1 f'(x)$ es seyn; dann ist $\frac{\partial^2 f(x)^2}{\partial x^2}=2f'(x)^2+2f(x)f''(x)$, was für $x=a$ zu $2f'(a)^2$ wird; eben so $\frac{\partial^2[x-a-A_1 f(x)]}{\partial x^2}=-A_1 f''(x)$, so dass also

$$A_2=-\frac{A_1 f''(a)}{2f'(a)^2}.$$

Allgemein ist nun

$$\frac{x-a-A_1 f(x)-A_2 f(x)^2-\ldots-A_{n-1}f(x)^{n-1}}{f(x)^n}=A_n+A_{n+1}f(x)+\ldots,$$

woraus für $x=a$:

$$A_n=\left[\frac{x-a-A_1 f(x)-A_2 f(x)^2-\ldots A_{n-1}f(x)^{n-1}}{f(x)^n}\right]_a.$$

Nun aber findet sich:

$\frac{\partial f(x)^m}{\partial x}=m f(x)^{m-1}f'(x)$; $\frac{\partial^2 f(x)^m}{\partial x^2}=m(m-1)f(x)^{m-2}f'(x)^2+m f(x)^{m-1}f''(x)$; $\frac{\partial^3 f(x)^m}{\partial x^3}$ $=m(m-1)(m-2)f(x)^{m-3}f'(x)^3+3m(m-1)f(x)^{m-2}f'(x)f''(x)+m f(x)^{m-1}f^3(x)$; $\frac{\partial^4 f(x)^m}{\partial x^4}=m(m-1)(m-2)(m-3)f(x)^{m-4}f'(x)^4+6m(m-1)(m-2)f(x)^{m-3}f'(x)^2 f''(x)$ $+3m(m-1)f(x)^{m-2}f''(x)^2+4m(m-1)f(x)^{m-2}f'(x)f^3(x)+m f(x)^{m-1}f^4(x)$; $\frac{\partial^5 f(x)^m}{\partial x^5}=m(m-1)(m-2)m-3)(m-4)f(x)^{m-5}f'(x)^5+10m(m-1)m-2)(m-3)$ $f(x)^{m-4}f'(x)^3 f''(x)+15m(m-1)(m-2)f(x)^{m-3}f'(x)f''(x)^2+10m(m-1)(m-2)f(x)^{m-3}$ $f'(x)^2 f^3(x)+10m(m-1)f(x)^{m-2}f''(x)f^3(x)+5m(m-1)f(x)^{m-2}f'(x)f^4(x)+m f(x)^{m-1}$ $f^5(x)$; ....

Daraus ist ersichtlich, dass $\frac{\partial^n f(x)^m}{\partial x^n}$ mit dem Gliede $m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)f(x)^{m-n}f'(x)^n$ anfängt, während alle anderen Glieder höhere Potenzen von $f(x)$ enthalten. Demnach ist

$$\frac{\partial^n f(x)^n}{\partial x^n}=n(n-1)\ldots 1 f'(x)^n+P,$$

wo P jedenfalls den Faktor $f(x)$ enthält, so dass für $x=a$:

$$\frac{\partial^n f(x)^n}{\partial x^n}=n(n-1)\ldots 1 f'(a)^n$$

ist. Wie ferner leicht ersichtlich, verschwinden alle Differentialquotienten von $f(x)^n$ bis zum n^{ten} für $x=a$, so dass

$$A_n=\frac{\left[-A_1\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}-A_2\frac{\partial^n f(x)^2}{\partial x^n}-\ldots-A_{n-1}\frac{\partial^n f(x)^{n-1}}{\partial x^n}\right]_a}{1.2.3\ldots n f'(a)^n},\ n>1.$$

Aus den obigen Entwicklungen ergibt sich aber leicht für $x=a$:

Digitized by Google

$$\frac{\partial^3 f(x)^3}{\partial x^3} = 6 f'(a) f''(a),\ \frac{\partial^4 f(x)^2}{\partial x^4} = 6 f''(a)^2 + 8 f'(a) f^3(a),\ \frac{\partial^5 f(x)^2}{\partial x^5} = 20 f''(a) f^3(a) + 10 f'(a) f^4(a),$$

$$\frac{\partial^4 f(x)^3}{\partial x^4} = 36 f'(a)^2 f''(a),\ \frac{\partial^5 f(x)^3}{\partial x^5} = 90 f'(a) f''(a)^2 + 60 f'(a)^2 f^3(a), \ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial^5 f(x)^4}{\partial x^5} = 240 f'(a)^3 f''(a), \ldots\ldots$$

Demnach ist:

$$\left.\begin{array}{l}
A_1 = \frac{1}{f'(a)};\ A_2 = -\frac{A_1 f''(a)}{1.2 f'(a)^2};\ A_3 = \frac{-A_1 f^3(a) - 6 A_2 f'(a) f''(a)}{1.2.3 f'(a)^3}, \\
A_4 = \frac{-A_1 f^4(a) - 2 A_2 [3 f''(a)^2 + 4 f'(a) f^3(a)] - 36 A_3 f'(a)^2 f''(a)}{1.2.3.4 f'(a)^4}, \\
A_5 = \frac{-A_1 f^5(a) - 10 A_2 [2 f''(a) f^3(a) + f'(a) f^4(a)] - 30 A_3 f'(a) [3 f''(a)^2 + 2 f'(a) f^3(a)] - 240 A_4 f'(a)^3 f''(a)}{1.2.3.4.5 f'(a)^5}
\end{array}\right\} \quad (c)$$

u. s. w.

Auflösung der Gleichung $\varphi(x) = 0$.

III. Will man nun mittelst dieses Verfahrens eine Wurzel einer vorgelegten Gleichung $\varphi(x) = 0$ berechnen, so muss man bereits einen angenäherten Werth a derselben kennen, so dass $\varphi(a)$ nahe an Null ist. Setzt man dann die Gleichung unter die Form $\varphi(x) - \varphi(a) = -\varphi(a)$ und in (26) $f(x) = \varphi(x) - \varphi(a)$, $k = -\varphi(a)$, so ist $f(a) = 0$, und $f'(a) = \varphi'(a)$, also $\left(\frac{x-a}{f(x)}\right)_a = \frac{1}{\varphi'(a)}$ nicht Null. Endlich wird man immer annehmen dürfen, es sey $\varphi'(x) [= f'(x)]$ nicht Null von $x = a$ bis zur gesuchten Wurzel, da letztere nahe an a liegt und man immer a so finden kann, dass nicht $\varphi'(a) = 0$. Da nun allgemein $f^n(x) = \varphi^n(x)$, so wird man also hiernach die Grössen $A_1, A_2, \ldots$ mittelst (c) herstellen und dann gibt

$$x = a - A_1 \varphi(a) + A_2 \varphi(a)^2 - A_3 \varphi(a)^3 + \ldots \quad (27)$$

die gesuchte Wurzel. Die Konvergenz dieser Reihe wird sich im Allgemeinen nur schwer ermitteln lassen; man wird daher getrost einige Glieder derselben berechnen und aus ihrem (etwaigen raschen) Abnehmen schliessen, dieselbe konvergire rasch, somit nur die etlichen ersten Glieder gelten lassen und schliesslich sehen, in wie weit das gefundene Resultat wirklich als Wurzel der Gleichung angesehen werden kann.

IV. Einige Beispiele mögen das Verfahren erläutern:

1. Die Gleichung $x^3 - 60x^2 + 999x - 3734 = 0$ hat eine Wurzel nahe an 21. Für $x = 21$ ist $\varphi(x) = 46$, also schreibe man die Gleichung auch so:

$$x^3 - 60x^2 + 999x - 3780 = -46,$$

und hat $f(x) = x^3 - 60x^2 + 999x - 3780$, $k = -\varphi(a) = -46$, $a = 21$, $f'(a) = -198$, $f''(a) = 6$, $f^3(a) = 6$, $f^4(a) = 0$; (§. 30, I);

$$A_1 = -\frac{1}{198},\ A_2 = \frac{3}{198^3},\ A_3 = -\frac{216}{198^5},\ A_4 = \frac{3205}{198^7},\ A_5 = -\frac{158738}{198^9}, \ldots$$

Digitized by Google

also

$$x = 21 + \frac{46}{198} + \frac{3.46^2}{198^3} + \frac{216.46^3}{198^5} + \frac{3205.46^4}{198^7} + \frac{158738.46^5}{198^9} + \ldots.$$
$$= 21 + 0{\cdot}232323 + 0{\cdot}000817 + 0{\cdot}000069 + 0{\cdot}000001 + 0{\cdot}000000$$
$$= 21{\cdot}233210,$$

welcher Werth auf fünf Dezimalstellen richtig ist. (Vergl. „Grundzüge" S. 178.)

2. Man soll die Gleichung $x = 2 \sin x$ auflösen. Für $x = 1{\cdot}8849556$ ($= 108^0$) ist

$$x - 2 \sin x = -0{\cdot}0171574,$$

so dass man die Gleichung schreiben wird: $x - 2 \sin x + 0{\cdot}0171574 = 0{\cdot}0171574$. Dann ist

$f(x) = x - 2 \sin x + 0{\cdot}0171574, -\varphi(a) = 0{\cdot}0171574, a = 1{\cdot}8849556 (= 108^0), f'(a) = 1{\cdot}618034,$
$f''(a) = 1{\cdot}902113, \; f^3(a) = -0{\cdot}618034, \; f^4(a) = -1{\cdot}902113, \ldots.$

$$A_1 = \frac{1}{1{\cdot}618034}, \quad A_2 = -\frac{0{\cdot}951056}{1{\cdot}618034^3}, \quad A_3 = \frac{1{\cdot}975678}{1{\cdot}618034^5},$$

$$x = 1{\cdot}8849556 + \frac{0{\cdot}0171574}{1{\cdot}618034} - \frac{0{\cdot}951056.0{\cdot}0171574^2}{1{\cdot}618034^3} + \frac{1{\cdot}975678.0{\cdot}0171574^3}{1{\cdot}618034^5}$$
$$= 1{\cdot}8849556 + 0{\cdot}0106038 - 0{\cdot}0000661 + 0{\cdot}0000009 = 1{\cdot}8954942,$$

oder wenn man diese Grösse in Winkelmaass ausdrückt: $x = 108^0\,36'\,13{\cdot}7''$ (vergl. mein „Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie" S. 100).

§. 63.

Das Fourier'sche Näherungsverfahren bei Auflösung von Gleichungen.

Das in §. 62 mitgetheilte Verfahren, die reellen Wurzeln einer Gleichung näherungsweise zu bestimmen, wird in vielen Fällen ausreichen. Wir wollen jedoch bei diesem Anlasse eine zweite Methode solcher Auflösungen mittheilen.

I. Angenommen, die Gleichung $f(x) = 0$ habe eine einzige reelle Wurzel zwischen $x = a$ und $x = b$, wo $b > a$ sey. Diess ist ganz gewiss der Fall, wenn $f'(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ sein Zeichen nicht wechselt, was wir nun voraussetzen wollen.

Sey nun $a + \alpha$ der wahre Werth dieser Wurzel, wo also $\alpha > 0$ aber $< b - a$ seyn muss, so ist demnach

$$f(a + \alpha) = 0, \text{ d. h. } f(a) + \alpha f'(a + \Theta\alpha) = 0, \; \alpha = -\frac{f(a)}{f'(a + \Theta\alpha)} \text{ (§. 53, I).}$$

Ist nun A der grösste Werth, den $f'(x)$ erhält, wenn x von a bis b geht (ohne Rücksicht auf das Zeichen), so ist jedenfalls $\alpha \overline{\overline{>}} -\frac{f(a)}{A}$, so dass $a - \frac{f(a)}{A}$ noch unter der Wurzel ist. Da übrigens $f'(a + \Theta\alpha)$ und $f(a)$ von verschiedenem Zeichen sind, so ist $-\frac{f(a)}{A}$ ganz gewiss positiv.

Sey weiter $b - \beta$ die wahre Wurzel, wo $\beta > 0$ und $< b - a$, so ist eben so

$$f(b) - \beta f'(b - \Theta\beta) = 0, \; \beta = \frac{f(b)}{f'(b - \Theta\beta)},$$

Digitized by Google

und also auch $\beta \overline{>} \frac{f(b)}{A}$, so dass $b - \frac{f(b)}{A}$ noch über der Wurzel ist. Demnach hat man als engere Gränzen der Wurzel:

$$a - \frac{f(a)}{A} \text{ und } b - \frac{f(b)}{A}.$$

II. Gesetzt nun, es sey auch $f''(x)$ immer von demselben Zeichen, von $x = a$ bis $x = b$, so wird also $f'(x)$ bloss wachsen oder bloss abnehmen von a bis b; dabei haben $f(a)$ und $f'(a)$ immer verschiedenes Zeichen. * Gesetzt nun

1) es seyen $f(a)$ und $f''(a)$ positiv. Alsdann ist $f'(a) < 0$ und da $f'(x)$ wächst, so ist $A = f'(a)$:
2) es seyen $f(a)$ und $f''(a)$ negativ. Jetzt ist $f'(a) > 0$ und $f'(x)$ nimmt ab, also $A = f'(a)$;
3) $f(a) > 0$, $f''(a) < 0$; also $f(b) < 0$, $f''(b) < 0$; $f'(a)$ ist < 0, $f'(x)$ nimmt ab, also $f'(b) = A$;
4) $f(a) < 0$, $f''(a) > 0$, also $f(b) > 0$, $f''(b) > 0$; $f'(a) > 0$, $f'(x)$ wächst, also $A = f'(b)$.

Hieraus folgt nun, wenn man Alles zusammenfasst, der nachstehende Satz:

„Ist von $x = a$ bis $x = b$ $(b > a)$ $f'(x)$ von demselben Zeichen, während $f(x)$ sein Zeichen wechselt, indem es durch Null geht; ist A der (dem absoluten Werthe nach) grösste Werth von $f'(x)$ zwischen diesen Gränzen, so liegt eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ zwischen $a - \frac{f(a)}{A}$ und $b - \frac{f(b)}{A}$, und zwar ist die erste Grösse unter, die andere über der Wurzel. Ist ausser den vorigen Voraussetzungen auch noch $f''(x)$ immer von demselben Zeichen zwischen a und b, so liegt die Wurzel zwischen $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ und $b - \frac{f(b)}{f'(a)}$, wenn $f(a)$ und $f''(a)$ dasselbe Zeichen haben, oder zwischen $a - \frac{f(a)}{f'(b)}$, $b - \frac{f(b)}{f'(b)}$, wenn diess nicht der Fall ist."

Dass man mit diesen neuen Gränzen in derselben Weise weiter rechnen kann, wie mit a und b, ist offenbar.

III. Immer unter der Voraussetzung, $f'(x)$ und $f''(x)$ behalten ihr Zeichen unverändert von a bis b, sey nun $b - a = d$ und wenn a', b' die neuen Gränzen der Wurzeln, so sey $b' - a' = d'$. Sey nun

1) $f(a)$ und $f''(a)$ von demselben Zeichen, also $a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$, $b' = b - \frac{f(b)}{f'(a)}$, $d' = b - a -$

$$\frac{f(b) - f(a)}{f'(a)} = d - \frac{f(a+d) - f(a)}{f'(a)} = d - \frac{f(a) + d f'(a) + \frac{d^2}{2} f''(a + \Theta d) - f(a)}{f'(a)}$$
$$= -\frac{d^2}{2} \frac{f''(a+\Theta d)}{f'(a)};$$

* Denn, wenn $a + \alpha$ die wahre Wurzel ist, muss $\alpha > 0$, also $f'(a + \Theta \alpha)$ und $f(a)$ von verschiedenem Zeichen seyn; d. h. da $f'(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ sein Zeichen nicht wechselt, es ist immer $f(a)$ und $f'(x)$ von verschiedenem, und mithin $f(b)$ und $f'(x)$ von gleichem Zeichen.

Digitized by Google

2) f(a) und f''(a) von verschiedenem Zeichen, also $a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)}$, $b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$, $d' =$

$$b - a - \frac{f(b) - f(a)}{f'(b)} = d - \frac{f(b) - f(b-d)}{f'(b)} = d - \frac{f(b) - f(b) + d\,f'(b) - \frac{d^2}{2} f''(b - \Theta d)}{f'(b)}$$

$$= \frac{d^2}{2} \frac{f''(b - \Theta d)}{f'(b)}.$$

Ist somit K der grösste Werth, den f''(x) von a bis b annimmt, so ist sicher

$$d' \overline{\lessgtr} - \frac{d^2}{2} \frac{K}{f'(a)} \text{ oder } \overline{<} \frac{d^2}{2} \frac{K}{f'(b)}.$$

Ist letztere Grösse $< d$, so weiss man, dass die neuen Gränzen enger sind, als a und b, und kann auch sofort sagen, wie weit sie zusammenstimmen.

Als Beispiel wollen wir die Gleichung $x^x - 100 = 0$, d. h. $x\,l(x) - l(100) = 0$ auflösen. Für $x = 3$ ist $3\,l(3) - l(100) < 0$, für $x = 4$ aber $4\,l(4) - l(100) > 0$, so dass eine Wurzel zwischen 3 und 4 liegt. $f'(x)$ und $f''(x)$ sind innerhalb dieser Gränzen positiv, so dass $a = 3$, $b = 4$, $d = 1$ ist. f(a) und f''(a) haben verschiedenes Zeichen, also $a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)}$, $b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$. Ferner $K = \frac{1}{3}$, $\frac{d^2}{2} \frac{K}{f'(b)} = \frac{1}{6[1 + l(4)]}$, welche Grösse $< d$ ist. Aber $\frac{1}{6[1 + l(4)]} < 0{\cdot}1$ und $> 0{\cdot}01$, so dass $d' < 0{\cdot}1$ und also die neuen Gränzen nur bis zur ersten Dezimale zu entwickeln sind. Man hat $a' = 3{\cdot}54$, $b' = 3{\cdot}61$, so dass, da $f(3{\cdot}6) > 0$, sicher die Wurzel zwischen 3·5 und 3·6 liegt. Setzt man jetzt wieder $a = 3{\cdot}5$, $b = 3{\cdot}6$, $d = 0{\cdot}1$, so ist $K = \frac{1}{3{\cdot}5}$, $\frac{d^2}{2} \frac{K}{f'(b)} < 0{\cdot}001$ aber $> 0{\cdot}0001$, so dass die Rechnung auf 3 Dezimalen genügt. Man hat

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)} = 3{\cdot}5966, \quad b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 3{\cdot}5973,$$

so dass die Wurzel sicher zwischen 3·596 und 3·598 liegt. Da aber $f(3{\cdot}597) < 0$, so liegt sie zwischen 3·597 und 3·598.

Jetzt ist $a = 3{\cdot}597$ und $b = 3{\cdot}598$, $d = 0{\cdot}001$, ferner als grösster Werth von $\frac{d^2}{2} \frac{f''(b - \Theta d)}{f'(b)}$ ergibt sich ein Werth zwischen 0·0000001 und 0·00000001, so dass 7 Dezimalen genügen. Man findet

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)} = 3{\cdot}5972850, \quad b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 3{\cdot}5972851,$$

zwischen welchen zwei Werthen die Wurzel liegt. (Vergl. „Grundzüge" S. 207.)

Digitized by Google

Elfter Abschnitt.

Näherungsweise Berechnung eines bestimmten Integrals.

§. 64.

Ein jedes bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,\partial x, \tag{a}$$

in welchem $f(x)$ zwischen $x=a$ und $x=b$ eine stetige Funktion von x ist (wenigstens nur endliche Werthe zulässt), hat einen bestimmten, von a und b abhängigen Werth, dessen Ermittlung dann immer leicht ist, wenn die unbestimmte Integration sich ausführen lässt. Ist Letzteres aber nicht der Fall, so muss man mit Näherungsmethoden sich behelfen. Zu solchen liesse sich die Integration mittelst unendlicher Reihen (§. 57) zählen, und es wird dieselbe in vielen Fällen von Nutzen seyn; eine weitere Näherungsmethode haben wir in §. 46, X angedeutet, da das Integral (a) immer als Ausdruck für den Inhalt einer ebenen Fläche angesehen werden kann. Wir werden auf diese Methode nochmals zurückkommen. Alle diese Methoden haben aber den Nachtheil, dass man keine bestimmte Fehlergränze kennt, d. h. also, dass man nicht weiss, in wie weit das Resultat genau oder nicht genau ist. Frei von diesem Vorwurfe ist nun die nachstehende Methode, bei der nur vorausgesetzt ist, $f(x)$ sey so beschaffen, dass man für jeden beliebigen Werth von x den ihr zukommenden Werth berechnen kann.

Erste Näherung.

I. Aus §. 52 folgt

$$f(x+h)-f(x)=h f'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\tfrac{1}{2}\int_0^h z^2 f^3(x+h-z)\,\partial z,$$

oder wenn man $z=h-u$ setzt (§. 42):

$$f(x+h)-f(x)=h f'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\tfrac{1}{2}\int_0^h (h-u)^2 f^3(x+u)\,\partial u. \tag{b}$$

Ganz eben so folgt aus §. 52 [wenn man dort $f'(z)$ statt $f(z)$ setzt]:

$$f'(x+h)-f'(x)=h f''(x)+\int_0^h (h-u) f^3(x+u)\,\partial u. \tag{c}$$

Aus (b) und (c) zieht man sofort:

$$f(x+h)-f(x)-\frac{h}{2}[f'(x+h)-f'(x)]=h f'(x)+\tfrac{1}{2}\int_0^h [(h-u)^2-h(h-u)] f^3(x+u)\,\partial u, \tag{d}$$

wenn nur $f^3(x+u)$ endliche Werthe hat von $u=0$ bis $u=h$.

Das in (d) vorkommende bestimmte Integral ist gleich

Digitized by Google

$$\int_0^h [(h-u)(h-u-h)] f^3(x+u)\partial u = -\int_0^h u(h-u) f^3(x+u)\partial u.$$

Da die Grösse $u(h-u)$ von $u=0$ bis $u=h$ immer dasselbe Zeichen behält, so ist (§. 39, III) dieses Integral gleich

$$-f^3(x+\Theta h)\int_0^h u(h-u)\partial u = -\tfrac{1}{6}h^3 f^3(x+\Theta h),$$

so dass

$$f(x+h)-f(x) = hf'(x) + \frac{h}{2}[f'(x+h)-f'(x)] - \frac{h^3}{12}f^3(x+\Theta h). \quad (28)$$

Setzen wir zur Abkürzung $f(x+h)-f(x) = \Delta f(x)$, eben so $f'(x+h) - f'(x) = \Delta f'(x)$ u. s. w., so heisst die (28) auch

$$\Delta f(x) = hf'(x) + \frac{h}{2}\Delta f'(x) - \frac{h^3}{12}f^3(x+\Theta h). \quad (28')$$

II. Gesetzt aber, es behalte $f^3(z)$ dasselbe Zeichen von $z=x$ bis $z=x+h$, so ist auch (§. 39, III)

$$\int_0^h u(h-u) f^3(x+u)\partial u = M\int_0^h f^3(x+u)\partial u = M\Delta f^2(x),$$

wo M ein Mittelwerth von $u(h-u)$ ist, wenn u von 0 bis h geht. Die Grösse $u(h-u)$ ist aber für alle diese Werthe positiv (mag h positiv oder negativ seyn) und erreicht ihren grössten Werth für $u=\frac{1}{2}h$ (§. 24), wo sie $\frac{1}{4}h^2$ ist, so dass wir ganz wohl setzen können: $M=\frac{\Theta h^2}{4}$, wo Θ zwischen 0 und 1. Demnach ist

$$\Delta f(x) = hf'(x) + \frac{h}{2}\Delta f'(x) - \frac{\Theta h^3}{8}\Delta f^2(x).$$

Daraus ergibt sich auch sofort:

$$\Delta f(x) = hf'(x) + \frac{h}{2}\Delta f'(x) - \frac{h^2}{12}\Delta f^2(x) + \left(\frac{1}{12}-\frac{\Theta}{8}\right)h^2\Delta^2 f(x).$$

Aber $\frac{1}{12}-\frac{\Theta}{8}$ liegt zwischen $\frac{1}{12}$ und $-\frac{1}{24}$ oder auch zwischen $\frac{1}{12}$ und $-\frac{1}{12}$, so dass wenn man setzt

$$\Delta f(x) = hf'(x) + \frac{h}{2}\Delta f'(x) - \frac{h^2}{12}\Delta f^2(x) + \frac{\Theta' h^2}{12}\Delta^2 f(x), \quad (29)$$

die Grösse Θ' zwischen -1 und $+1$ liegt.

Anwendung.

III. Setzen wir in (28) nach einander $x=a$, $a+h$, $a+2h$, ..., $a+(n-1)h$, wo $a+nh=b$, also $h=\frac{b-a}{n}$ seyn soll (und etwa $b>a$); addiren sodann die sämmtlichen so erhaltenen Gleichungen, so ergibt sich

$$f(b)-f(a) = h[f'(a)+f'(a+h)+\ldots+f'(b-h)] + \frac{h}{2}[f'(b)-f'(a)] - \frac{Ph^3}{12},$$

Digitized by Google

wo $P = f^3(a + \Theta_1 h) + f^3(a + h + \Theta_2 h) + \ldots\ldots + f^3(b - h + \Theta_n h)$, und $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ sämmtlich zwischen 0 und 1 liegen. Ist nun G der grösste Werth, ohne Rücksicht auf das Zeichen, den $f^3(z)$ annimmt, wenn z von a bis b geht, so ist jedenfalls P, ohne Rücksicht auf das Zeichen, kleiner als nG, so dass also, wenn

$$f(b) - f(a) = h[f'(a) + f'(a+h) + \ldots + f'(b-h)] + \frac{h}{2}[f'(b) - f'(a)]$$

gesetzt wird, der Fehler nicht $\frac{h^3}{12} nG$ beträgt.

Setzt man

$$f(x) = \int F(x)\partial x, \quad f'(x) = F(x), \quad f^3(x) = F^2(x), \quad f(b) - f(a) = \int_a^b F(x)\partial x,$$

so erhält man hieraus den folgenden Satz:

„Setzt man

$$\int_a^b F(x)\partial x = h[F(a) + F(a+h) + F(a+2h) + \ldots + F(b-h)] + \frac{h}{2}[F(b) - F(a)], \quad (30)$$

wo $h = \frac{b-a}{n}$, so ist der begangene Fehler geringer als $\frac{(b-a)^3}{12n^2}G$, wo G der grösste Werth ist, den $F^2(x)$ annimmt, wenn x von a bis b geht (immer ohne Rücksicht auf das Zeichen)."

IV. Verfahren wir mit der Gleichung (29) ganz eben so wie mit (28), so erhalten wir, wenn wir sogleich $f(x) = \int F(x)\partial x$ setzen:

$$\int_a^b F(x)\partial x = h[F(a) + F(a+h) + F(a+2h) + \ldots$$
$$+ F(b-h)] + \frac{h}{2}[F(b) - F(a)] - \frac{h^2}{12}[F'(b) - F'(a)],$$

mit einem Fehler gleich $\frac{h^2}{12}$ multiplizirt mit

$$\Theta_1'[F'(a+h) - F'(a)] + \Theta_2'[F'(a+2h) - F'(a+h)] + \ldots + \Theta_n'[F'(b) - F'(b-h)], \quad (d)$$

wo $\Theta_1', \ldots \Theta_n'$ zwischen -1 und $+1$ liegen. Da aber $F^2(x)$ von a bis b dasselbe Zeichen haben muss (der Voraussetzung in II nach), so wächst $F'(x)$ von a bis b, oder nimmt immer ab; demnach haben die in (d) vorkommenden Differenzen alle dasselbe Zeichen. Daraus folgt, dass die Grösse (d) enthalten ist zwischen den zwei Werthen, die man erhält, wenn man in (d) alle Θ' gleich $+1$, oder -1 setzt. Diese sind aber

$$F'(b) - F'(a) \text{ und } -[F'(b) - F'(a)],$$

so dass die (d) gleich ist $\Theta'[F'(b) - F'(a)]$, wo Θ' zwischen -1 und $+1$.

Man hat also den zweiten Satz:

„Hat $F^2(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ immer dasselbe Zeichen, und man setzt:

Digitized by Google

$$\int_a^b F(x)\,\partial x = h[F(a)+F(a+h)+F(a+2h)+\ldots+F(b-h)] + \frac{h}{2}[F(b)-F(a)] - \frac{h^2}{12}[F'(b)-F'(a)], \quad (31)$$

wo $h=\frac{b-a}{n}$, so ist der begangene Fehler kleiner als das letzte Glied, d. h. kleiner als $\frac{h^2}{12}[F'(b)-F'(a)]$."

Die Sätze (30) und (31) sind nun die gesuchten Näherungsformeln.

§. 65.

Zweite Näherung.

I. In derselben Weise, wie in §. 64 hat man:

$$\Delta f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f^3(x) + \frac{h^4}{24}f^4(x) + \frac{1}{24}\int_0^h (h-u)^4 f^5(x+u)\,\partial u,$$

$$\Delta f'(x) = hf''(x) + \frac{h^2}{2}f^3(x) + \frac{h^3}{6}f^4(x) + \frac{1}{6}\int_0^h (h-u)^3 f^5(x+u)\,\partial u,$$

$$\Delta f''(x) = hf^3(x) + \frac{h^2}{2}f^4(x) + \frac{1}{2}\int_0^h (h-u)^2 f^5(x+u)\,\partial u.$$

Daraus ergibt sich:

$$\Delta f(x) - \frac{h}{2}\Delta f'(x) + \frac{h^2}{12}\Delta f^2(x) = hf'(x) + \frac{1}{24}\int_0^h [(h-u)^4 - 2h(h-u)^3 + h^2(h-u^2)] f^5(x+u)\,\partial u. \quad (e)$$

Aber $(h-u)^4 - 2h(h-u)^3 + (h-u)^2h^2 = (h-u)^2[(h-u)^2 - 2(h-u)h + h^2] = (h-u)^2u^2$, so dass das in (e) vorkommende bestimmte Integral gleich $\int_0^h u^2(h-u)^2 f^5(x+u)\,\partial u$ ist. Da $u^2(h-u)^2$ nur positiv ist, so hat man wie in §. 64, I:

$$\int_0^h u^2(h-u)^2 f^5(x+u)\,\partial u = f^5(x+\Theta h)\int_0^h u^2(h-u)^2\,\partial u = \frac{h^5}{30}f^5(x+\Theta h),$$

so dass

$$\Delta f(x) = hf'(x) + \frac{h}{2}\Delta f'(x) - \frac{h^2}{12}\Delta f''(x) + \frac{h^5}{720}f^5(x+\Theta h), \quad (32)$$

wenn nur $f^5(z)$ endlich ist von $z=x$ bis $z=x+h$.

II. Behält aber $f^5(z)$ dasselbe Zeichen von $z=x$ bis $z=x+h$, so ergibt sich, wie in §. 64, II, wenn man beachtet, dass der grösste Werth von $u^2(h-u)^2 = [u(h-u)]^2$ für $u=\frac{1}{2}h$ erhalten wird, wo er $\frac{h^4}{16}$ ist:

$$\int_0^h u^2(h-u)^2 f^5(x+u)\,\partial u = \frac{\Theta h^4}{16}\Delta f^4(x),$$

Digitized by Google

so dass

$$\Delta f(x) = h f'(x) + \frac{h}{2} \Delta f'(x) - \frac{h^2}{12} \Delta f''(x) + \frac{\Theta h^4}{16.24} \Delta f^4(x).$$

Man kann hieraus wieder ziehen:

$$\Delta f(x) = h f'(x) + \frac{h}{2} \Delta f'(x) - \frac{h^2}{12} \Delta f''(x) + \frac{h^4}{720} \Delta f^4(x) - h^4 \left(\frac{1}{720} - \frac{\Theta}{16.24}\right) \Delta f^4(x).$$

Aber $\frac{1}{720} - \frac{\Theta}{16.24}$ liegt zwischen $\frac{1}{720}$ und $-\frac{7}{8}\frac{1}{720}$, also auch zwischen $\frac{1}{720}$ $-\frac{1}{720}$, so dass

$$\Delta f(x) = h f'(x) + \frac{h}{2} \Delta f'(x) - \frac{h^2}{12} \Delta f^2(x) + \frac{h^4}{720} \Delta f^4(x) + \frac{\Theta' h^4}{720} \Delta f^4(x), \qquad (33)$$

wo Θ' zwischen -1 und $+1$, aber $f^5(z)$ von $z = x$ bis $z = x + h$ dasselbe Zeichen behalten muss.

Anwendung.

III. Genau wie in §. 64, III und IV ergeben sich aus den Sätzen (32) und (33) die folgenden:

„Setzt man

$$\int_a^b F(x)\,\partial x = h[F(a) + F(a+h) + \ldots. + F(b-h)] + \frac{h}{2}[F(b) - F(a)] - \frac{h^2}{12}[F'(b) - F'(a)], \qquad (34)$$

wo $h = \frac{b-a}{n}$, so ist der begangene Fehler kleiner als $\frac{(b-a)^5}{720 n^4} G$, wenn G den grössten Werth bedeutet, den $F^4(x)$ erlangt, wenn x von a bis b geht."

Sodann aus (33):

„Ist $F^4(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ von demselben Zeichen und man setzt:

$$\int_a^b F(x)\,\partial x = h[F(a) + F(a+h) + F(a+2h) + \ldots + F(b-h)] + \frac{h}{2}[F(b) - F(a)] - \frac{h^2}{12}[F'(b) - F'(a)] + \frac{h^4}{720}[F^3(b) - F^3(a)], \qquad (35)$$

wo $h = \frac{b-a}{n}$, so ist der begangene Fehler kleiner als das letzte Glied."

Die ganze Zahl n ist in den Sätzen (30), (31), (34), (35) ganz beliebig; je grösser man sie nimmt, desto kleiner wird h, und also auch der begangene Fehler, so dass man es in seiner Gewalt hat, diesen beliebig klein zu machen. Eine vorläufige Untersuchung des Fehlers wird auch über den zu wählenden Werth von n entscheiden.

IV. Würde man in §. 46, X statt durch drei Punkte der Kurve eine krumme Linie, deren Gleichung $y = a + bx + cx^2$ ist, zu legen, bloss eine Gerade durch zwei Punkte, also durch B und E, E und F, u. s. w. legen, so würde die Fläche ABCD in Paralleltrapeze zerlegt und man fände für sie:



Digitized by Google

$$\frac{h}{2}[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots\ldots + 2y_{n-1} + y_n],$$

wo $h = \frac{b-a}{n} = \frac{AD}{n}$. Diese Grösse ist aber geradezu die Grösse

$$h[F(a) + F(a+h) + \ldots. + F(b-h)] + \frac{h}{2}[F(b) - F(a)],$$

welche in obigen vier Näherungsformeln jeweils zuerst, in (30) allein, erscheint. Demnach sind diese vier Formeln genauere Feststellungen der Gleichung

$$\int_a^b F(x)\,\partial x = h[\tfrac{1}{2}F(a) + F(a+h) + F(a+2h) + \ldots + F(b-h) + \tfrac{1}{2}F(b)]. \quad (36)$$

V. Die Anwendung der einen oder andern der vier Näherungsformeln ist ziemlich einfach, so dass wir es füglich unterlassen können, ein Zahlenbeispiel zuzufügen. — Wir bemerken nur noch, dass selbst in dem Falle, da $b = \infty$ ist, unsere Formeln anwendbar sind; nur muss dann die Reihe $F(a)$, $F(a+h)$, $F(a+2h)$, ... möglichst rasch konvergiren, so dass die spätern Glieder derselben nicht mehr zu beachten sind. Wegen der Schätzung des Fehlers werden die Formeln (31) und (35) jetzt vorzuziehen seyn.

Verlangen diese beiden Formeln allerdings die Unveränderlichkeit des Zeichens in $F^2(x)$ oder $F^4(x)$, so wird — falls diese Bedingung nicht erfüllt seyn sollte, doch der Anwendung Nichts entgegenstehen, indem man das Integral in mehrere einzelne theilen kann (§. 42, II), welche einzeln nach diesen Sätzen berechnet werden können.

§. 66.

Berechnung eines bestimmten Integrals mittelst der Interpolationsformel.

I. Die oben aus einander gesetzte Methode verlangt, dass in dem bestimmten Integral $\int_a^b y\,\partial x$ die Grösse y als Funktion von x gegeben ist. In diesem Falle wird sie immer anwendbar seyn, da sie in allen Fällen eine Schätzung der Fehlergränze zulässt. Anders verhält sich jedoch die Sache, wenn y nicht als Funktion von x gegeben ist, sondern man nur für eine Reihe von Werthen von x, die zwischen a und b liegen, die zugehörigen Werthe von y kennt. Sind in diesem Falle die Werthe von x in gleichem Abstande h, und ist $h = \frac{b-a}{n}$, so kann man, wenn y_0, y_1, y_2, ..., y_n die Werthe von y für $x = a, a+h, \ldots, b$ sind, ungefähr setzen (§. 65, IV):

$$\int_a^b y\,\partial x = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right), \quad (36')$$

wobei man freilich keinen Maassstab für die Fehlergränze hat. Genauer wird übrigens die Formel des §. 46, X seyn, nach der

$$\int_a^b y\,\partial x = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}], \quad (37)$$

wobei $h = \frac{b-a}{2n}$ vorausgesetzt ist. (Siehe §. 67.)

Digitized by Google

II. Ist aber die Annahme, es seyen die Werthe von x in gleichem Abstande, nicht zulässig, so kann man sich in dieser Weise nicht helfen. Gesetzt nämlich, es seyen für $x = a, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, b$, wo $a < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{n-1} < b$ die Werthe von $y: y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_{n-1}, y_n$, und man wisse sonst Nichts über y (als Funktion von x), so wird man, eben in dieser Ungewissheit, annehmen, y sey eine ganze Funktion von x, d. h. eine nach Potenzen von x geordnete Funktion, derart, dass y die obigen Werthe annimmt, wenn x die angegebenen Werthe hat. Man sieht leicht, dass alsdann

$$y = g + g_1 x + g_2 x^2 + \ldots + g_n x^n$$

seyn muss, wo nun $g, g_1, \ldots, g_n$ (der Anzahl nach $n+1$) so zu bestimmen sind, dass für $x = a, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, b: y = y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n$ ist. Daraus folgen für $g, g_1, \ldots, g_n$ bestimmte Werthe, und es gibt eben desshalb nur eine einzige ganze Funktion von x vom Grade n, welche diesen Bedingungen genügt. Finden wir also irgendwie eine solche, so ist es die verlangte. Als solche erscheint aber sofort:

$$\begin{aligned} y = & \frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-1})(x-b)}{(a-\alpha_1)(a-\alpha_2)\ldots(a-\alpha_{n-1})(a-b)} y_0 \\ & + \frac{(x-a)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-1})(x-b)}{(\alpha_1-a)(\alpha_1-\alpha_2)\ldots(\alpha_1-\alpha_{n-1})(\alpha_1-b)} y_1 \\ & + \ldots\ldots \\ & \vdots \\ & + \frac{(x-a)(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{n-2})(x-\alpha_{n-1})}{(b-a)(b-\alpha_1)\ldots(b-\alpha_{n-2})(b-\alpha_{n-1})} y_n, \end{aligned}$$

welche sicher vom n^{ten} Grade ist, und den obigen Bedingungen genügt. Setzt man

$$(x-a)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-1})(x-b) = f(x),$$

so heisst diese Gleichung auch:

$$\begin{aligned} y = & \frac{f(x)}{x-a}\left(\frac{x-a}{f(x)}y\right)_a + \frac{f(x)}{x-\alpha_1}\left(\frac{x-\alpha_1}{f(x)}y\right)_{\alpha_1} + \ldots\ldots \\ & + \frac{f(x)}{x-\alpha_{n-1}}\left(\frac{x-\alpha_{n-1}}{f(x)}y\right)_{\alpha_{n-1}} + \frac{f(x)}{x-b}\left(\frac{x-b}{f(x)}y\right)_b, \end{aligned}$$

wo die angehängten Zeiger andeuten, man solle in der eingeklammerten Grösse $x = a, \alpha_1, \ldots, b$ setzen. Demnach ist

$$\int_a^b y\,\partial x = \left(\frac{x-a}{f(x)}y\right)_a \int_a^b \frac{f(x)\,\partial x}{x-a} + \left(\frac{x-\alpha_1}{f(x)}y\right)_{\alpha_1} \int_a^b \frac{f(x)\,\partial x}{x-\alpha_1} + \ldots + \left(\frac{x-b}{f(x)}y\right)_b \int_a^b \frac{f(x)\,\partial x}{x-b}.$$

Diese Formel ist genau richtig, wenn wirklich y eine ganze Funktion des Grades n ist; sie ist nur näherungsweise richtig, wenn diess nicht der Fall ist. Sie gilt natürlich auch, wenn $a, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, b$ in gleichen Abständen sind.

III. Die Grössen $\frac{f(x)}{x-a}, \frac{f(x)}{x-\alpha_1}, \ldots, \frac{f(x)}{x-b}$ sind Produkte von n Faktoren des ersten Grades, ihre Integrale lassen sich also immer unmittelbar ermitteln. Zu dem Ende bemerken wir, dass:

Digitized by Google

$$(x-a_1)(x-a_2)=x^2-(a_1+a_2)x+a_1a_2,$$
$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)=x^3-(a_1+a_2+a_3)x^2+(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)x-a_1a_2a_3.$$
$$(x-a_1)\ldots(x-a_4)=x^4-(a_1+a_2+a_3+a_4)x^3+(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4)x^2-(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4)x+a_1a_2a_3a_4,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)=x^n-C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}-C_3x^{n-3}+\ldots\pm C_{n-1}x\mp C_n,$$

wenn man mit C_1, C_2, ..., C_n die Summe der Combinationen zur ersten, zweiten, ..., n^{ten} Klasse aus den Elementen a_1, a_2, ..., a_n (ohne Wiederholungen) bezeichnet.

Man kann übrigens auch etwas anders verfahren. Gesetzt nämlich, man habe irgend wie

$$f(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_{n+1}x^{n+1}$$

gefunden, und sey $x-k$ einer der Faktoren von $f(x)$; ferner

$$\frac{f(x)}{x-k}=B_0+B_1x+B_2x^2+\ldots+B_nx^n,$$

so muss identisch

$$A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_{n+1}x^{n+1}=(x-k)(B_0+B_1x+\ldots+B_nx^n)$$

seyn. Daraus folgt:

$$\begin{array}{l|l}
A_0=-B_0k, & B_0=-\frac{A_0}{k}, \\
A_1=B_0-B_1k, & B_1=\frac{B_0-A_1}{k}, \\
A_2=B_1-B_2k, & B_2=\frac{B_1-A_2}{k}, \\
\vdots & \vdots \\
A_n=B_{n-1}-B_nk & B_n=\frac{B_{n-1}-A_n}{k} \\
A_{n+1}=B_n &
\end{array}$$

wornach B_0, ..., B_n aus A_0, A_1, ..., A_{n+1} leicht gefunden werden. Ist nun

$$\int f(x)\partial x=A_0x+A_1\frac{x^2}{2}+A_2\frac{x^3}{3}+\ldots+A_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+A_{n+1}\frac{x^{n+2}}{n+2},$$

so ist also

$$\int\frac{f(x)}{x-k}\partial x=B_0x+B_1\frac{x^2}{2}+B_2\frac{x^3}{3}+\ldots+B_n\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

wo

$$B_0=-\frac{A_0}{k}.\quad B_1=\frac{B_0-A_1}{k},\ \ldots,\ B_n=\frac{B_{n-1}-A_n}{k}.$$

Wie man sich noch weitere Erleichterungen verschaffen kann, ist wohl nicht schwer abzusehen. Das Gesagte mag aber genügen.

Digitized by Google

§. 67.

Unmittelbare Ableitung der in §. 66, I gedachten Näherungsformeln.

I. Seyen $y_0, y_1, \ldots, y_n$ die gegebenen Werthe der (sonst unbekannten) Funktion y für $x = 0, h, 2h, \ldots, nh$, und man bilde, wie in §. 56, II die Differenzenreihen nach der dortigen Uebersicht, in der y_0 an die Stelle von y tritt. — Die Formel

$$y = y_0 + \frac{x}{h}\Delta y_0 + \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 y_0}{1.2} + \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\left(\frac{x}{h}-2\right)\frac{\Delta^3 y_0}{1.2.3} + \ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

hat nun die Eigenschaft, dass wenn $x = 0, h, 2h, \ldots$ ist, man für y findet $y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots$ Für $x = rh$ erhält man nämlich

$$y = y_0 + \frac{r}{1}\Delta y_0 + \frac{r(r-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_0 + \ldots + \Delta^r y_0$$

und es lässt sich leicht beweisen, dass der Werth der zweiten Seite dieser Gleichung gleich y_r ist. * Man kann also die Formel (a) ganz wohl als allgemeinen Ausdruck für y als Funktion von x ansehen (§. 66, II).

Multiplizirt man in (a) die Produkte aus, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} y = y_0 &+ \frac{x}{h}\Delta y_0 + \left(\frac{x^2}{h^2}-\frac{x}{h}\right)\frac{\Delta^2 y_0}{1.2} + \left(\frac{x^3}{h^3} - 3\frac{x^2}{h^2} + 2\frac{x}{h}\right)\frac{\Delta^3 y_0}{1.2.3} \\ &+ \left(\frac{x^4}{h^4} - 6\frac{x^3}{h^3} + 11\frac{x^2}{h^2} - 6\frac{x}{h}\right)\frac{\Delta^4 y_0}{1..4} + \left(\frac{x^5}{h^5} - 10\frac{x^4}{h^4} + 35\frac{x^3}{h^3} - 50\frac{x^2}{h^2} + 24\frac{x}{h}\right)\frac{\Delta^5 y_0}{1..5} \\ &+ \left(\frac{x^6}{h^6} - 15\frac{x^5}{h^5} + 85\frac{x^4}{h^4} - 225\frac{x^3}{h^3} + 274\frac{x^2}{h^2} - 120\frac{x}{h}\right)\frac{\Delta^6 y_0}{1..6} + \ldots \end{aligned} \quad \text{(b)}$$

welche Reihe sich leicht weiter führen lässt.

Setzt man in der Formel (a) y_r durchweg an die Stelle von y_0, so erhält man

$$y' = y_r + \frac{x}{h}\Delta y_r + \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 y_r}{1.2} + \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\left(\frac{x}{h}-2\right)\frac{\Delta^3 y_r}{1.2.3} + \ldots\ldots, \quad \text{(c)}$$

welche Formel für $x = 0, h, 2h, \ldots$ liefert: $y' = y_r, y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots\ldots$, wie man sich leicht überzeugt, wenn man das Schema des §. 56, II mit y_r statt y_0 beginnen lässt.

Daraus folgt, dass wenn man in (b) für y_0 setzt y_t man aus dieser

---

* Man hat aus §. 56, II: $y_1 = y_0 + \Delta y_0$; $y_2 = y_1 + \Delta y_1 = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_0 + \Delta^2 y_0 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$; $y_3 = y_2 + \Delta y_2 = y^0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 + \Delta y_1 + \Delta^2 y_1 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 + \Delta y_0 + \Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0, \ldots\ldots$; ist dann $y_n = y_0 + \frac{n}{1}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \ldots + \Delta^n y_0$, so ist sicher eben so $y_{n+1} = y_1 + \frac{n}{1}\Delta y_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y_1 + \ldots + \Delta^n y_1$. d. h. $y_{n+1} = y_0 + \Delta y_0 + \frac{n}{1}(\Delta y_0 + \Delta^2 y_0) + \frac{n(n-1)}{1.2}(\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0) + \ldots + \Delta^n y_0 + \Delta^{n+1} y_0 = y_0 + \frac{n+1}{1}\Delta y_0 + \frac{(n+1)n}{1.2}\Delta^2 y_0 + \ldots \Delta^{n+1} y_0$, wodurch der Satz bewiesen ist (§. 18, II).

neuen Formel [die (c) für $r=1$] für $x=0$ und $x=h$ dasselbe erhält, wie aus (a) für $x=h$ und $2h$; wenn man für y_0 in (b) setzt y_2, man aus dieser neuen Formel für $x=0$ und h dasselbe erhält, wie aus (b) für $x=2h$ und $3h$ u. s. w.

II. Aus (b) folgt

$$\int_0^h y\,\partial x = h\left[y_0 + \frac{1}{2}\Delta y_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{24}\Delta^3 y_0 - \frac{19}{720}\Delta^4 y_0 + \frac{3}{160}\Delta^5 y_0 - \frac{863}{60480}\Delta^6 y_0 + \ldots\right]. \text{(d)}$$

Setzt man in (c) $r=1$ und bestimmt dann daraus $\int_0^h y'\,\partial x$, so ist dieser Werth derselbe, wie der von $\int_h^{2h} y\,\partial x$ aus (b) bestimmte u. s. w.* Diess kommt aber darauf hinaus, in (d) statt y_0 zu setzen y_1 u. s. w. — So erhält man $\int_{2h}^{3h} y\,\partial x, \ldots, \int_{(n-1)h}^{nh} y\,\partial x$ und durch Addition:

$$\begin{aligned}\int_0^{nh} y\,\partial x &= h\left[y_0 + y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{n-1}\right]\\ &+ \frac{h}{2}\left[\Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \ldots\ldots + \Delta y_{n-1}\right]\\ &- \frac{h}{12}\left[\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_1 + \Delta^2 y_2 + \ldots\ldots + \Delta^2 y_{n-1}\right]\\ &+ \ldots,\end{aligned}$$

d. h. da $\Delta y_0 + \Delta y_1 + \ldots + \Delta y_{n-1} = y_n - y_0$, $\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_1 + \ldots \Delta^2 y_{n-1} = \Delta y_n - \Delta y_0, \ldots$:

* Es kommt diess darauf hinaus, dass wenn man in (a) für y_0 setzt y_r, man dasselbe erhält, als wenn man für x setzt $x+rh$. Man kann diesen Satz leicht erweisen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}&y_r + \frac{x}{h}\Delta y_r + \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 y_r}{1.2} + \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\left(\frac{x}{h}-2\right)\frac{\Delta^3 y_r}{1.2.3} + \ldots\\ &= y_0 + \frac{r}{1}\Delta y_0 + \frac{r(r-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_0 + \ldots\ldots\\ &\quad + \frac{x}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{r}{1}\Delta^2 y_0 + \frac{r(r-1)}{1.2}\Delta^3 y_0 + \ldots\ldots\right]\\ &\quad + \frac{1}{1.2}\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\left[\Delta^2 y_0 + \frac{r}{1}\Delta^3 y_0 + \ldots\right]\\ &\quad + \frac{1}{1.2.3}\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\left(\frac{x}{h}-2\right)\left[\Delta^3 y_0 + \ldots\right] + \ldots\\ &= y_0 + \frac{x+rh}{h}\Delta y_0 + \left[\frac{r(r-1)}{1.2} + \frac{x}{h}\frac{r}{1} + \frac{1}{1.2}\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\right]\Delta^2 y_0 + \left[\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}\right.\\ &\quad \left. + \frac{x}{h}\frac{r(r-1)}{1.2} + \frac{1}{1.2}\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\frac{r}{1} + \frac{1}{1.2.3}\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\left(\frac{x}{h}-2\right)\right]\Delta^3 y_0 + \ldots\ldots\end{aligned}$$

d. h. (§. 18', II):

$$= y_0 + \frac{x+rh}{h}\Delta y_0 + \frac{x+rh}{h}\left(\frac{x+rh}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 y_0}{1.2} + \frac{x+rh}{h}\left(\frac{x+rh}{h}-1\right)\left(\frac{x+rh}{h}-2\right)\frac{\Delta^3 y_0}{1.2.3}$$

$+ \ldots$, wenn man dort $b=r$, $a=\frac{x}{h}$ setzt.

Digitized by Google

$$\int_0^{nh} y\,\partial x = h[\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n] - \frac{h}{12}(\varDelta y_n - \varDelta y_0) + \frac{h}{24}(\varDelta^2 y_n - \varDelta^2 y_0)$$
$$- \frac{19\,h}{720}(\varDelta^3 y_n - \varDelta^3 y_0) + \frac{3\,h}{160}(\varDelta^4 y_n - \varDelta^4 y_0) - \frac{863\,h}{60480}(\varDelta^5 y_n - \varDelta^5 y_0) + \ldots \quad (38)$$

Diess ist nun die Formel (36′) des §. 66 mit weitern Verbesserungen.

III. Aus (b) folgt eben so:

$$\int_0^{2h} y\,\partial x = 2h\,y_0 + 2h\,\varDelta y_0 + \frac{h}{3}\varDelta^2 y_0 - \frac{h}{90}\varDelta^4 y_0 + \frac{h}{90}\varDelta^5 y_0 - \frac{37\,h}{3780}\varDelta^6 y_0 + \ldots,$$

d. h. da $\varDelta y_0 = y_1 - y_0$, $\varDelta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$:

$$\int_0^{2h} y\,\partial x = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) - \frac{h}{90}\varDelta^4 y_0 + \frac{h}{90}\varDelta^5 y_0 - \frac{37\,h}{3780}\varDelta^6 y_0 + \ldots .$$

Setzt man hier y_2, y_3, y_4 für y_0, y_1, y_2, so erhält man $\int_{2h}^{4h} y\,\partial x$, u. s. w. Daraus dann

$$\int_0^{2nh} y\,\partial x = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots\ldots + 4y_{2n-1} + y_{2n}]$$
$$- \frac{h}{90}[\varDelta^4 y_0 + \varDelta^4 y_2 + \varDelta^4 y_4 + \ldots\ldots + \varDelta^4 y_{2n-2}]$$
$$+ \frac{h}{90}[\varDelta^5 y_0 + \varDelta^5 y_2 + \varDelta^5 y_4 + \ldots\ldots + \varDelta^5 y_{2n-2}] \quad (39)$$
$$- \frac{37\,h}{3780}[\varDelta^6 y_0 + \varDelta^6 y_2 + \varDelta^6 y_4 + \ldots\ldots + \varDelta^6 y_{2n-2}] + \ldots.$$

welches die Formel (37) des §. 66 ist.

Da man diese Formeln nur dann anwenden wird, wenn y nicht als Funktion von x, sondern nur in einzelnen Werthen gegeben ist, so genügen die beiden Formen in (38) und (39), welche das bestimmte Integral hat, vollständig. Ist nämlich $\int_a^b y\,\partial x$ zur Ermittlung vorgelegt und es ist für $x = a$, $a + h, \ldots, a + nh : y = y_0, y_1, \ldots, y_n$, so ist die Aufgabe dieselbe, wie die: $\int_0^{nh} y\,\partial x$ zu bestimmen, wenn für $x = 0, h, \ldots, nh$ die Werthe von y sind $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

Digitized by Google

Zweites Buch.

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer unabhängig Veränderlichen. Vielfache Integrale und deren Anwendung.

Digitized by Google

Digitized by Google

Zwölfter Abschnitt.

Differentialquotienten für Funktionen mehrerer unabhängig Veränderlichen. Vertauschung dieser letzteren. Analytische Anwendungen.

§. 68.

Differentialquotienten.

I. So wie wir seither immer vorausgesetzt haben, es sey nur eine einzige unabhängig Veränderliche vorhanden, können wir auch annehmen, eine Grösse u hänge von mehreren Grössen x, y, z, ... ab, welche letztere gegenseitig vollkommen unabhängig von einander sind. Man kann also eine jede beliebige dieser letzteren sich ändern lassen, ohne dass desshalb die andern sich ändern müssen. Eine Grösse, die von mehreren andern abhängt, also eine Funktion derselben ist, wird ähnlich der Bezeichnung in §. 15 durch f(x, y, z, ...) zu bezeichnen seyn, wo x, y, z, ... diejenigen Grössen sind, von denen jene abhängt. In diesem Falle werden nun, eben da jede der unabhängig Veränderlichen sich ändern kann, ohne dass desshalb auch die übrigen eine Aenderung erleiden, wahre partielle Differentialquotienten (§. 15) auftreten, so dass also wenn $u = f(x, y, z, \ldots)$ man die Grössen

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \ldots\ldots$$

bilden kann. Die Bildung derselben geschieht genau nach den früheren Regeln, ist also keinem Anstande unterworfen. Von den partiellen Differentialquotienten höherer Ordnung gilt natürlich das bereits in §. 19, II nachgewiesene Gesetz, dass die Ordnung der Differenzirung eine ganz willkürliche ist.

II. Besteht zwischen drei Veränderlichen x, y, z eine einzige Gleichung

$$f(x, y, z) = 0, \qquad (a)$$

so ist vermöge derselben eine der drei eine Funktion der zwei übrigen, indem zwei Veränderliche ihren Werthen nach müssen gegeben seyn, ehe man den Werth der dritten vermöge der Gleichung (a) zu ermitteln im Stande ist.

Digitized by Google

Sey also z als Funktion von x und y angesehen, so kann man x sich ändern lassen, ohne dass y sich ändert, und y, ohne dass x eine Aenderung erleidet. Mit anderen Worten, man wird die Gleichung (a) nach x differenziren dürfen, wobei y konstant ist, und nach y, wobei x konstant ist. Daraus folgt (vergl. §. 17):

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

woraus $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, d. h. die partiellen Differentialquotienten von z nach x und y, folgen. Differenzirt man diese Gleichungen wieder nach x und y, so erhält man (§. 19, IV):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

woraus dann $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ folgen, u. s. w.

III. Bestehen allgemein zwischen den n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots\ldots,$ x_n die m Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)=0,\\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)=0,\\ \vdots\\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)=0,\end{array}\right\}\quad (b)$$

wo $m < n$, so sind in Folge dieser Gleichungen m der Veränderlichen abhängig von den $n - m$ übrigen, welche letztere aber vollständig unabhängig von einander sind. Sind so z. B. $x_1, x_2, \ldots, x_m$ abhängig von $x_{m+1}, \ldots, x_n$, so darf man die Gleichungen (b) nach jeder dieser letzteren Veränderlichen differenziren, wenn man dabei beachtet, dass $x_1, \ldots x_m$ Funktionen derselben sind. Man erhält dann $m(n-m)$ Differentialgleichungen der ersten Ordnung zur Bestimmung der Differentialquotienten $\frac{\partial x_1}{\partial x_{m+1}}, \ldots, \frac{\partial x_1}{\partial x_n}; \ldots; \frac{\partial x_m}{\partial x_{m+1}}, \ldots, \frac{\partial x_m}{\partial x_n}$, die in derselben Zahl sind. Diese Gleichungen haben die Form:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_r}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_r}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x_r}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_r}=0,$$

wenn man hier für r setzt: $m+1, m+2, \ldots$, und für φ dann $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$.

Wie man eben so zu höheren Ordnungen aufsteigen kann, ist klar. Als Beispiel wollen wir die Gleichung

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

betrachten. Man zieht aus ihr (r^2 konstant):

Digitized by Google

$$x+z\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ y+z\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ 1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\ 1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ 3\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+z\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=0,\ 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+z\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+z\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=0,\ 3\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+z\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=0, \text{ u. s. w.}$$

Entwicklung von $\frac{d^n}{dx^n}f(a+\alpha x,\ b+\beta x,\ldots)$.

IV. Wenn auch zu den früheren Untersuchungen gehörig, mag doch, des späteren Gebrauchs wegen, hier noch die Entwicklung von

$$\frac{d^n}{dx^n}f(a+\alpha x,\ b+\beta x,\ c+\gamma x,\ldots.)$$

gegeben werden, wo a, b, c, ..., α, β, γ, ... Konstanten sind und x die unabhängig Veränderliche. Ist $a+\alpha x=y$, $b+\beta x=z$, $c+\gamma x=u,\ldots.$, so ist (§. 19):

$$\frac{d}{dx}f(a+\alpha x,\ b+\beta x,\ c+\gamma x,\ldots)=\frac{\partial f}{\partial y}\alpha+\frac{\partial f}{\partial z}\beta+\frac{\partial f}{\partial u}\gamma+\ldots.,$$

da $\frac{\partial y}{\partial x}=\alpha$, $\frac{\partial z}{\partial x}=\beta$, $\frac{\partial u}{\partial x}=\gamma$ u. s. w. Hieraus folgt:

$$\frac{d^2}{dx^2}f(a+\alpha x,\ b+\beta x,\ldots..)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\alpha^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\alpha\beta+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\beta^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial u}\alpha\gamma+2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial u}\beta\gamma+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\gamma^2+\ldots.$$

Man kann diess auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{d^2}{dx^2}f(a+\alpha x,\ b+\beta x,\ldots)=\left(\frac{\partial}{\partial y}\alpha+\frac{\partial}{\partial z}\beta+\frac{\partial}{\partial u}\gamma+\ldots.\right)^2 f,$$

welche Bezeichnung wohl von selbst verständlich seyn wird.* Allgemein ist

$$\frac{d^n}{dx^n}f(a+\alpha x,\ b+\beta x,\ c+\gamma x,\ldots)=\left(\frac{\partial}{\partial y}\alpha+\frac{\partial}{\partial z}\beta+\frac{\partial}{\partial u}\gamma+\ldots.\right)^n f.$$

Gesetzt nämlich, dieser Satz gelte für $n=r$, so gilt er auch für $n=r+1$. Denn ist

$$\frac{d^r}{dx^r}f(a+\alpha x,\ b+\beta x\ldots..)=\left(\frac{\partial}{\partial y}\alpha+\frac{\partial}{\partial z}\beta+\ldots.\right)^r f,$$

---

* Entwickelt man $\left(\frac{\partial}{\partial y}\alpha+\frac{\partial}{\partial z}\beta+\frac{\partial}{\partial u}\gamma+\ldots\ldots\right)^2$, so hat man $\frac{\partial^2}{\partial y^2}\alpha^2+2\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\alpha\beta+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\beta^2+2\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial u}\alpha\gamma+2\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial u}\beta\gamma+\frac{\partial^2}{\partial u^2}\gamma^2+\ldots.$ Setzt man hier überall noch f zu und zwar neben ∂^2, so hat man genau den vorhergehenden Werth. In diesem Sinne ist also die Bezeichnung zu verstehen. — Eben so meint $\left(\frac{\partial}{\partial y}\alpha+\frac{\partial}{\partial z}\beta+\ldots\right)^n f$, man solle nach gewöhnlicher Weise die n^{te} Potenz des eingeklammerten Ausdrucks bilden und neben ∂^n überall noch f zusetzen.

Digitized by Google

so ist

$$\frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}} f(a+\alpha x,\ b+\beta x \ldots\ldots) = \frac{d}{dx}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y}\alpha + \frac{\partial}{\partial z}\beta + \ldots\right)^r f\right\}$$

$$= \alpha \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\alpha + \frac{\partial}{\partial z}\beta + \ldots\right)^r f + \beta \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}\alpha + \frac{\partial}{\partial z}\beta + \ldots\right)^r f + \ldots$$

$$= \left(\alpha\frac{\partial}{\partial y} + \beta\frac{\partial}{\partial z} + \ldots\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\alpha + \frac{\partial}{\partial z}\beta + \ldots\right)^r f$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}\alpha + \frac{\partial}{\partial z}\beta + \ldots\right)^{r+1} f,$$

wodurch nun unsere Behauptung bewiesen ist, da für $r = 2$ der Satz gilt (§. 18, II).

§. 69.

Vertauschung der unabhängig Veränderlichen.

In §. 21 haben wir gesehen, in welcher Weise die Differentialquotienten auszudrücken sind, falls man für die seitherige unabhängig Veränderliche eine andere wählt. Für den Fall mehrerer unabhängig Veränderlichen lässt sich diess eben so leicht nachweisen.

I. Sey zunächst z eine Funktion zweier unabhängig Veränderlichen x und y, und man führe für diese zwei andere u und v ein, die mit x und y zusammenhängen durch die Gleichungen

$$\varphi(x, y, u, v) = 0, \quad \psi(x, y, u, v) = 0, \tag{a}$$

so folgt aus (a), dass x und y Funktionen sind von u und v, während letztere Grössen von einander unabhängig sind. Demnach hat man (§. 15):

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{b}$$

Die Werthe von $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}$ folgen (nach §. 68) aus den Gleichungen (a); setzt man sie in (b) ein, so kann man hieraus die Werthe von $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, ausgedrückt durch $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ finden. Differenzirt man die Gleichungen (b) wieder nach u und v, und beachtet dabei, dass $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ im Allgemeinen von x und y abhängen, welche Grössen Funktionen von u und v sind, so erhält man (§. 19):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2},$$

woraus, nachdem $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$ noch aus (a) gezogen

Digitized by Google

sind, die Werthe von $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ in $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ ausgedrückt, folgen. Wie man hier zu höheren Ordnungen aufsteigen kann, ist klar.

II. Es kann sich ereignen, dass wenn z eine Funktion der zwei unabhängig Veränderlichen x, y ist, man für die drei Veränderlichen x, y, z drei andere r, φ, ψ einführen will, wobei dann φ, ψ als neue unabhängige, r als abhängige Veränderliche angesehen werden muss. Gewöhnlich kennt man dann x, y, z als Funktionen von r, φ, ψ; im allgemeinsten Falle hätte man zwischen r, φ, ψ, x, y, z drei Gleichungen:

$$f_1(r, \varphi, \psi, x, y, z) = 0, \quad f_2(r, \varphi, \psi, x, y, z) = 0, \quad f_3(r, \varphi, \psi, x, y, z) = 0, \qquad (c)$$

vermöge welcher $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, ... durch Differentialquotienten von r nach φ und ψ auszudrücken sind. Differenzirt man jede der drei Gleichungen (c) nach φ und ψ, wobei beachtet wird, dass r eine Funktion von φ und ψ, dessgleichen x und y, und dass $\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial z}{\partial \psi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \psi}$, so erhält man sechs Gleichungen, von denen die zwei ersten sind:

$$\frac{\partial f_1}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \varphi} + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \psi} + \frac{\partial f_1}{\partial \psi} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right) = 0,$$

und die vier anderen hieraus erhalten werden, wenn man f_2, f_3 für f_1 setzt. Durch diese sechs Gleichungen drückt man $\frac{\partial x}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial y}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial x}{\partial \psi}$, $\frac{\partial y}{\partial \psi}$, $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \psi}$, $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}$ durch die übrigen Grössen aus, und kann dann aus den beiden letzten Werthen $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ finden. In dem gewöhnlicheren Falle, da

$$x = f_1(r, \varphi, \psi), \; y = f_2(r, \varphi, \psi), \; z = f_3(r, \varphi, \psi),$$

bestimmt man zunächst nach Nr. I $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ durch $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial z}{\partial \psi}$ und bildet dann diese letzteren unmittelbar aus der dritten Gleichung.

Man sieht hieraus leicht, wie man sich zu benehmen habe, wenn Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen gegeben sind. Wir wollen daher an einigen Beispielen das Verfahren erläutern.

Beispiele.

1. In den Gleichungen

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \; x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \qquad (e)$$

sollen x und y durch die neuen unabhängig Veränderlichen r und ω ersetzt werden, wobei

$$x = r\cos\omega, \; y = r\sin\omega.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\omega,\ \frac{\partial x}{\partial \omega}=-r\sin\omega,\ \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\omega,\ \frac{\partial y}{\partial \omega}=r\cos\omega,\ \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}=0,\ \frac{\partial^2 x}{\partial r\,\partial \omega}=-\sin\omega,\ \frac{\partial^2 x}{\partial \omega^2}$$
$$=-r\cos\omega,\ \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}=0,\ \frac{\partial^2 y}{\partial r\,\partial \omega}=\cos\omega,\ \frac{\partial^2 y}{\partial \omega^2}=-r\sin\omega,$$

u. s. w., mithin

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\omega+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\omega,\ \frac{\partial z}{\partial \omega}=-\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\omega+\frac{\partial z}{\partial y}r\cos\omega,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\omega+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\cos\omega\sin\omega+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\omega,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial \omega}=-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}r\sin\omega\cos\omega+r\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(\cos^2\omega-\sin^2\omega)+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}r\sin\omega\cos\omega-\frac{\partial z}{\partial x}\sin\omega$$
$$+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\omega,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}r^2\sin^2\omega-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}r^2\sin\omega\cos\omega+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}r^2\cos^2\omega-\frac{\partial z}{\partial x}r\cos\omega-\frac{\partial z}{\partial y}r\sin\omega.$$

Demnach:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial r}\cos\omega-\frac{\partial z}{\partial \omega}\frac{\sin\omega}{r},\ \ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial r}\sin\omega+\frac{\partial z}{\partial \omega}\frac{\cos\omega}{r};$$

$$r^2\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2}=r^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)-r\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\omega+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\omega\right)=r^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)-r\frac{\partial z}{\partial r}.$$

Also ist

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \omega},\ x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=r\frac{\partial z}{\partial r},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r},$$

d. h. die drei Gleichungen (e) sind:

$$\frac{\partial z}{\partial \omega}=0,\ r\frac{\partial z}{\partial r}=0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}=0. \qquad (e')$$

2) Man soll die Grösse $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ umformen, indem für die unabhängig Veränderlichen x, y die neuen φ, ψ eintreten und als abhängig Veränderliche r erscheint, wobei

$$x=r\cos\varphi\cos\psi,\ y=r\cos\varphi\sin\psi,\ z=r\sin\varphi.$$

Hier ist

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}=\frac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\varphi\cos\psi-r\sin\varphi\cos\psi,\ \frac{\partial x}{\partial \psi}=\frac{\partial r}{\partial \psi}\cos\varphi\cos\psi-r\cos\varphi\sin\psi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi}=\frac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\varphi\sin\psi-r\sin\varphi\sin\psi,\ \frac{\partial y}{\partial \psi}=\frac{\partial r}{\partial \psi}\cos\varphi\sin\psi+r\cos\varphi\cos\psi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \psi}=\frac{\partial r}{\partial \psi}\sin\varphi,\ \frac{\partial z}{\partial \varphi}=\frac{\partial r}{\partial \varphi}\sin\varphi+r\cos\varphi.$$

Demnach wegen

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi},\ \frac{\partial z}{\partial \psi}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \psi}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \psi}:$$

Digitized by Google

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi} \sin\varphi + r\cos\varphi = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)\cos\psi + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)\sin\psi,$$

$$\frac{\partial r}{\partial \psi}\sin\varphi = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\cos\psi - r\sin\psi\right)\cos\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\sin\psi + r\cos\psi\right)\cos\varphi.$$

Hieraus:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial r}{\partial \psi}\sin\psi + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi\right)\cos\varphi\cos\psi}{\cos\varphi\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial r}{\partial \psi}\cos\psi + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi\right)\cos\varphi\sin\psi}{\cos\varphi\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)},$$

woraus folgt:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\begin{array}{c}\cos^2\varphi\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)^2 + \left[\frac{\partial r}{\partial \psi}\sin\psi + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi\right)\cos\varphi\cos\psi\right]^2 \\ + \left[-\frac{\partial r}{\partial \psi}\cos\psi + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi\right)\cos\varphi\sin\psi\right]^2\end{array}}}{\cos\varphi\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2 + \left[\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2 + r^2\right]\cos^2\varphi}}{\cos\varphi\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)}.$$

3) Sey u eine Funktion der drei Veränderlichen x, y, z und man soll in der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (f)$$

die drei unabhängig Veränderlichen x, y, z durch drei neue r, φ, ψ ersetzen, wenn

$$x = r\cos\varphi\cos\psi,\quad y = r\cos\varphi\sin\psi,\quad z = r\sin\varphi.$$

Man hat hier $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi\cos\psi$, $\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\cos\psi$, $\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} = 0$, $\frac{\partial^2 x}{\partial r\,\partial \varphi} = -\sin\varphi\cos\psi$, $\frac{\partial^2 x}{\partial r\,\partial \psi} = -\cos\varphi\sin\psi$ u. s. w. Ferner

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi\cos\psi + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi\sin\psi + \frac{\partial u}{\partial z}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x} r\sin\varphi\cos\psi - \frac{\partial u}{\partial y} r\sin\varphi\sin\psi + \frac{\partial u}{\partial z} r\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \psi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \psi} = -\frac{\partial u}{\partial x} r\cos\varphi\sin\psi + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\varphi\cos\psi;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}\right)\cos\varphi\cos\psi + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}\right)$$

$$\cos\varphi\sin\psi + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial r}\right)\sin\varphi = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\varphi\cos^2\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\varphi\sin^2\psi$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\sin^2\varphi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\cos^2\varphi\sin\psi\cos\psi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi,$$

Digitized by Google

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) r \sin\varphi \cos\psi - \frac{\partial u}{\partial x} r \cos\varphi \cos\psi - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) r \sin\varphi \sin\psi - \frac{\partial u}{\partial y} r \cos\varphi \sin\psi + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) r \cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial z} r \sin\varphi$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2 \sin^2\varphi \cos^2\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r^2 \sin^2\varphi \sin^2\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} r^2 \cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} r^2 \sin^2\varphi \sin\psi \cos\psi$$
$$-2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} r^2 \sin\varphi \cos\varphi \cos\psi - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} r^2 \sin\varphi \cos\varphi \sin\psi - \frac{\partial u}{\partial x} r \cos\varphi \cos\psi$$
$$-\frac{\partial u}{\partial y} r \cos\varphi \sin\psi - \frac{\partial u}{\partial z} r \sin\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\frac{\partial z}{\partial \psi}\right) r \cos\varphi \sin\psi - \frac{\partial u}{\partial x} r \cos\varphi \cos\psi + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \psi}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\frac{\partial z}{\partial \psi}\right) r \cos\varphi \cos\psi - \frac{\partial u}{\partial y} r \cos\varphi \sin\psi$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2 \cos^2\varphi \sin^2\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r^2 \cos^2\varphi \cos^2\psi - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} r^2 \cos^2\varphi \cos\psi \sin\psi - \frac{\partial u}{\partial x} r \cos\varphi \cos\psi$$
$$-\frac{\partial u}{\partial y} r \cos\varphi \sin\psi,$$

woraus leicht folgt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} tg\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

so dass die Gleichung (f) ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} - \frac{1}{r^2} tg\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0, \text{*}$$

oder wenn man beachtet, dass

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}:$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} - \frac{1}{r^2} tg\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0.$$

---

* Diese Gleichung heisst auch, nachdem sie mit r^2 multiplizirt worden:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cos\varphi\right) + \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = 0,$$

oder wenn man $\sin\varphi = \mu$, also $\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{\partial p}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial \varphi} = \frac{\partial p}{\partial \mu}\cos\varphi$ setzt:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{\partial u}{\partial \mu}\cos^2\varphi\right) + \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = 0,$$

d. h. wegen $\cos^2\varphi = 1 - \mu^2$:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial \mu}\right] + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = 0.$$

Unter dieser Form wurde sie von Laplace gebraucht, und ist in derselben in den Anwendungen nun meistens benützt.

Digitized by Google

4) Sind x, y, z die drei rechtwinkligen Koordinaten eines beliebigen Punktes im Raume; x′, y′, z′ die ebenfalls rechtwinkligen Koordinaten desselben Punktes für andere Axen; u eine Funktion von x, y, z, so ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z'}\right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z'^2}.$$

Man hat nämlich bekanntlich:

$$\begin{aligned}
x&=\alpha+a_1 x'+b_1 y'+c_1 z', & a_1^2+a_2^2+a_3^2&=1, & a_1 a_2+b_1 b_2+c_1 c_2&=0,\\
y&=\beta+a_2 x'+b_2 y'+c_2 z', & b_1^2+b_2^2+b_3^2&=1, & a_1 a_3+b_1 b_3+c_1 c_3&=0,\\
z&=\gamma+a_3 x'+b_3 y'+c_3 z'. & c_1^2+c_2^2+c_3^2&=1. & a_2 a_3+b_2 b_3+c_2 c_3&=0.
\end{aligned}$$

Mithin

$$\frac{\partial u}{\partial x'}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x'}=\frac{\partial u}{\partial x}a_1+\frac{\partial u}{\partial y}a_2+\frac{\partial u}{\partial z}a_3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y'}=\frac{\partial u}{\partial x}b_1+\frac{\partial u}{\partial y}b_2+\frac{\partial u}{\partial z}b_3,\quad \frac{\partial u}{\partial z'}=\frac{\partial u}{\partial x}c_1+\frac{\partial u}{\partial y}c_2+\frac{\partial u}{\partial z}c_3;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}=a_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a_3^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2a_1 a_2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+2a_1 a_3\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}+2a_2 a_3\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}=b_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b_3^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2b_1 b_2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+2b_1 b_3\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}+2b_2 b_3\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z'^2}=c_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+c_3^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2c_1 c_2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+2c_1 c_3\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}+2c_2 c_3\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z},$$

woraus die Richtigkeit der angegebenen Sätze ganz unmittelbar folgt.

§. 70.

Der Taylor'sche und Maclaurin'sche Satz für Funktionen mehrerer Veränderlichen.

Sollen die Sätze des §. 53 auf Funktionen mehrerer Veränderlichen ausgedehnt werden, so unterliegt diess keinerlei Schwierigkeit.

Ist $f(x, y, z, \ldots)$ eine Funktion der unabhängig Veränderlichen x, y, z, ..., und man will $f(x+h, y+k, z+l, \ldots)$ nach Potenzen und Produkten der Grössen h, k, l, ... entwickeln, so setze man $h=\alpha h'$, $k=\alpha k'$, $l=\alpha l'$, ... und betrachte $f(x+\alpha h', y+\alpha k', z+\alpha l', \ldots)$ als Funktion von α, die etwa mit $F(\alpha)$ bezeichnet werden möge. — Nach Formel (6) in §. 53 hat man

$$F(\alpha)=F(0)+\frac{\alpha}{1}F'(0)+\frac{\alpha^2}{1.2}F^2(0)+\ldots+\frac{\alpha^n}{1\ldots n}F^n(0)+\frac{\alpha^{n+1}}{1..n+1}F^{n+1}(\Theta\alpha),$$

worin $F(0)$, $F'(0)$, $F^2(0)$, ... die Werthe von $F(\alpha)$, $\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}$, $\frac{d^2F(\alpha)}{d\alpha^2}$, ... für $\alpha=0$ bezeichnen.

Gemäss §. 68, IV ist aber, wenn $x+\alpha h'=x'$, $y+\alpha k'=y'$, ... :

$$\frac{d^m F(\alpha)}{d\alpha^m}=\left(\frac{\partial}{\partial x'}h'+\frac{\partial}{\partial y'}k'+\frac{\partial}{\partial z'}l'+\ldots\right)^m f(x' y', z', \ldots).$$

Digitized by Google

Setzt man hier $\alpha = 0$, so gehen x', y', z', ... in x, y, z, ... über; eben so geht der Werth von $\frac{\partial f(x', y', ..)}{\partial x'}$ in den von $\frac{\partial f(x, y, ..)}{\partial x}$ u. s. w. über, * und dasselbe gilt von den höhern Differentialquotienten. Man hat also

$$F^m(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h' + \frac{\partial}{\partial y} k' + \frac{\partial}{\partial z} l' + ..\right)^m f(x, y, z, ..),$$

und

$$\alpha^m F^m(0) = \alpha^m \left(\frac{\partial}{\partial x} h' + \frac{\partial}{\partial y} k' + ..\right)^m f(x, y, z...) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \alpha h' + \frac{\partial}{\partial y} \alpha k' + ..\right)^m f(x, y, ...)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l + ...\right)^m f(x, y, z, ..),$$

indem man sich leicht überzeugen wird, dass diese Art Multiplikation gestattet ist.

Demnach:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k, z+l, ...) = f(x, y, z, ...) &+ \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l + ...\right) f(x, y, z, ...) \\ &+ \frac{1}{1.2} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l + ...\right)^2 f(x, y, z, ...) \\ &\;\vdots \\ &+ \frac{1}{1...n} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l + ...\right)^n f(x, y, z, ...) \\ &+ \frac{Q}{1...(n+1)}, \end{aligned} \tag{40}$$

wo Q der Werth von

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l + ...\right)^{n+1} f(x, y, z, ...)$$

---

* Bildet man die beiden Grössen

$$\frac{\partial f(x', y', z', ...)}{\partial x'} \text{ und } \frac{\partial f(x, y, z, ...)}{\partial x},$$

so lauten sie durchaus gleich, nur stehen x', y', ... in der einen an der Stelle von x, y, ... in der andern. Lässt man also in dem ersten entwickelten Ausdrucke $\alpha = 0$, d. h. $x' = x$, $y' = y$ ..... werden, so muss er genau zu dem werden, was der zweite Ausdruck unmittelbar gibt.

Man kann, um sich die Sache vollkommen klar zu machen, an einem Beispiele die Richtigkeit dieser Behauptungen unmittelbar anschauen. Sey z. B. $f(x, y, z) = x^3 y^5 z^6$, also $f(x', y', z') = x'^3 y'^5 z'^6$, und sey in $\frac{\partial^2 f(x', y', z')}{\partial y' \partial z'}$ zu setzen $\alpha = 0$. Es ist aber

$$\frac{\partial^2 (x'^3 y'^5 z'^6)}{\partial y' \partial z'} = 30 x'^3 y'^4 z'^5, \quad \frac{\partial^2 (x^3 y^5 z^6)}{\partial y \partial z} = 30 x^3 y^4 z^5.$$

Demnach ist für $\alpha = 0$:

$$\frac{\partial^2 (x'^3 y'^5 z'^6)}{\partial y' \partial z'} = 30 x^3 y^4 z^5,$$

wie ersichtlich, identisch mit $\frac{\partial^2 (x^3 y^5 z^6)}{\partial y \partial z}$.



Digitized by Google

ist, wenn man nach geschehener Differenzirung für x, y, z,... setzt: $x+\Theta h$, $y+\Theta h$, $z+\Theta l, \ldots$, und Θ zwischen 0 und 1 liegt.

Setzt man in (40) $x=y=z=\ldots=0$, und statt $h, k, l, \ldots$: $x, y, z, \ldots$, so erhält man:

$$\begin{aligned} f(x,y,z,\ldots) = f(0,0,0,\ldots) &+ \left(\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}y+\frac{\partial}{\partial z}z+\ldots\right)_0 f(x,y,z,\ldots) \\ &+ \frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}y+\frac{\partial}{\partial z}z+\ldots\right)_0^2 f(x,y,z,\ldots) \\ &\vdots \\ &+ \frac{1}{1\ldots n}\left(\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}y+\frac{\partial}{\partial z}z+\ldots\right)_0^n f(x,y,z,\ldots) \\ &+ \frac{1}{1\ldots(n+1)}Q', \end{aligned} \tag{41}$$

wo der angehängte Zeiger 0 bedeutet, dass man in den vorkommenden Differentialquotienten (nach geschehener Differenzirung) $x=0$, $y=0$, $z=0,\ldots$ zu setzen habe, und wo Q' der Werth der Grösse

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}y+\frac{\partial}{\partial z}z+\ldots\right)^{n+1} f(x,y,z,\ldots)$$

ist, wenn man in den Differentialquotienten für x, y, z... setzt Θx, Θy, $\Theta z, \ldots$ Es versteht sich von selbst, dass die Formeln (40) und (41) in ähnlicher Weise gebraucht werden können, wie die Theoreme von Taylor und Mac-Laurin, doch wollen wir uns dabei nicht weiter aufhalten und nur einer Anwendung der Formel (40) gedenken.

Sind nämlich die Grössen h, k, l, ... so klein, dass man ihre höheren Potenzen und Produkte vernachlässigen kann, so ist

$$f(x+h, y+k, z+l, \ldots) = f(x,y,z,\ldots) + \frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k + \frac{\partial f}{\partial z}l + \ldots.$$

Diese Formel wird namentlich dann angewendet, wenn man die kleinen Aenderungen von Grössen berechnen will, welche von mehreren anderen sich um wenig ändernden abhängen: wie z. B. bei der Berechnung des Einflusses der Beobachtungsfehler auf die Resultate in der Trigonometrie (vergl. mein „Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie", erste Abtheilung, 9. Abschnitt, zweite Abtheilung, 7. Abschnitt). Die dortigen Formeln sind ganz nach dem Obigen gebildet. Aus

$$c = a\cos B + b\cos A$$

folgt, wenn a, b, A, B um $\varDelta a$, $\varDelta b$, $\varDelta A$, $\varDelta B$ zunehmen, und man diese Grössen klein genug annimmt, um ihre Produkte zu vernachlässigen, da

$$\frac{\partial c}{\partial a} = \cos B, \quad \frac{\partial c}{\partial b} = \cos A, \quad \frac{\partial c}{\partial B} = -a\sin B, \quad \frac{\partial c}{\partial A} = -b\sin A:$$

$$c + \varDelta c = a\cos B + b\cos A + \cos B\varDelta a + \cos A\varDelta b - a\sin B\varDelta B - b\sin A\varDelta A,$$

$$\varDelta c = \cos B\varDelta a + \cos A\varDelta b - a\sin B\varDelta B - b\sin A\varDelta A.$$

(Das Weitere sehe man in dem angeführten Buche.)

Digitized by Google

§. 71.

Anwendung auf unbestimmte Form.

Eine weitere Anwendung der obigen Formeln kann, ähnlich wie in §. 56 IV, bei den Formen $\frac{0}{0}$ für Funktionen mehrerer Veränderlichen vorkommen. Seyen nämlich $f(x, y), F(x, y)$ Funktionen von x, y, die für $x=a$, $y=b$ zu Null werden, so wird $\frac{f(x, y)}{F(x, y)}$ in diesem Falle zu $\frac{0}{0}$. Setzt man nun zunächst $x=a+h$, $y=b+k$, so wird

$$\frac{f(x, y)}{F(x, y)}=\frac{f(a+h, b+k)}{F(a+h, b+k)}=\frac{f(a, b)+\frac{\partial f}{\partial x} h+\frac{\partial f}{\partial y} k+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{h^2}{1.2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} h k+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{k^2}{1.2}+\ldots}{F(a, b)+\frac{\partial F}{\partial x} h+\frac{\partial F}{\partial y} k+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{h^2}{1.2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} h k+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{k^2}{1.2}+\ldots}$$

wenn man in den Differentialquotienten für x und y setzt a und b. Da hier $f(a, b)=0$, $F(a, b)=0$, so fallen in Zähler und Nenner die ersten Glieder weg. In dem Bleibenden hat man dann h, k gleich Null zu setzen; man sieht jedoch, dass, ohne zwischen h und k eine Beziehung festzustellen, hier gar Nichts zu entscheiden ist. Sey also $k=\alpha h$, so kann man dann Zähler und Nenner durch h dividiren, und wenn man nunmehr $h=0$ setzt, so ist:

$$\frac{f(a, b)}{F(a, b)}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}+\alpha \frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}+\alpha \frac{\partial F}{\partial y}}$$

wo in den Differentialquotienten $x=a$, $y=b$ gesetzt werden muss. Ist nicht $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial F}{\partial x}=0$, so bleibt wegen des willkürlichen α diese Grösse immer noch unbestimmt; bestimmt wird sie aber auch, wenn $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}=0$. Wären die vier Differentialquotienten erster Ordnung 0, so müsste man zu denen der zweiten Ordnung gehen und hätte:

$$\frac{f(a, b)}{F(a, b)}=\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \alpha+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \alpha^2}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \alpha+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \alpha^2},$$

u. s. w. Wie man bei mehr als zwei Veränderlichen verfährt, ist hieraus schon klar.

1) Z. B. die Grösse

$$\frac{l(x)-l(y)}{x+2 y-3}$$

wird $\frac{0}{0}$ für $x=1$, $y=1$. Hier ist $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{y}$, $\frac{\partial F}{\partial x}=1$, $\frac{\partial F}{\partial y}=2$; für $x=1$, $y=1$ sind diese Grössen $1, -1, 1, 2$, so dass der Werth des obigen Bruches =

$$\frac{1-\alpha}{1+2 \alpha}$$

Digitized by Google

worin α ganz willkürlich ist. Da diese letztere Grösse für $\alpha = 1$ Null ist, für $\alpha = -\frac{1}{2}$ unendlich gross, so kann also $\frac{l(x) - l(y)}{x + 2y - 3}$ für $x = 1$, $y = 1$ alle möglichen Werthe haben.

2) Der Bruch $\frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2}$ wird $\frac{0}{0}$ für $x = 0$, $y = 0$; für diese Werthe ist $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$, so dass der Werth des Bruches gleich

$$\frac{2 + 4\alpha + 2\alpha^2}{2 + 2\alpha^2} = \frac{(1+\alpha)^2}{1 + \alpha^2}.$$

Diese Grösse kann offenbar nie negativ werden; ihr kleinster Werth ist 0 für $\alpha = -1$; um ihren etwaigen grössten Werth zu finden, setze man ihren Differentialquotienten nach α gleich Null, und hat:

$$(1 + \alpha)(1 + \alpha^2) - \alpha(1 + \alpha)^2 = 0, \text{ d. h. } 1 + \alpha = 0 \text{ oder } 1 + \alpha^2 - \alpha(1 + \alpha) = 0.$$

$\alpha + 1 = 0$ gibt $\alpha = -1$, das Minimum; $1 + \alpha^2 - \alpha(1 + \alpha) = 0$ gibt $1 - \alpha = 0$, $\alpha = 1$, also das Maximum, das mithin $\frac{2^2}{2} = 2$ ist, so dass $\frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2}$ für $x = 0$, $y = 0$ nicht unter 0 und nicht über 2 seyn kann.

3) Der Bruch $\frac{\sin x - \sin y}{x - y}$ wird zu $\frac{0}{0}$ für $x = y$. Aber $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\cos y$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -1$, also für $y = x$ ist der Bruch =

$$\frac{\cos x - \alpha \cos x}{1 - \alpha} = \frac{\cos x (1 - \alpha)}{1 - \alpha} = \cos x.$$

4) Der Bruch

$$\frac{4x^2 + 3y + z - 1}{\sin x + tg\, y + l(z)}$$

wird $\frac{0}{0}$ für $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$. Für diese Werthe ist $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 1$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 1$, also der Bruch gleich

$$\frac{3\alpha + \beta}{1 + \alpha + \beta},$$

wo α und β ganz willkürlich sind.

5) Endlich wird die Grösse

$$\frac{\cos^2(x + y) - \cos^2 z}{(x + y)^2 - z^2}$$

zu $\frac{0}{0}$, wenn $y = x$, $z = 2x$. Hier ist $\frac{\partial f}{\partial x} = -2\cos 2x \sin 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2\cos 2x \sin 2x$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 2\cos 2x \sin 2x$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 2.2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2.2x$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -2.2x$, also der Werth des Bruches:

$$\frac{-\cos 2x \sin 2x - \alpha \cos 2x \sin 2x + \beta \cos 2x \sin 2x}{2x + 2\alpha x - 2\beta x} = -\frac{\cos 2x \sin 2x}{2x} \cdot \frac{1 + \alpha - \beta}{1 + \alpha - \beta},$$

so dass derselbe für $x = y$, $z = 2x$ ist: $-\frac{\cos 2x \sin 2x}{2x} = -\frac{\sin 4x}{4x}$.

Digitized by Google

§. 72.

Maxima und Minima für Funktionen mehrerer Veränderlichen.

I. Sey $f(x, y, z, \ldots)$ eine Funktion der unabhängig Veränderlichen $x, y, z, \ldots$, so sagen wir, dieselbe erlange für $x=a$, $y=b$, $z=c, \ldots$ einen grössten Werth, wenn $f(a, b, c, \ldots)$ grösser ist als die Werthe von $f(x, y, z, \ldots)$, worin $x, y, z, \ldots$ nur wenig verschieden sind von $a, b, c, \ldots$; dagegen wird $f(a, b, c, \ldots)$ ein kleinster Werth seyn, wenn diese Grösse kleiner ist, als die so eben angegebenen Werthe (§. 24). Um nun die Werthe $a, b, c, \ldots$ zu erhalten, sey im Allgemeinen $x=a+\alpha u$, $y=b+\beta u$, $z=c+\gamma u, \ldots$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ willkürliche Konstanten sind, u aber sich ändern kann. Nach unserer Erklärung ist nun die Grösse

$$f(a+\alpha u,\ b+\beta u,\ c+\gamma u, \ldots)$$

ein Maximum oder Minimum, wenn $u=0$ ist. Setzt man zur Abkürzung

$$f(a+\alpha u,\ b+\beta u,\ c+\gamma u, \ldots)=F(u),$$

so erlangt also $F(u)$ für $u=0$ einen grössten oder kleinsten Werth. Daraus folgt (§. 24), dass $F'(u)$ für $u=0$ Null seyn muss, d. h. dass $F'(0)=0$ ist. Ist dann $F''(0)>0$, so hat $F(u)$ einen kleinsten Werth erreicht; ist $F''(0)<0$, einen grössten; wäre $F''(0)=0$, so müsste auch $F'''(0)=0$ seyn, und das Zeichen von $F^4(0)$ würde angeben, ob man ein Maximum oder Minimum hätte, u. s. w.

Nun ist (§. 68, IV) allgemein

$$F^n(u)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\beta+\frac{\partial}{\partial z}\gamma+\ldots\right)^n f(x, y, z, \ldots),$$

wo man für $a+\alpha u$, $b+\beta u$, $c+\gamma u, \ldots$ wieder $x, y, z, \ldots$ gesetzt hat. Setzt man hier $u=0$, so heisst diess für $x, y, z, \ldots$ setzen $a, b, c, \ldots$ Daraus folgt zunächst

$$F'(u)=\frac{\partial f}{\partial x}\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\gamma+\ldots,$$

und da für $u=0$, d. h. $x=a$, $y=b$, $z=c, \ldots$ diese Grösse Null seyn muss, was auch immer die ganz willkürlichen Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sind, so wird diess nur dadurch geschehen können, dass jedes Glied für sich Null ist, d. h. dass man hat: *

---

* Es lässt sich diese Behauptung, die wohl an und für sich klar ist, übrigens leicht förmlich erweisen. — Sagt man etwa, $\frac{\partial f}{\partial y}$ müsse nicht Null seyn, so lasse man die (willkürlichen) Grössen $\alpha, \gamma, \ldots$ Null werden, nur β nicht. Alsdann ist $F'(u)=\beta\frac{\partial f}{\partial y}$, was auch jetzt noch für $u=0$ Null seyn; da aber β nicht Null ist, so muss $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ seyn u. s. w.

Dabei ist zu beachten, dass man meint, es müssen in den Gleichungen (a) $x, y, z, \ldots$ durch $a, b, c, \ldots$ ersetzt werden, d. h. dass die aus (a) bestimmten Werthe von $x, y, z, \ldots$ eben die Grössen $a, b, c, \ldots$ seyen.

Digitized by Google

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \ldots \ldots \quad \text{(a)}$$

Bestimmt man nun aus diesen Gleichungen x, y, z, ..., so werden die so erhaltenen Werthe, in f (x, y, z, ...) gesetzt, letztere Grösse zu einem Maximum oder Minimum machen können, d. h. die Werthe a, b, c, ... seyn, die man oben gemeint hat. Ob diess der Fall ist, und welches der beiden eintritt, entscheidet das Zeichen von $F''(0)$. Ist nämlich bei ganz beliebigen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Grösse

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\beta + \frac{\partial}{\partial z}\gamma + \ldots\right)^2 f(x, y, z, \ldots), \quad \text{(b)}$$

in der man $x = a$, $y = b$, $z = c, \ldots$, wie diese Grössen aus (a) folgen, gesetzt hat, positiv, so ist f(a, b, c, ...) ein Minimum; ist sie negativ, so ist f(a, b, c, ...) ein Maximum. Wie man diese so eben allgemein ausgesprochene Bedingung näher fassen kann, wollen wir nun an besonderen Fällen zeigen.

Fall zweier Veränderlichen.

II. Seyen zunächst nur zwei unabhängig Veränderliche x, y vorhanden und a, b ein zusammengehöriges Werthepaar für x, y, gezogen aus den Gleichungen $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Die zu untersuchende Grösse (b) ist hier

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\alpha^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\alpha\beta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\beta^2, \text{*}$$

die wenn $x = a$, $y = b$ gesetzt wird, zu

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2$$

werde, worin also A, B, C die Werthe von $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$ für $x = a$, $y = b$ sind. Da nun identisch, wenn $\beta = m\alpha$:

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 = \alpha^2(A + 2Bm + Cm^2) = \alpha^2 C\left(m^2 + 2\frac{B}{C}m + \frac{A}{C}\right)$$

$$= \alpha^2 C\left[\left(m + \frac{B}{C}\right)^2 - \frac{B^2}{C^2} + \frac{A}{C}\right] = \alpha^2 C\left[\left(m + \frac{B}{C}\right)^2 - \frac{B^2 - AC}{C^2}\right],$$

und, wenn f(a, b) ein Maximum oder ein Minimum seyn soll, diese Grösse immer dasselbe Zeichen haben muss, was auch α und β, oder α und m seyen, so muss auch, was m sey, die Grösse $\left(m + \frac{B}{C}\right)^2 - \frac{B^2 - AC}{C^2}$ immer dasselbe Zeichen haben, da $\alpha^2 C$ sicher immer dasselbe Zeichen beibehält, was auch α sey. Soll aber $\left(m + \frac{B}{C}\right)^2 - \frac{B^2 - AC}{C^2}$ für alle m von demselben Zeichen

---

* Selbstverständlich erhält man diese Grösse auch ohne Anwendung des Satzes in §. 68, IV durch unmittelbare Differenzirung, da $\frac{d^2 F(u)}{du^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\alpha^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\alpha\beta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\beta^2$. Dieselbe Bemerkung gilt auch für den Fall in III.

Digitized by Google

seyn, so muss nothwendig $B^2 - AC$ negativ seyn. Denn wäre $B^2 - AC$ positiv, also $\frac{B^2 - AC}{C^2}$ auch positiv, so mache man m nur $= -\frac{B}{C}$, also $\left(m + \frac{B}{C}\right)^2 = 0$, und obige Grösse wird $= -\frac{B^2 - AC}{C^2}$, also negativ; macht man dagegen m gross genug, damit $\left(m + \frac{B}{C}\right)^2 > \frac{B^2 - AC}{C^2}$ sey, so fällt jene Grösse positiv aus, hat also ein anderes Vorzeichen als vorhin. Ist dagegen $B^2 - AC < 0$, so ist $-\frac{B^2 - AC}{C^2}$ positiv, also $\left(m + \frac{B}{C}\right)^2 - \frac{B^2 - AC}{C^2}$ immer positiv, was auch m sey. Für den Fall, dass $B^2 - AC = 0$, wäre die nämliche Grösse $= \left(m + \frac{B}{C}\right)^2$, also für alle m positiv, ausser für $m = -\frac{B}{C}$, wo sie Null wäre. In diesem Falle hätte man eine weitere Untersuchung nöthig, wie wir sogleich sehen werden, nachdem wir im Augenblicke diesen Fall werden auszuschliessen haben.

Es folgt nun aus dem Vorstehenden, dass $f(a, b)$ weder ein Maximum noch ein Minimum seyn kann, wenn $B^2 - AC$ positiv ist. Ist dagegen $B^2 - AC < 0$, so wird man ein Maximum haben, wenn $C < 0$, da dann $\alpha^2 C \left[\left(m + \frac{B}{C}\right)^2 - \frac{B^2 - AC}{C^2}\right]$ immer negativ ist; ein Minimum dagegen, wenn $C > 0$. Da jetzt $B^2 - AC < 0$, also $B^2 < AC$, und B^2 sicher positiv ist, so müssen nothwendig A und C dasselbe Zeichen haben, also beide positiv, oder beide negativ seyn. Ist diess nicht der Fall, so hat man weder Maximum noch Minimum. Eben so kann jetzt keine der Grössen A oder C Null seyn, da sonst $B^2 - AC = B^2$, also positiv wäre.

Für den Fall nun endlich, dass $B^2 - AC = 0$ wäre, würde zwar $\alpha^2 C \left[\left(m + \frac{B}{C}\right)^2 - \frac{B^2 - AC}{C^2}\right]$ für alle m dasselbe Zeichen haben, wie C, also dieselbe Regel, wie so eben für $B^2 - AC < 0$ gelten, ausser für $m = -\frac{B}{C}$, wo obige Grösse 0 würde, und man nicht wissen kann, ob diese Grösse positiv oder negativ ist. In diesem Falle hätte man in

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\beta\right)^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\alpha^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\alpha^2\beta + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\alpha\beta^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\beta^3$$

zu setzen $\beta = m\alpha = -\frac{B}{C}\alpha$, $x = a$, $y = b$, und es müsste dieselbe 0 werden, wenn man ein Maximum oder Minimum haben sollte. Würde für dieselben Werthe dann

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\beta\right)^4 f = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\alpha^4 + 4\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\,\partial y}\alpha^3\beta + 6\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\alpha^2\beta^2 + 4\frac{\partial^4 f}{\partial x\,\partial y^3}\alpha\beta^3 + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\beta^4$$

positiv, so hätte man wirklich ein Minimum, wenn auch $C > 0$, würde diese Grösse negativ, so hätte man ein Maximum, wenn auch $C < 0$.

Im Allgemeinen wird man jedoch in diesem Falle besser thun, auf

Digitized by Google

anderem Wege sich die Gewissheit zu verschaffen, ob ein Maximum oder ein Minimum vorhanden sey oder nicht.

Fall dreier Veränderlichen.

III. Gesetzt zweitens man habe drei Veränderliche x, y, z, und seyen a, b, c die zu einander gehörigen Werthe derselben, wie sie aus $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, $\frac{\partial f}{\partial z}=0$ folgen. Die Grösse (b), nämlich

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\alpha^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\alpha\beta+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\beta^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\alpha\gamma+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\beta\gamma+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\gamma^2$$

werde zu

$$A\alpha^2+2B\alpha\beta+C\beta^2+2D\alpha\gamma+2E\beta\gamma+F\gamma^2, \qquad (c)$$

wenn man für x, y, z die Werthe a, b, c einsetzt. Man setze nun $\beta=m\alpha$, $\gamma=n\alpha$, so ist diese Grösse (c) gleich

$$\alpha^2[A+2Bm+Cm^2+2Dn+2Emn+Fn^2]=F\alpha^2\left[n^2+2\left(\frac{Em+D}{F}\right)n+\frac{Cm^2+2Bm+A}{F}\right]$$

$$=F\alpha^2\left[\left(n+\frac{Em+D}{F}\right)^2-\left(\frac{Em+D}{F}\right)^2+\frac{Cm^2+2Bm+A}{F}\right]=F\alpha^2\left[\left(n+\frac{Em+D}{F}\right)^2\right.$$
$$\left.-\frac{(E^2-CF)m^2+2(ED-BF)m+D^2-AF}{F^2}\right]$$

$$=\alpha^2F\left\{\left(n+\frac{Em+D}{F}\right)^2-\frac{E^2-CF}{F^2}\left[m^2+2\frac{(ED-BF)}{E^2-CF}m+\frac{D^2-AF}{E^2-CF}\right]\right\}$$

$$=\alpha^2F\left\{\left(n+\frac{Em+D}{F}\right)^2-\frac{E^2-CF}{F^2}\left[\left(m+\frac{ED-BF}{E^2-CF}\right)^2-\left(\frac{ED-BF}{E^2-CF}\right)^2+\frac{D^2-AF}{E^2-CF}\right]\right\}$$

$$=\alpha^2F\left\{\left(n+\frac{Em+D}{F}\right)^2-\frac{E^2-CF}{F^2}\left[\left(m+\frac{ED-BF}{E^2-CF}\right)^2-\frac{(ED-BF)^2-(D^2-AF)(E^2-CF)}{(E^2-CF)^2}\right]\right\}$$

Da nun $\alpha^2 F$ sicher immer sein Zeichen beibehält, so muss auch die in den Klammern befindliche Grösse immer dasselbe Zeichen haben, was auch m und n seyen. Dazu ist, wie in II, nothwendig, dass

$$\frac{E^2-CF}{F^2}\left[\left(m+\frac{ED-BF}{E^2-CF}\right)^2-\frac{(ED-BF)^2-(D^2-AF)(E^2-CF)}{(E^2-CF)^2}\right]$$

immer negativ sey, was auch m sey, so dass die hier in den Klammern befindliche Grösse für alle m immer dasselbe Zeichen haben muss, und zwar das positive, da nothwendig (wie in II), wenn sie dasselbe Zeichen haben soll, $(ED-BF)^2-(D^2-AF)(E^2-CF)<0$, also die eingeklammerte Grösse positiv seyn wird. Mithin muss $E^2-CF<0$ seyn, und es hat dann endlich die Grösse (c) dasselbe Zeichen, wie F. Daraus folgt nun, dass wenn ein Maximum oder Minimum vorhanden seyn soll, nothwendig

$$E^2-CF<0,\ (ED-BF)^2-(D^2-AF)(E^2-CF)<0$$

seyn muss; ist dann $F<0$, so hat man ein Maximum; ist dagegen $F>0$, ein Minimum. Da $E^2<CF$, so haben C und F dasselbe Zeichen; da weiter

Digitized by Google

$(ED-BF)^2 < (D^2 - AF)(E^2 - CF)$, so haben auch D^2-AF und E^2-CF dasselbe Zeichen, d. h. es ist $D^2-AF < 0$, so dass auch A und F dasselbe Zeichen haben. Für den Fall des Maximums oder Minimums haben also A, C, F dasselbe Zeichen, ferner ist $E^2-CF < 0$, $D^2-AF < 0$ und $(ED-BF)^2 - (D^2-AF)(E^2-CF) < 0$. Fällt eine der eben negativ vorausgesetzten Grössen positiv aus, so hat man weder Maximum noch Minimum; fällt eine oder die andere gleich Null aus, so muss man sich durch besondere Untersuchung versichern, welcher Fall hier eintrete.

Man ersieht aus dem Vorstehenden schon, in welcher Weise die Untersuchung fortgeführt werden kann, ohne dass wir die nothwendig weitläufigen Formeln hersetzen.

§. 73.

Relative Maxima und Minima.

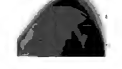
Gesetzt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ seyen n Veränderliche und $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Funktion derselben; zugleich bestehen aber zwischen den n Veränderlichen noch die r Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{r}\varphi_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0,\\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0,\\ \vdots\\ \varphi_r(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0,\end{array}\right\} \quad (a)$$

wo $r < n$, und wo es ferner nicht gerade erforderlich ist, dass in jeder der Gleichungen (a) alle n Veränderlichen vorkommen, nur sollen sich diese Gleichungen nicht widersprechen, und auch nicht der Art seyn, dass einige der Veränderlichen aus ihnen bestimmt werden können, da in diesem Falle diese Veränderlichen bestimmte Werthe hätten, also nicht mehr veränderlich wären. Man soll nun die Werthe von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bestimmen, so dass $F(x_1, \ldots, x_n)$ ein Maximum oder Minimum wird.

Der zunächst sich darbietende Weg scheint hier zu seyn, vermöge der Gleichungen (a) r der Veränderlichen durch die $n-r$ übrigen auszudrücken, ihre Werthe in $F(x_1, \ldots, x_n)$ zu setzen, und dann diese Funktion von $n-r$ unabhängig Veränderlichen nach §. 72 zu behandeln. Dieser Weg ist aber nicht immer der kürzeste, noch der bequemste, und wir wollen desshalb den folgenden einschlagen.

Seyen vermöge der Gleichungen (a) die Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_r$ als Funktionen der unabhängig bleibenden $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ betrachtet, also $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Funktion dieser unabhängig Veränderlichen und der davon abhängenden $x_1, \ldots, x_r$, so werden nach §. 72, I die Differentialquotienten von $F(x_1, \ldots, x_n)$ nach sämmtlichen unabhängig Veränderlichen Null zu setzen seyn. Beachtet man dabei, dass $x_1, \ldots, x_r$ Funktionen jener sind, so erhält man (§. 16):



Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{r+1}}+\frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_{r+1}}+\ldots+\frac{\partial F}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial x_{r+1}}+\frac{\partial F}{\partial x_{r+1}}=0,\\
&\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{r+2}}+\frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_{r+2}}+\ldots+\frac{\partial F}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial x_{r+2}}+\frac{\partial F}{\partial x_{r+2}}=0,\\
&\qquad\vdots\\
&\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}+\frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_n}+\ldots+\frac{\partial F}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial x_n}+\frac{\partial F}{\partial x_n}=0.
\end{aligned}\right\}\text{(b)}$$

Die hier vorkommenden Differentialquotienten $\frac{\partial x_1}{\partial x_{r+1}},\ldots,\frac{\partial x_1}{\partial x_n},\ \frac{\partial x_2}{\partial x_{r+1}},\ldots,$ $\frac{\partial x_2}{\partial x_n},\ldots,\ \frac{\partial x_r}{\partial x_n}$ sind aus den Gleichungen (a) zu entwickeln, indem man jede nach $x_{r+1},\ldots,x_n$ differenzirt (§. 68).

Dadurch erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{r+1}}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_{r+1}}+\ldots+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial x_{r+1}}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{r+1}}=0,\\
&\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{r+2}}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_{r+2}}+\ldots+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial x_{r+2}}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{r+2}}=0,\\
&\qquad\vdots\\
&\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_n}+\ldots+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial x_n}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}=0,
\end{aligned}\right\}(c_1)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{r+1}}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_{r+1}}+\ldots+\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial x_{r+1}}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{r+1}}=0,\\
&\qquad\vdots\\
&\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_n}+\ldots+\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial x_n}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}=0,
\end{aligned}\right\}(c_2)$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{r+1}}+\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_{r+1}}+\ldots+\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial x_{r+1}}+\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_{r+1}}=0,\\
&\qquad\vdots\\
&\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}+\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_n}+\ldots+\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial x_n}+\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_n}=0.
\end{aligned}\right\}(c_r)$$

Diese Gleichungen sind der Anzahl nach $r(n-r)$, eben so viele als zu bestimmende Differentialquotienten, so dass die letzteren aus denselben genau bestimmt werden könnten. Statt aber die Bestimmung derselben unmittelbar vorzunehmen, wollen wir zunächst jede der Gleichungen (c_1) mit einer noch unbestimmten konstanten Grösse k_1 multipliziren; eben so jede der Gleichungen (c_2) mit $k_2,\ldots,$ jede der Gleichungen (c_r) mit k_r. Von den nunmehr erhaltenen Gleichungssystemen $(c_1), (c_2),\ldots, (c_r)$ wollen wir die erste Gleichung jedes Systems zur ersten (b), die zweite jedes Systems zur zweiten (b),..., die letzte jedes Systems zur letzten in (b) addiren, dabei natürlich die Glieder, welche dieselben Differentialquotienten $\frac{\partial x_1}{\partial x_{r+1}},\ldots$ haben, zusammenziehen, und nun annehmen, $k_1, k_2,\ldots, k_r$ werden so bestimmt, dass

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x_1} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \ldots + k_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1} = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial x_2} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \ldots + k_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_2} = 0,\\
&\vdots\\
&\frac{\partial F}{\partial x_r} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_r} + \ldots + k_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (d)$$

Alsdann gibt die angedeutete Addition ganz unmittelbar, dass

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x_{r+1}} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{r+1}} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{r+1}} + \ldots + k_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_{r+1}} = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial x_{r+2}} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{r+2}} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{r+2}} + \ldots + k_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_{r+2}} = 0,\\
&\vdots\\
&\frac{\partial F}{\partial x_n} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \ldots + k_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_n} = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (e)$$

seyn muss. — Die Gleichungen (d), (e), nebst (a), die der Anzahl nach $n+r$ sind, reichen zur Bestimmung der $n+r$ Unbekannten $x_1, \ldots, x_n, k_1, \ldots, k_r$ vollkommen hin, so dass man dieselben dazu benützen wird. * Beachtet man, dass die Gleichungen (d) und (e) nichts Anderes sind als die partiellen Differentialquotienten der Grösse

$$F + k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2 + \ldots + k_r \varphi_r$$

nach den Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die man als von einander unabhängig ansehen würde, so kann man folgende bequeme Regel aufstellen: „Ist $F(x_1, \ldots, x_n)$ eine Funktion der n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$, die ein Maximum oder Minimum werden soll, und bestehen zwischen diesen Veränderlichen noch die r Gleichungen (a), so addire man zu $F(x_1, \ldots, x_n)$ die ersten Seiten der Gleichungen (a), nachdem jede mit einer Konstanten $k_1, k_2, \ldots, k_r$ multiplizirt worden. Von der so erhaltenen Grösse

$$F + k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2 + \ldots + k_r \varphi_r$$

setze man die partiellen Differentialquotienten nach $x_1, x_2, \ldots x_n$, wobei jede dieser Grössen als unabhängig angesehen wird, Null, und erhält, nebst (a) die zur Bestimmung der Unbekannten nöthigen Gleichungen." *

Man erhält nämlich hiedurch die Gleichungen (d) und (e). Einige Beispiele mögen das in §. 72 und 73 Gesagte erläutern.

§. 74.

Beispiele zu §§. 72 und 73.

I. Unter allen ebenen Dreiecken, welche denselben Umfang a haben, das zu suchen, welches die möglich grösste Fläche u hat.

* Keine der Grössen k darf übrigens $= 0$ ausfallen.

Digitized by Google

Seyen x, y, a — x — y die drei Seiten, so ist bekanntlich

$$u^2 = \frac{1}{16} a (a - 2x)(a - 2y)(2x + 2y - a),$$

so dass, da u, also auch $\frac{16u^2}{a}$ ein Maximum seyn soll, man

$$v = (a - 2x)(a - 2y)(2x + 2y - a)$$

ein Maximum zu setzen hat. Hieraus folgt:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2(a - 2y)(2x + 2y - a) + 2(a - 2x)(a - 2y),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2(a - 2x)(2x + 2y - a) + 2(a - 2x)(a - 2y),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -8(a - 2y), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = +4(2x + 2y - a) - 4(a - 2y) - 4(a - 2x),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -8(a - 2x).$$

Also muss seyn

$$-(a - 2y)(2x + 2y - a) + (a - 2x)(a - 2y) = 0, \quad (a - 2y)(4x + 2y - 2a) = 0,$$

$$-(a - 2x)(2x + 2y - a) + (a - 2x)(a - 2y) = 0, \quad (a - 2x)(2x + 4y - 2a) = 0,$$

und da nicht $x = \frac{1}{2}a$ oder $y = \frac{1}{2}a$ seyn kann:

$$4x + 2y - 2a = 0, \quad 2x + 4y - 2a = 0, \quad x = y = \frac{1}{3}a, \quad a - x - y = \frac{1}{3}a,$$

d. h. das Dreieck ist gleichseitig. Für diese Werthe ist

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = A = -\frac{8a}{3}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = B = -\frac{4a}{3}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = C = -\frac{8a}{3},$$

also $B^2 - AC = \frac{16a^2}{9} - \frac{64a^2}{9} = -\frac{48a^2}{9}$, d. h. $B^2 - AC < 0$, und da A und C negativ, so hat man wirklich ein Maximum (§. 72, II),

II. Das rechtwinklige Parallelepiped vom Inhalte a zu finden, das die kleinste Oberfläche u hat.

Drei an einander stossende Kanten seyen $x, y, \frac{a}{xy}$, so ist

$$\frac{1}{2}u = xy + \frac{a}{y} + \frac{a}{x},$$

also

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} = y - \frac{a}{x^2} = 0, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{a}{y^2} = 0, \quad x = y = \sqrt[3]{a}, \quad \frac{a}{xy} = \sqrt[3]{a},$$

so dass das Parallelepiped ein Würfel ist. Hier ist

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2a}{x^3} = 2, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0,$$

also hat man ein Minimum.

III. Die kürzeste oder längste Gerade zwischen zwei Kurven in einer Ebene zu suchen.

Seyen x, y die Koordinaten des Endpunktes dieser Geraden für die erste, β, α für die zweite Kurve, so ist y eine Funktion von x wegen der Gleichung der ersten

Digitized by Google

Kurve; β eine Funktion von α wegen der der zweiten Kurve. Ferner ist das Quadrat der Entfernung

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=u=\text{Max. oder Min.}$$

Hier ist

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}=x-\alpha+(y-\beta)\frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \alpha}=-(x-\alpha)-(y-\beta)\frac{\partial \beta}{\partial \alpha},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+(y-\beta)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial \alpha}=-1-\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}=1+\left(\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right)^2$$
$$-(y-\beta)\frac{\partial^2 \beta}{\partial \alpha^2},$$

worin die Differentialquotienten aus den Gleichungen der zwei Kurven zu ziehen sind.

Aus den Gleichungen des Maximums oder Minimums

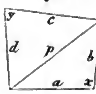
$$x-\alpha+(y-\beta)\frac{\partial y}{\partial x}=0,\ x-\alpha+(y-\beta)\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}=0, \qquad \text{(a)}$$

nebst jenen Kurvengleichungen zieht man die Werthe von x, y, α, β, bestimmt also die Gerade vollständig. Soll ein Maximum oder ein Minimum vorhanden seyn, so muss für die gefundenen Werthe:

$$\left[1+\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial x}\right]^2-\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+(y-\beta)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]\left[1+\left(\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right)^2-(y-\beta)\frac{\partial^2 \beta}{\partial \alpha^2}\right]<0$$

seyn. Aus den Gleichungen (a) folgt leicht, dass der Punkt (α, β) in der im Punkte (x, y) an die erste Kurve errichteten Normale liegt; eben so der Punkt (x, y) in der im Punkte (α, β) an die zweite gezogenen Normale, so dass also die kürzeste oder längste Gerade, wenn sie vorhanden ist, auf beiden Kurven senkrecht steht.

Fig. 41.



IV. Aus vier gegebenen Seiten a, b, c, d soll das möglich grösste Viereck (Fig. 41) gebildet werden.

Sey x der Winkel, den die Seiten a und b, y der, den c und d mit einander machen, so muss in den beiden Dreiecken, in denen p (Diagonale) vorkommt:

$$p^2=a^2+b^2-2ab\cos x,\ p^2=c^2+d^2-2cd\cos y,$$

so dass also

$$a^2+b^2-2ab\cos x=c^2+d^2-2cd\cos y$$

seyn wird. Ferner ist der Flächeninhalt des Vierecks

$$\tfrac{1}{2}ab\sin x+\tfrac{1}{2}cd\sin y,$$

welche Grösse ein Maximum seyn muss. Gemäs §. 73 hat man nun die Differentialquotienten nach y und x von

$$\tfrac{1}{2}ab\sin x+\tfrac{1}{2}cd\sin y+k(a^2+b^2-c^2-d^2-2ab\cos x+2cd\cos y)$$

Null zu setzen, d. h. man hat:

$$\tfrac{1}{2}ab\cos x+2kab\sin x=0,\ \tfrac{1}{2}cd\cos y-2kcd\sin y=0.$$

Hieraus:

$$k=-\frac{\cos x}{4\sin x},\ \tfrac{1}{2}\cos y+\frac{\cos x\sin y}{2\sin x}=0,\ \sin x\cos y+\cos x\sin y=0,$$

d. h.

$$\sin(x+y)=0,\ x+y=\pi,$$

Digitized by Google

da nicht $x + y = 0$ oder 2π seyn kann. Also $y = \pi - x$ und $\cos y = -\cos x$, mithin

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos x = c^2 + d^2 + 2cd\cos x,\quad \cos x = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(cd + ab)},$$

welche Gleichung x bestimmt; y ist dann $= \pi - x$. (Um das Viereck kann, wegen $x + y = \pi$, ein Kreis beschrieben werden.)

V. Man soll einen abgekürzten Kegel bilden so, dass der obere Halbmesser $= m$ mal dem unteren, seine Oberfläche gegeben $= a$ und sein Inhalt der möglich grösste sey.

Sey x der untere Halbmesser, y die Höhe, so ist mx der obere und also die Oberfläche

$$a = x^2\pi + m^2x^2\pi + \tfrac{1}{2}(2\pi x + 2m\pi x)\sqrt{y^2 + (x - mx)^2},$$

$$a = \pi[(1 + m^2)x^2 + (1 + m)x\sqrt{y^2 + (m - 1)^2x^2}].$$

Der Inhalt ist $\frac{1}{3}\pi y(x^2 + mx^2 + m^2x^2) = \frac{1}{3}\pi yx^2(1 + m + m^2)$, und diese Grösse ist ein Maximum, wenn yx^2 es ist. Also hat man die Differentialquotienten von

$$yx^2 + k\pi\left[(1 + m^2)x^2 + (1 + m)x\sqrt{y^2 + (1 - m)^2x^2} - \frac{a}{\pi}\right]$$

nach x und y Null zu setzen. Daraus

$$2xy + 2k\pi(1 + m^2)x + k\pi(1 + m)\sqrt{y^2 + (1 - m)^2x^2} + \frac{k\pi(1 + m)x^2(1 - m)^2}{\sqrt{y^2 + (1 - m)^2x^2}} = 0,$$

$$x^2 + \frac{k\pi(1 + m)xy}{\sqrt{y^2 + (1 - m)^2x^2}} = 0.$$

Hieraus folgt

$$k\pi = -\frac{x\sqrt{y^2 + (1 - m)^2x^2}}{(1 + m)y},$$

und wenn man diess in die erste Gleichung einsetzt:

$$2y - \frac{2(1 + m^2)x}{1 + m}\cdot\frac{\sqrt{y^2 + (1 - m)^2x^2}}{y} - \frac{y^2 + (1 - m)^2x^2}{y} - \frac{x^2(1 - m)^2}{y} = 0,$$

d. h.

$$2(1 + m)y^2 - 2(1 + m^2)x\sqrt{y^2 + (1 - m)^2x^2} - [y^2 + (1 - m)^2x^2](1 + m) - x^2(1 - m)^2(1 + m) = 0,$$

$$(1 + m)[y^2 - 2(1 - m)^2x^2] - 2(1 + m^2)x\sqrt{y^2 + (1 - m)^2x^2} = 0,$$

oder wenn man durch x^2 dividirt und $\left(\frac{y}{x}\right)^2 = z$ setzt:

$$(1 + m)[z - 2(1 - m)^2] = 2(1 + m^2)\sqrt{z + (1 - m)^2},$$

woraus durch Quadrirung:

$$(1 + m)^2[z^2 - 4(1 - m)^2z + 4(1 - m)^4] = 4(1 + m^2)^2[z + (1 - m)^2],$$

$$z^2 - 4\left\{(1 - m)^2 + \frac{(1 + m^2)^2}{(1 + m)^2}\right\}z = \frac{4(1 + m^2)^2(1 - m)^2 - 4(1 - m)^4(1 + m)^2}{(1 + m)^2}$$

$$z^2 - 8\frac{(1 + m^4)}{(1 + m)^2}z = \frac{16(1 - m)^2m^2}{(1 + m)^2},$$

$$z = 4\frac{(1 + m^4)}{(1 + m)^2} \pm \frac{4}{(1 + m)^2}\sqrt{m^2(1 - m)^2(1 + m)^2 + (1 + m^4)^2}$$

$$= \frac{4}{(1 + m)^2}[1 + m^4 \pm \sqrt{m^2(1 - m^2)^2 + (1 + m^4)^2}].$$

Digitized by Google

Da $z = \frac{y^2}{x^2}$, so findet sich hieraus $\frac{y}{x}$, also y in x ausgedrückt, und dann ergibt sich aus der Gleichung $a = \pi[(1+m^2)x^2 + (1+m)x\sqrt{y^2+(1-m)^2x^2}]$ selbst x. Da $\sqrt{m^2(1-m^2)^2+(1+m^4)^2} > 1+m^4$, so gilt nur das obere Zeichen; ist also

$$\frac{2}{1+m}\sqrt{[1+m^4+\sqrt{(1+m^2)(1+m^6)}]} = \lambda,$$

so ist

$$y = \lambda x, \quad x = \sqrt{\frac{a}{\pi[1+m^2+(1+m)\sqrt{\lambda^2+(1-m)^2}]}}.$$

Für $m = 1$ folgt hieraus $\lambda = 2$, $y = 2x$, $x = \sqrt{\frac{a}{6\pi}}$ (vergl. §. 25, XI). Für $m = 0$ hat man einen vollständigen Kegel und es ist $\lambda = 2\sqrt{2}$, $y = 2\sqrt{2}x$, $x = \sqrt{\frac{a}{\pi(1+3)}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{\pi}}$.

VI. Eine Zisterne soll eine bestimmte Menge Wasser aufnehmen können und in der Form eines rechtwinkligen Parallelepipeds hergestellt werden so, dass die innere Verkleidung möglichst klein ausfalle.

Also ist, wenn x, y, z die drei an einander stossenden Kanten sind:

$$xyz - a = 0, \quad xy + 2xz + 2yz = \text{Minimum}.$$

Daraus wie früher:

$$y + 2z + kyz = 0, \quad x + 2z + kxz = 0, \quad 2x + 2y + kxy = 0, \quad xyz = a.$$

Man zieht hieraus:

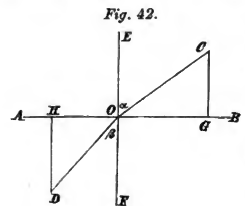
$$y - x + kz(y-x) = 0, \quad (y-x)(1+kz) = 0,$$

also $y = x$ oder $1 + kz = 0$; im letzteren Falle $k = -\frac{1}{z}$, $y + 2z - y = 0$, $2z = 0$, was unmöglich ist; also $y = x$, dann

$$4x + kx^2 = 0, \quad k = -\frac{4}{x}, \quad x + 2z - 4z = 0, \quad z = \frac{1}{2}x; \quad \frac{x^3}{2} = a, \quad x = \sqrt[3]{2a}, \quad y = \sqrt[3]{2a},$$
$$z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2a}.$$

VII. AB sey Trennungsfläche zweier Räume, in denen ein (Licht-) Körper sich mit ungleicher Geschwindigkeit bewegt, im Raume AEB nämlich mit der Geschwindigkeit v_1, in AFB mit v_2 (beide konstant). Welchen Weg muss dieser Körper einschlagen, um in der kürzesten Zeit von C nach D zu gelangen?

Fig. 42.



Sicher wird er in jedem der zwei Räume in gerader Linie sich bewegen, also etwa den Weg COD einhalten, und AB in O treffen. Man fälle von C und D auf AB die Senkrechten CG, DH und sey $CG = a$, $DH = b$, $GH = c$, $GO = x$, $OH = y$, so ist

$$OC = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad OD = \sqrt{b^2 + y^2},$$

so dass (§. 20, VII)

$$\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+y^2}}{v_2} = \text{Minimum},$$

während $x + y = c$ ist. Demnach hat man

$$\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+y^2}}{v_2} + k(x + y - c),$$

nach x und y zu differenziren u. s. w., wodurch man erhält:

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} + k = 0, \quad \frac{y}{v_2\sqrt{b^2+y^2}} + k = 0, \quad \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{v_1}{v_2}\,\frac{y}{\sqrt{b^2+y^2}}.$$

Ist EF senkrecht auf AB, COE $= \alpha$, FOD $= \beta$, so ist $\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $\sin\beta = \frac{y}{\sqrt{b^2+y^2}}$, so dass also

$$\sin\alpha = \frac{v_1}{v_2}\sin\beta$$

seyn muss. (Gesetz der Lichtbrechung.)

Allgemeiner Zusatz, die Rechnung mit unendlich kleinen Grössen betreffend.

§. 75.

Ordnungen unendlich kleiner Grössen.

I. Wir haben mehrfach von unendlich kleinen Grössen gesprochen und dieselben (§. 11) erklärt als Grössen, die kleiner sind als jede noch so kleine Grösse. In anderer Form werden wir auch sagen, eine Grösse deren Werth so klein gemacht werden kann, als man nur will (der Null beliebig nahe gebracht werden könne) sey unendlich klein.

Ist ε eine solche Grösse, so ist ε^2 natürlich ebenfalls unendlich klein, jedoch in stärkerem Maasse, und wir nennen dieselbe eine unendlich kleine Grösse der zweiten Ordnung; eben so ε^3 eine der dritten Ordnung u. s. w. — Allgemein werden wir eine unendlich kleine Grösse μ in Bezug auf ε von der m^{ten} Ordnung nennen, wenn der Quotient $\frac{\mu}{\varepsilon^r}$ für $r < m$ unendlich klein, für $r > m$ aber unendlich gross ist,* während er für $r = m$ endlich ist.

* Ist ε unendlich klein, so ist $\frac{1}{\varepsilon}$, überhaupt $\frac{a}{\varepsilon}$ (wo a endlich) unendlich gross, d. h. wächst mit abnehmendem ε über alle Grössen hinaus.

Digitized by Google

Sind zwei Grössen so beschaffen, dass ihr (vermeintlicher) Unterschied unendlich klein ist, so müssen sie gleich seyn. Denn wenn der Unterschied $= \alpha$ wäre, wo α klein aber bestimmt, so würde diess dagegen streiten, dass dieser Unterschied beliebig klein gemacht werden kann. Demnach ist derselbe durch keine auch noch so kleine bestimmte Zahl anzugeben, muss also Null seyn. — Ist eben so der Quotient zweier Grössen von 1 nur um eine unendlich kleine Grösse verschieden, so müssen die beiden Grössen gleich seyn.

Man pflegt diess manchmal auch so auszudrücken, dass man sagt, man könne unendlich kleine Grössen neben endlichen, die höherer Ordnung neben denen niederer Ordnung vernachlässigen. Darunter ist aber nicht eine Annäherung zu verstehen, vielmehr müssen, nach dem eben Gesagten, diese unendlich kleinen Grössen weggelassen werden.

II. Hierauf hat man die Rechnung mit unendlich kleinen Grössen gegründet. Ist etwa die unendlich kleine Aenderung von x^2 zu bestimmen, für eine unendlich kleine Aenderung dx von x, so setzt man (§. 11) $d(x^2) = (x+dx)^2 - x^2 = 2x dx + (dx)^2$ und vernachlässigt nun $(dx)^2$, als unendlich klein der zweiten Ordnung, gegen $2x dx$, so dass $d(x^2) = 2x dx$. Dass diess darauf hinausläuft, das Verhältniss von $d(x^2)$ gegen dx (bei unendlich kleinem dx) zu ermitteln, ist leicht zu übersehen. Dieses findet sich nämlich: $\frac{d(x^2)}{dx} = 2x + dx$, wo nun (nach I) dx zu verwerfen ist, indem $\frac{d(x^2)}{dx}$ und $2x$ nur um eine unendlich kleine Grösse verschieden, also gleich seyn müssen. — Auch der Satz in §. 7, IV, der in §. 41, I, §. 45, I u. s. w. wiederholt wurde, gehört hieher. Wir wollen jedoch auf denselben nicht besonders eingehen, da die genaue Begründung am besten immer geführt wird, wie an den betreffenden Stellen geschehen.

Behandlung von Aufgaben, in denen stetige Funktionen vorkommen.

III. Bei Aufgaben, in denen Grössen vorkommen, die sich stetig ändern, haben wir immer die Betrachtung der Gränzen angewendet, d. h. wir haben die unabhängig Veränderliche sich um eine endliche Grösse ändern lassen und angenommen, die abhängige Grösse ändere sich während dieser Aenderung nicht, sondern springe bloss am Ende in den neuen Zustand über. Sprachen wir diess auch nicht in der eben gewählten Form aus, so ist dieselbe doch den Anschauungen zu Grunde gelegt worden.

So dachten wir uns, als in §. 11 die Richtung der Tangente bestimmt wurde, es bleibe die Kurve (Fig. 1) von $x = OD$ bis OE (wo $DE = \Delta x$) eine Gerade, ändere also ihre Richtung nicht, bestimmten die Richtung dieser Geraden und sagten dann, diese Richtung sey die der Tangente, wenn Δx unendlich klein. Wäre nämlich das Kurvenstück MN geradlinig, so hätte man für dasselbe $tg\,NMQ = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ und also fände sich $tg\,SMQ = Gr\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x}$.



Digitized by Google

Wenn wir weiter in §. 20, VI den Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}$ bestimmten, so sahen wir das Stückchen QQ' der sich drehenden Kurve (Fig. 5) als geradlinig an und bestimmten den Inhalt der entstandenen Fläche $= 2(y+\frac{1}{2}\Delta y)\pi \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, oder, wenn wir PP' sofort unendlich klein setzen, $= 2(y+\frac{1}{2}dy)\pi\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$. Ist dz das wirkliche Flächenstück, so setzten wir — als aus der Natur der Sache hervorgehend — voraus, der Quotient $\frac{dz}{2(y+\frac{1}{2}dy)\pi\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}$ nähere sich unbegränzt der Einheit d. h. also, er sey von der Einheit nur um eine unendlich kleine Grösse verschieden (Nr. I). Daraus dann ergab sich das Resultat.

IV. In §. 49, II hätten wir übrigens dieses Resultat nicht nöthig gehabt. Dreht sich NN' (Fig. 32) um OM', so denke man sich MM' in gleiche (unendlich kleine) Theile dx getheilt, ziehe die Ordinaten und schreibe nun in die Kurve einen geradlinigen Zug (Vieleckstück) ein, dessen Eckpunkte mit den Endpunkten der Ordinaten zusammenfallen. Die Flächen, welche durch die einzelnen Seiten erzeugt wurden, sind wie so eben durch $2(y+\frac{1}{2}dy)\pi \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ gegeben; die Summe all' derselben ist $2\Sigma(y+\frac{1}{2}dy)\pi \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$, wo das Σ-Zeichen bedeutet, man solle x von a bis b (OM bis OM') um die Unterschiede dx fortschreiten lassen, und die einzeln erhaltenen Werthe addiren. — Je kleiner dx, desto genauer ist diese Summe der Fläche, die man berechnen soll, gleich. Der Gränzwerth von $2\Sigma(y+\frac{1}{2}dy)\pi\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ ist also diese Fläche. Aber der Gränzwerth von $\Sigma y\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$, d. h. von $\Sigma y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$ ist $\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\partial x$, der von $\Sigma dy\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$, d. h. von $dx\Sigma\frac{dy}{\partial x}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$ aber Null, so dass man $2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\partial x$ als Werth der Fläche erhält.

In etwas strengerer Form wäre $\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}dx+\alpha dx$, wo $Gr\,\alpha = 0$ d. h. α unendlich klein, indem $Gr\frac{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$ [§. 15, I], eben so $\frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}\frac{\partial y}{\partial x}dx+\beta dx$, wo $Gr\,\beta = 0$. Also hätte man

$$\Sigma(y+\tfrac{1}{2}dy)\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \Sigma(y+\tfrac{1}{2}\frac{\partial y}{\partial x}dx+\beta dx)\left[\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,dx+\alpha dx\right] =$$

$$\Sigma y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}dx+\tfrac{1}{2}dx\,\Sigma\frac{\partial y}{\partial x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}dx+dx\,\Sigma\beta\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}dx$$

$$+\Sigma y\alpha dx+\tfrac{1}{2}dx\,\Sigma\alpha\frac{\partial y}{\partial x}dx+dx\,\Sigma\alpha\beta dx.$$

Digitized by Google

Aber für unbegränzt abnehmende dx ist (§. 39, I):

$$\Sigma y \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, dx = \int_a^b y \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, \partial x,$$

$$\Sigma \frac{\partial y}{\partial x} \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, dx = \int_a^b \frac{\partial y}{\partial x} \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, \partial x;$$

ferner ist (wie aus §. 7, IV oder §. 41, I erhellt) $\Sigma \beta \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, dx$ selbst unendlich klein und eben so $\Sigma \alpha y\, dx$, $\Sigma \alpha \frac{\partial y}{\partial x} dx$, $\Sigma \alpha \beta\, dx$, indem $\beta \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$, αy, $\alpha \frac{\partial y}{\partial x}$, $\alpha\beta$ unendlich klein sind, also sind die Gränzwerthe dieser Grössen Null. Da nun, wegen des Faktors dx, auch $dx\,\Sigma \frac{\partial y}{\partial x} \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, dx$, unendlich klein, so ist also die zu berechnende Fläche $= 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, \partial x + k$, wo k unendlich klein, d. h. (Nr. I) sie ist geradezu $2\pi \int_a^b y \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, \partial x$.

Man hätte also in $2\pi\, \Sigma (y + \frac{1}{2} dy) \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = 2\pi\, \Sigma [y\, dx + \frac{1}{2} \frac{dy}{dx} (dx)^2] \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ sofort $\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x}$ setzen und $\frac{1}{2} \frac{dy}{dx} (dx)^2$ neben $y\, dx$ verwerfen dürfen, woraus sich dann

$$2\pi\, \Sigma y \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, \partial x$$

als richtig ergeben hätte.

V. Wenn wir in §. 20, VII den Werth von v ermittelten in strenger Weise, so hätte diess jetzt auch so geschehen können.

Fig. 43.

A M N

Ist der Körper nach M zur Zeit t gelangt und ist dort v seine Geschwindigkeit, so wollen wir annehmen, der Körper bleibe während der Zeit dt, die auf t folge, in demselben Zustand der Bewegung, den er in M hatte. Diess ist nun nicht richtig, aber es nähert sich um so mehr der Wahrheit, je kleiner dt ist. Am Ende der Zeit dt werde dann die Geschwindigkeit plötzlich $v + dv$; überdiess sei der während dieser Zeit durchlaufene Weg $MN = dx$. Da die Bewegung gleichförmig ist, so ist (nach der Note zu §. 20, VII) die Geschwindigkeit v gleich dem Wege, dividirt durch die dazu verwendete Zeit, d. h. $v = \frac{dx}{dt}$ $\left(\text{oder nach unserer früheren Bezeichnung: } v = \frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$. Diese Gleichung wird mehr und mehr richtig, je kleiner dt ist; sie ist also für die Gränzwerthe genau richtig. Daraus folgt, da v sich mit dt nicht ändert, sofort $v = \frac{\partial x}{\partial t}$. *

* Wir unterscheiden zwischen der Bedeutung von $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{\partial x}{\partial t}$. Ersteres ist der Quotient



Digitized by Google

VI. Ist also eine erhaltene Gleichung so beschaffen, dass man von ihr aussagen kann, sie sei um so mehr genau richtig, je kleiner gewisse darin vorkommende Grössen sind, so wird sie vollkommen richtig, wenn man zu den Gränzen übergeht (siehe noch XIII). Wir wollen, zur Erläuterung, von diesem Satze noch einige Beispiele aufführen.

Wärmebewegung in einem dünnen Stabe.

VII. Die Grundannahmen, die wir dabei machen, sind die folgenden: Bezeichnen wir mit k die Wärmemenge, welche in der Zeit 1 durch einen Querschnitt, dessen Fläche = 1, strömt, wenn die Länge des Stabes = 1, und der sich gleich bleibende Temperaturunterschied seiner Enden = 1 ist, so nehmen wir an, dass in der Zeit t durch den Querschnitt ω, wenn die Stablänge L und der sich gleich bleibende Temperaturunterschied seiner Enden u ist, die Wärmemenge $\frac{k\omega t u}{L}$ ströme, welche Annahme als desto mehr richtig angesehen werden soll, je kleiner ω, L, t, u sind. Man kann sich hievon in folgender Weise überzeugen. Dass wenn Zeit, Stablänge, Temperaturunterschied der Enden des Stabs und Querschnitt desselben sämmtlich = 1 sind, durch jeden Querschnitt des Stabes dieselbe Wärmemenge fliesse, ist wohl klar, da ja die Enden immer denselben Temperaturunterschied haben, also auch immer dieselbe Wärmemenge durch den Stab geht; in der Zeit t fliesst also k t durch den Querschnitt 1, k ω t durch den Querschnitt ω, und k ω t u durch denselben, wenn u der Temperaturunterschied ist; zum Mindesten ist die Annahme die einfachste, es sey die durchströmende Wärmemenge dem Temperaturunterschiede proportional. Bis jetzt war die Stablänge = 1; da durch jeden Querschnitt immer dieselbe Wärmemenge strömt, so wird die Temperatur im Stabe proportional mit der Länge abnehmen, also in der Mitte nur halb so viel vom Anfange verschieden seyn, als am Ende. Würde daher der Stab auf die Hälfte reduzirt, und es sollte noch dieselbe Temperaturdifferenz herrschen, so müsste die durchströmende Wärmemenge das Doppelte seyn, also überhaupt umgekehrt proportional der Länge.

Sey nun (Fig. 43) v die Temperatur zur Zeit t in dem Querschnitt bei M; A M = x; der Querschnitt bei M gleich ω, wo ω zwar von x abhängen aber immer sehr klein seyn soll, so dass wir annehmen dürfen, die Temperatur in dem ganzen Querschnitt sey in allen Punkten dieselbe = v; MN = Δx (unendlich klein); Δt die Zunahme der Zeit (ebenfalls unendlich klein); c die spezifische Wärme des Stabes, d. h. die Wärmemenge, welche nöthig ist, die Gewichtseinheit vom Stoffe des Stabes um 1° der Temperatur zu erhöhen, wo c als für alle Querschnitte gleich vorausgesetzt wird; ϱ sey das spezifische

der (unendlich kleinen) Grössen dx, dt; letzteres kurzweg der Differentialquotient. Nach unserer gewöhnlichen Bezeichnung schreiben wir den ersten Bruch: $\frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Digitized by Google

Gewicht des Körpers, ebenfalls unveränderlich (Gewicht der Kubikeinheit); endlich sey die Wärmemenge 1 gleich der Wärmemenge, welche die Gewichtseinheit reinen Wassers um 1° in ihrer Temperatur erhöht.

Wir nehmen nun an, in dem Körperstücke MN bleibe Alles, wie es in M war, also v und ω, und erst in N werden diese Grössen plötzlich zu $v+\Delta v$, $\omega+\Delta\omega$, wo (für dieselbe Zeit t) Δv, $\Delta\omega$ die Aenderungen von v und ω sind für blosse Aenderung von x. Wir werden diess also genauer durch $\Delta_x v$, $\Delta_x \omega$ bezeichnen. Aendert sich überdiess die Zeit um Δt, so nehmen wir an, während dieser Zeit bleibe die Temperatur in MN gleich v und springe am Ende derselben plötzlich in $v+\Delta_t v$ über, wo $\Delta_t v$ die Aenderung von v ist, die man erhält, wenn bloss t sich ändert. [Also ist $v+\Delta_x v$ die Temperatur in N zur Zeit t, $v+\Delta_t v$ die in M zur Zeit $t+\Delta t$, welche zu derselben Zeit in dem ganzen Stücke MN herrscht, in N aber $v+\Delta_t v+\Delta_x(v+\Delta_t v)$ seyn muss]. Für alle diese Annahmen gilt nun die Bemerkung in VI.

Das Gewicht des Körperstücks MN ist $\varrho\,\omega\,\Delta x$; seine Temperatur nimmt um $\Delta_t v$ zu, so dass dazu die Wärmemenge $c\varrho\omega\,\Delta x\,\Delta_t v$ verwendet werden musste. Diese kann nun nur erhalten werden durch diejenige Wärme, welche in den Querschnitt bei M einströmt und nicht durch den in N wieder abfliesst, diese noch vermindert um diejenige Wärmemenge, welche von der Oberfläche des Körperstücks ausgestrahlt wird.

Zur Zeit t sind die Temperaturen in M und N: v, $v+\Delta_x v$, ihr Unterschied also $-\Delta_x v$ (die in N die kleinere); demnach strömt in der Zeit Δt durch M (nach den oben gemachten Voraussetzungen) die Wärmemenge $-\frac{k\omega\,\Delta t\,\Delta_x v}{\Delta x} = -k\omega\,\Delta t\frac{\Delta_x v}{\Delta x}$. Durch den Querschnitt N strömt in derselben Zeit folglich die Wärmemenge $-k\omega\,\Delta t\frac{\Delta_x v}{\Delta x}+\Delta_x\left(-k\omega\,\Delta t\frac{\Delta_x v}{\Delta x}\right)$, indem von dem einen zum andern Querschnitt übergegangen wird, wenn man bloss x in $x+\Delta x$ übergehen lässt. Es strömt also weniger durch N als durch M: $-\Delta_x\left(-k\omega\,\Delta t\frac{\Delta_x v}{\Delta x}\right) = +\Delta t\,\Delta_x\left(k\omega\frac{\Delta_x v}{\Delta x}\right)$. — Ist γ die Wärmenge, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit bei einem Temperaturunterschied $=1^\circ$ ausstrahlt; w der Umfang des Schnittes; b die äussere (unveränderliche) Temperatur: so strahlt durch MN in der Zeit Δt aus: $\gamma\,w\,\Delta x\,\Delta t\,(v-b)$. Demnach bleibt in MN zurück die Wärmemenge

$$\Delta t\,\Delta_x\left(k\omega\frac{\Delta_x v}{\Delta x}\right)-\gamma\,w\,\Delta x\,\Delta t\,(v-b).$$

Diese muss gleich der oben angegebenen $c\varrho\omega\,\Delta x\,\Delta_t v$ seyn, so dass

$$\Delta t\,\Delta_x\left(k\omega\frac{\Delta_x v}{\Delta x}\right)-\gamma\,w\,\Delta x\,\Delta t\,(v-b)=c\varrho\omega\,\Delta x\,\Delta_t v,$$

$$\frac{\Delta_x}{\Delta x}\left(k\omega\frac{\Delta_x v}{\Delta x}\right)-\gamma\,w\,(v-b)=c\varrho\omega\frac{\Delta_t v}{\Delta t}$$

ist, welche Gleichung erst an den Gränzen genau ist. Dort heisst sie

Digitized by Google

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\omega\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\gamma w(v-b)=c\varrho\omega\frac{\partial v}{\partial t}. \quad (1)$$

Sind k und ω im ganzen Stabe unveränderlich, so hat man

$$k\omega\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\gamma w(v-b)=c\varrho\omega\frac{\partial v}{\partial t},\quad \frac{\partial v}{\partial t}=\frac{k}{c\varrho}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\gamma w}{c\omega\varrho}(v-b). \quad (2)$$

Die oben angegebene Grösse $-\frac{k\omega\Delta_x v\Delta t}{\Delta x}=-k\omega\frac{\Delta_x v}{\Delta x}\Delta t$ hätte hiernach sofort gleich $-k\omega\frac{\partial v}{\partial x}\Delta t$ gesetzt werden können, wobei $-k\omega\frac{\partial v}{\partial x}$ die Wärmemenge wäre, welche in der Zeiteinheit durch M strömen würde, wenn die Dinge während dieser Zeit in demselben Zustande blieben. — Uebrigens setzt unsere Ableitung nicht voraus, dass der Stab geradlinig sey; nur muss dann x nach einer Linie gerechnet werden, die auf allen Querschnitten senkrecht steht.

Wärmebewegung in einem beliebigen Körper.

VIII. Wir wollen uns nun irgend einen Körper und im Innern desselben einen Punkt M denken, der jedenfalls von der Oberfläche weit genug entfernt sey, um nicht nach Aussen Wärme strahlen zu können.

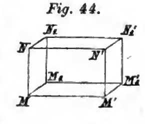


Fig. 44.

Am Schlusse der Zeit t sey v die Temperatur des Punktes M, dessen rechtwinklige Koordinaten x, y, z sind. Denken wir uns durch M ein rechtwinkliges Parallelepiped MN_1' gelegt, dessen Kanten $MM'=\Delta x$, $MN=\Delta z$, $MM_1=\Delta y$ parallel mit den Koordinatenaxen (und unendlich klein) seyen. Sey ϱ das spezifische Gewicht des Körpers (in M, wenn ϱ veränderlich seyn sollte); c die spezifische Wärme (in dem betreffenden Punkt und bei der Temperatur v).

Der Inhalt des Parallelepipeds ist $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$, sein Gewicht $\varrho\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$; die Temperatur desselben am Ende der Zeit $t+\Delta t$ (in der ganzen Ausdehnung des Körperchens) wird $v+\Delta_t v$ seyn, wofür wir auch sofort $v+\frac{\partial v}{\partial t}\Delta t$ setzen können, da endgiltig doch $\frac{\Delta_t v}{\Delta t}$ zu stehen käme und diess gleich $\frac{\partial v}{\partial t}$ wäre. Um diese Temperatur-Erhöhung hervorzubringen, war die Wärmemenge $c\varrho\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\frac{\partial v}{\partial t}\Delta t$ nothwendig, welche nun durch die in das Körperelement einströmende, vermindert um die abströmende Wärme geliefert wird.

Hat k dieselbe Bedeutung wie in VII (die innere Leitungsfähigkeit), so wird in der Zeit Δt durch die auf der Axe der x senkrechte Fläche MNM_1N_1, welche die Temperatur v hat, die Wärmemenge $-k\,\Delta y\,\Delta z\frac{\partial v}{\partial x}\Delta t$ geflossen seyn, was wie in VII gefunden wird. Durch die entgegenstehende Fläche $M'M_1'N'N_1'$ fliesst ab die Wärmemenge $-k\,\Delta y\,\Delta z\frac{\partial v}{\partial x}\Delta t+\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\,\Delta y\,\Delta z\frac{\partial v}{\partial x}\Delta t\right)\Delta x=-k\,\Delta y\,\Delta z\frac{\partial v}{\partial x}\Delta t-\Delta y\,\Delta z\,\Delta t\,\Delta x\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial v}{\partial x}\right)$, so dass in dem

Digitized by Google

Körper bleibt: $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial v}{\partial x}\right)$. Eben so bleiben in dem Körper, wegen der Ströme parallel mit den Axen der y und z: $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial v}{\partial y}\right)$, $\Delta z \Delta y \Delta z \Delta t \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial v}{\partial z}\right)$. Demnach ist

$$c \varrho \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right],$$

d. h.

$$c \varrho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial v}{\partial z}\right). \tag{3}$$

Ist k im ganzen Körper konstant, so ist

$$c \varrho \frac{\partial v}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right). \tag{4}$$

Besondere Fälle.

IX. Wir wollen annehmen, der Körper bestehe aus konzentrischen Kugelschichten der Art, dass in jeder Schichte die Beschaffenheit desselben überall dieselbe sey, sich aber von Schichte zu Schichte ändern könne; ferner wollen wir annehmen, es sey ursprünglich die Temperatur in allen Punkten, die gleich weit vom Mittelpunkte abstehen, dieselbe gewesen, so wird sie es auch später bleiben und also v nur von r, d. h. der Entfernung vom Mittelpunkte, abhängen. Die Grössen k, c, ϱ werden sich von Schichte zu Schichte ändern, in derselben Schichte wollen wir k als konstant voraussetzen. Alsdann ist (§. 69, Nr. 3):

$$c \varrho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{d^2(r v)}{d r^2}. \tag{5}$$

X. Besteht ein Körper in ähnlicher Weise aus zylindrischen Schichten und beziehen wir die Koordinaten eines Punktes auf ein Koordinatensystem, das wir das zylindrische nennen können und das durch die Formeln

$$x = r \cos \omega, \quad y = r \sin \omega, \quad z = z$$

ausgesprochen ist, wo r die Entfernung des Punktes von der gemeinschaftlichen Zylinderaxe bezeichnet, ω den Winkel, den r mit der Axe der x macht, so ist (§. 69, Nr. 1):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r},$$

wenn wir wieder voraussetzen, es sey v von ω unabhängig. Also ist jetzt:

$$c \varrho \frac{\partial v}{\partial t} = k\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right], \tag{6}$$

wo wir c, ϱ, k innerhalb derselben Schichte als konstant voraussetzen. Ist zugleich v von z unabhängig, d. h. setzen wir voraus, es sey zu einer bestimmten Zeit in gleicher Entfernung von der Axe auch dieselbe Temperatur, so ist

$$c \varrho \frac{\partial v}{\partial t} = k\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}\right]. \tag{6'}$$

Digitized by Google

Bedingung wegen der Gränzen.

XI. Angenommen, der Körper befinde sich in einem Raume, der beständig dieselbe Temperatur ξ habe. Sey weiter u die Temperatur an der Oberfläche des Körpers, mit der er jenen Raum berührt, ω ein (unendlich kleines) Element derselben, k der Koeffizient der innern Leitungsfähigkeit, γ der der Ausstrahlungsfähigkeit (Nr. VII). Die Wärmemenge, welche im Zeitelemente Δt durch ω strömt, ist $-k\frac{\partial u}{\partial n}\omega\Delta t$, wo n die Normale an die Oberfläche in dem betreffenden Punkte bedeutet (was ganz wie in Nr. VII bewiesen wird); die Wärmemenge, die durch dasselbe Element ausstrahlt, ist $\gamma(u-\xi)\,\omega\,\Delta t$, so dass, indem diese Mengen gleich seyn werden:

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}=\gamma(u-\xi). \tag{7}$$

Die Normale ist dabei nach dem äusseren Theile des Körpers gerichtet.

Wir wollen uns nun durch denselben Anfangspunkt der Koordinaten, auf den sich die Koordinaten x, y, z beziehen, drei neue senkrechte Axen denken, die wir mit L, M, N bezeichnen wollen, und wovon die N parallel sey mit der so eben bezeichneten Normale. Seyen λ, λ', λ'' die cosinus der Winkel, die L mit den Axen der x, y, z macht; μ, μ', μ'' dieselben Grössen für M; δ, δ', δ'' für N; ferner l, m, n die Koordinaten eines Punktes, (x, y, z) für die neuen Axen, so ist (§. 69, Nr. 4):

$$x=\lambda l+\mu m+\delta n,\quad y=\lambda' l+\mu' m+\delta' n,\quad z=\lambda'' l+\mu'' m+\delta'' n,$$

und n hat dieselbe Bedeutung, die ihm in $\frac{\partial u}{\partial n}$ zukommt. Demnach (§. 69):

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}=\delta\frac{\partial u}{\partial x}+\delta'\frac{\partial u}{\partial y}+\delta''\frac{\partial u}{\partial z},$$

so dass für alle Punkte der Oberfläche:

$$k\left(\delta\frac{\partial u}{\partial x}+\delta'\frac{\partial u}{\partial y}+\delta''\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\gamma(u-\xi)=0 \tag{7'}$$

seyn muss, wo also δ, δ', δ'' die cosinus der Winkel sind, welche die nach Aussen gerichtete Normale mit den Axen der x, y, z macht.

Für den Fall einer ebenen Oberfläche, die parallel ist mit der Axe der x, ist $\delta'=\delta''=0$ und $\delta=\pm1$, so dass

$$\pm k\frac{\partial u}{\partial x}+\gamma(u-\xi)=0, \tag{a}$$

wo die Zeichen $\pm$ gelten, je nachdem die nach Aussen gerichtete Normale mit der positiven Axe der x den Winkel 0 oder 180° macht.

Ist die betreffende Oberfläche die einer Kugel vom Halbmesser r und ist der Mittelpunkt Anfangspunkt, so ist $\delta=\pm\frac{x}{r}$, $\delta'=\pm\frac{y}{r}$, $\delta''=\pm\frac{z}{r}$, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Normale dem Mittelpunkt ab- oder zugewendet ist. Also ist

Digitized by Google

$$\delta\frac{\partial u}{\partial x}+\delta'\frac{\partial u}{\partial y}+\delta''\frac{\partial u}{\partial z}=\pm\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{z}{r}\right)=\pm\frac{\partial u}{\partial r},\ (r^2=x^2+y^2+z^2),$$

demnach

$$\pm k\frac{\partial u}{\partial r}+\gamma(u-\xi)=0, \tag{b}$$

wo für r der Halbmesser der begränzenden Oberfläche zu setzen ist.

Für den Fall eines Zylinders, bei dem der Mittelpunkt der Grundfläche Anfangspunkt, die Zylinderaxe Axe der z ist, hat man $\delta''=0$, $\delta=\pm\frac{x}{r}$, $\delta'=\pm\frac{y}{r}$, wo r der Abstand des Punktes von der Zylinderaxe ist, so dass

$$\delta\frac{\partial u}{\partial x}+\delta'\frac{\partial u}{\partial y}+\delta''\frac{\partial u}{\partial z}=\pm\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\pm\frac{\partial u}{\partial r},\ (r^2=x^2+y^2),$$

und also

$$\pm k\frac{\partial u}{\partial r}+\gamma(u-\xi)=0. \tag{c}$$

Bedingung bei Berührung.

XII. Steht ein Körper in Berührung mit einem andern, so wird die durch ein Element des einen Körpers fliessende Wärmemenge offenbar gleich der seyn, die durch das mit jenem in Berührung stehende Element des anderen Körpers fliesst. Sind also u, u′ die Temperaturen der Elemente; k, k′ die Koeffizienten der inneren Leitungsfähigkeit für beide Körper, so sind diese Mengen: $-k\frac{\partial u}{\partial n}\omega\Delta t$, $-k'\frac{\partial u'}{\partial n}\omega\Delta t$, wo n sich auf die Normale, die beiden Elementen gemeinschaftlich ist, bezieht. Demnach ist

$$k\left(\delta\frac{\partial u}{\partial x}+\delta'\frac{\partial u}{\partial y}+\delta''\frac{\partial u}{\partial z}\right)=k'\left(\delta\frac{\partial u'}{\partial x}+\delta'\frac{\partial u'}{\partial y}+\delta''\frac{\partial u'}{\partial z}\right), \tag{8}$$

wo nun die Normale beliebig gerichtet seyn kann. (Es ist ganz wohl denkbar, dass wenn die berührenden Körper anfänglich sehr ungleich erwärmt waren, diese Gleichung für den Anfang keine Geltung hat, und erst dann richtig ist, wenn die Temperaturungleichheiten sich einigermassen ausgeglichen haben, was jedoch ziemlich rasch geschieht.)

Für berührende Kugelschichten hat man

$$k\frac{\partial u}{\partial r}=k'\frac{\partial u'}{\partial r}; \tag{d}$$

für berührende Zylinderschichten dieselbe Gleichung; für ebene Schichten, die auf der Axe der x senkrechten stehen:

$$k\frac{\partial u}{\partial x}=k'\frac{\partial u'}{\partial x}. \tag{e}$$

Ist nun ferner λ der Koeffizient für den Uebergang der Wärme aus dem ersten Körper in den zweiten, so ist $\lambda(u-u')\omega\Delta t$ die Wärmemenge, die in den zweiten Körper durch das Element ω eindringt; dieselbe muss aber gleich

Digitized by Google

der aus dem ersten Körper ausströmenden, d. h. gleich $-k\frac{\partial u}{\partial n}\omega\,\Delta t$ seyn, so dass also neben obiger Gleichung noch die Beziehung

$$k\frac{\partial u}{\partial n}=\lambda(u'-u) \qquad (9)$$

bestehen muss.

(Man vergleiche mit den in §. 75 enthaltenen Betrachtungen etwa noch die in §. 80, I; §. 82, Note; §. 83, I, III; §. 91, III, 6, 8; §. 136, III; §. 137; §. 169; §. 170; §. 172, III; §. 174, I u. s. w. enthaltenen.)

Anmerkung.

XIII. Was wir in VI ausgesprochen, mag durch die eben gegebenen Beispiele erläutert seyn. Man kann das Verfahren selbst etwa in folgender Weise näher bezeichnen.

Um die Verhältnisse (Gleichungen), welche zwischen bestimmten veränderlichen Grössen bestehen, zu ermitteln, legt man den unabhängig Veränderlichen gewisse Zuwachse (Aenderungen) bei, wodurch die abhängigen ebenfalls Aenderungen erleiden. Diese betrachtet man (wie in der Arithmetik) nicht durch stetige Veränderung entstanden, sondern durch einen Sprung, sieht also die Dinge so an, als wären die abhängigen Grössen, indem die unabhängigen stetig von dem alten Zustand in den neuen übergiengen, unveränderlich geblieben, und nehmen erst, nachdem die unabhängigen in den neuen Zustand übergetreten sind, plötzlich ihre neuen Werthe an. Man betrachtet nun die Verhältnisse, welche sich unter dieser Voraussetzung, die eine eingehende Untersuchung erst möglich macht, ergeben und stellt daraus Beziehungen zwischen den veränderlichen Grössen (oder auch deren Aenderungen) her, die immer unter der Form von Gleichungen zwischen Differenzenquotienten (§. 11) und diesen Grössen erscheinen müssen.

Die gemachte Annahme weicht von der Wahrheit ab, da die veränderlichen Grössen nicht springen, sondern sich stetig ändern; sie nähert sich aber der Wahrheit desto mehr, je kleiner die Aenderungen der unabhängigen Grössen sind. Demnach werden die erhaltenen Gleichungen vollkommen richtig, wenn man zu den Gränzen übergeht, wodurch die Differenzenquotienten sich in Differentialquotienten verwandeln.

Dass aber diess wirklich der Fall, lässt sich leicht einsehen. Gelangt man nämlich, unter der angegebenen Annahme, auf die Gleichung $P=0$, welche nicht genau richtig ist, von der man aber sagen muss, sie nähere sich der Richtigkeit desto mehr, als die Aenderungen der unabhängig Veränderlichen kleiner werden, so heisst diess eben, die Grösse P habe Null zur Gränze. Diese Gränze wird aber erhalten, wenn man die Differenzenquotienten in Differentialquotienten verwandelt; so dass, wenn P dadurch in Q übergeht (also $Q = Gr\,P$ ist), man haben muss $Q=0$. — Hat die ungenaue Gleichung

die Form $R = S$ und sind T, U die Gränzen von R und S, so ist eben so $T = U$ die genaue Gleichung. *

Dreizehnter Abschnitt.

Vielfache Integrale. Anwendungen.

§. 76.

Unbestimmte Integrale.

I. Ist $f(x, y)$ eine Funktion der zwei unabhängig Veränderlichen x und y, so kann dieselbe nach x oder nach y integrirt werden. Diese Integrale sind nun wahre partielle, müssen also (§. 28) durch das Zeichen ∂ bezeichnet werden. So bedeutet $\int f(x, y)\, \partial x$ das Integral von $f(x, y)$, partiell nach x, wobei also y durchaus als konstant angesehen wird; während $\int f(x, y)\, \partial y$ ganz eben so das partielle Integral nach y bedeutet.

Es kann aber auch verlangt werden, die Funktion $f(x, y)$ nach beiden Veränderlichen zu integriren. Man bezeichnet dieses dann durch

$$\int\int f(x, y)\, \partial x\, \partial y,$$

wobei es sich nur darum handelt anzugeben, nach welcher der Veränderlichen zuerst integrirt werden müsse. — Soll diess nach x geschehen, so werden wir das Zeichen $\int \partial y \int f(x, y)\, \partial x$ brauchen; im entgegengesetzten Falle aber $\int \partial x \int f(x, y)\, \partial y$.

Was nun etwa die Grösse

$$\int \partial y \int f(x, y)\, \partial x \qquad \text{(a)}$$

betrifft, so soll also $f(x, y)$ zuerst nach x integrirt werden, wobei y als konstant anzusehen ist. Findet sich nach den Methoden des sechsten Abschnitts

---

* Dass die z. B. in VIII eingetretene Division mit $\Delta x\, \Delta y\, \Delta z\, \Delta t$ keine Schwierigkeiten verursachen kann, liegt auf der Hand. Ist nämlich $M \Delta x\, \Delta y\, \Delta z\, \Delta t$ näherungsweise gleich $N \Delta x\, \Delta y\, \Delta z\, \Delta t$, so ist diess eben nur wahr, wenn näherungsweise $M = N$, und folglich genau $Gr\, M = Gr\, N$ ist. Dass nachher $\Delta x, \ldots, \Delta t$ unendlich klein gedacht werden könne, hat auf die Zulässigkeit dieses Schlusses keinerlei Einfluss.

Digitized by Google

$$\int f(x,y)\,\partial x = F(x,y), \qquad \text{(b)}$$

wo F (x, y) so beschaffen seyn muss, dass $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = f(x,y)$ (§. 26), so ist der zweiten Seite in (b) noch eine Grösse beizufügen, deren Differentialquotient nach x gleich Null ist (§. 26, II). Diese Grösse (konstant in Bezug auf x allein) kann also ganz wohl eine Funktion von y seyn, deren Form durchaus willkürlich bleibt. Bezeichnen wir sie mit $\varphi(y)$, so hat man also allgemeiner:

$$\int f(x,y)\,\partial x = F(x,y) + \varphi(y). \qquad \text{(b')}$$

Aus (b′) folgt nun:

$$\int \partial y \int f(x,y)\,\partial x = \int F(x,y)\,\partial y + \int \varphi(y)\,\partial y. \qquad \text{(c)}$$

Ermittelt man die Grösse $\int F(x,y)\,\partial y$ nach den frühern Methoden und ist ihr Werth $= F_1(x,y)$, so hat man der zweiten Seite eine Grösse beizufügen, die unabhängig von y ist, die also ganz wohl eine willkürliche Funktion von x seyn kann. Bezeichnet man dieselbe mit $\psi(x)$; beachtet ferner, dass $\int \varphi(y)\,\partial y$ eine Funktion nur von y ist, die aber — weil $\varphi(y)$ willkürlich ist — auch ganz willkürlich bleibt, so wird man leicht übersehen, dass die Gleichung (c) die Form

$$\int \partial y \int f(x,y)\,\partial x = F_1(x,y) + \varphi_1(y) + \psi(x) \qquad \text{(c')}$$

annimmt, wo $\varphi_1(y)$ eine willkürliche Funktion von y (ohne x), dagegen $\psi(x)$ eine willkürliche Funktion von x (ohne y) ist.

Aus (c′) folgt, wenn man zuerst nach y, dann nach x differenzirt:

$$\int f(x,y)\,\partial x = \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1(y)}{\partial y},$$

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F_1(x,y)}{\partial y\,\partial x}.$$

Die Grösse $F_1(x,y)$ in (c′) ist hiernach nothwendig so beschaffen, dass wenn man sie partiell nach y und dann nach x differenzirt, f (x, y) erscheinen muss.

Daraus ergibt sich, dass der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = f(x,y) \qquad \text{(d)}$$

genügt wird durch

$$u = F_1(x,y), \qquad \text{(d')}$$

welcher Werth jedoch nicht die vollständige Auflösung der Gleichung (d) enthält, da nach (c′) noch zwei willkürliche Funktionen zuzufügen sind.

Als Beispiel wählen wir etwa das Doppelintegral

Digitized by Google

$$\iint \frac{\partial x \, \partial y}{x^2 + y^2}.$$

Zunächst ist

$$\int \frac{\partial x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{y} \, arc\left(tg = \frac{x}{y}\right),$$

also ist

$$\iint \frac{\partial x \, \partial y}{x^2 + y^2} = \int \frac{1}{y} \, arc\left(tg = \frac{x}{y}\right) \partial y + Y + X,$$

wo Y eine willkürliche Funktion von y, X von x bedeutet. Das Integral, das hier noch vorkommt, und in welchem x konstant ist, könnte etwa nach §. 57 ermittelt werden.

II. Was die oben berührte Grösse F_1 (x, y) betrifft, so wird sie auch erhalten werden, wenn man das Integral $\int \partial x \int f(x, y) \, \partial y$ ermittelt. Findet man nämlich

$$\int \partial x \int f(x, y) \, \partial y = F_2(x, y) + \varphi_2(x) + \psi_1(y), \qquad \text{(e)}$$

wo $\varphi_2(x)$ bloss x, $\psi_1(y)$ bloss y enthält, beide aber willkürliche Funktionen sind, so muss auch

$$\frac{\partial^2 F_2(x, y)}{\partial x \, \partial y} = f(x, y)$$

seyn. Demnach ist

$$\frac{\partial^2 F_2(x, y)}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial^2 F_1(x, y)}{\partial y \, \partial x},$$

d. h. (§. 19, II, §. 68, I):

$$\frac{\partial^2 F_2(x, y)}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial^2 F_1(x, y)}{\partial x \, \partial y}.$$

Da nun $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ keine Theile enthalten sollen, die bloss aus x oder bloss aus y bestehen, mithin bei den partiellen Differenzirungen wegfallen könnten (da diese Theile in den zuzufügenden willkürlichen Funktionen enthalten sind), so kann obige Gleichung nur bestehen, wenn $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ dieselben Grössen enthalten.

Es ist also gleichgiltig, in welcher Ordnung die Integrationen in $\iint f(x, y) \, \partial x \, \partial y$ vollzogen werden, immer freilich vorbehalten, dass in den erhaltenen Resultaten keine Grössen vorkommen, die bloss von x oder bloss von y abhängen.

III. Man ersieht hieraus schon im Allgemeinen, was man unter dem vielfachen Integrale

$$\iiint \ldots f(x, y, z, \ldots) \, \partial x \, \partial y \, \partial z \ldots$$

zu verstehen hat. Dabei ist die Ordnung der Integration willkürlich, so dass man also zunächst $f(x, y, z, \ldots)$ nach x integriren kann, wobei alle anderen Grössen y, z, ... als Konstanten betrachtet werden. Diese so erhaltene Grösse integrirt man sodann nach y, wobei x, z, ... konstant sind, u. s. w.;

Digitized by Google

schliesslich werden dem Resultate willkürliche Funktionen zugefügt von je allen Veränderlichen, eine ausgeschlossen, also so viele, als es Veränderliche sind. So ist etwa

$$\int\int\int x\,y\,z\,\partial x\,\partial y\,\partial z = \frac{x^2 y^2 z^2}{8} + \varphi(x, y) + \varphi_1(x, z) + \varphi_2(y, z),$$

wo φ, φ_1, φ_2 ganz willkürliche Funktionen sind.

IV. Da vielfache Integrale hiernach nichts Anderes sind, als einfache, mit dem Unterschiede freilich, dass das betreffende Integrationsverfahren mehrfach wiederholt wird, so gelten für jene alle Regeln, welche für diese nachgewiesen wurden. Da jedoch unbestimmte vielfache Integrale für uns von geringerem Interesse sind, als bestimmte, so wenden wir uns sofort zu letzteren, wobei wir dann die weiter nöthigen Untersuchungen fortführen werden.

§. 77.

Bestimmte Doppelintegrale mit konstanten Gränzen.

I. Sind a, b, α, β Grössen, die von x und y unabhängig sind, so heissen wir die Grösse

$$\int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta f(x, y)\,\partial y \qquad \text{(a)}$$

ein bestimmtes Doppelintegral. Dabei ist gemeint, man solle die Grösse f(x, y) zuerst (partiell) nach y zwischen den Gränzen α und β integriren (§. 39, I), wodurch das Integral $\int_\alpha^\beta f(x, y)\,\partial y$ als Funktion von x erscheint. Diese so erhaltene Grösse soll dann noch (partiell) nach x zwischen den Gränzen a und b integrirt werden. Der endgiltig erhaltene (rein konstante) Werth ist durch (a) angedeutet.

Man wird nun eben so das Zeichen

$$\int_\alpha^\beta \partial y \int_a^b f(x, y)\,\partial x \qquad \text{(a')}$$

auslegen können.

II. Ist

$$\int \partial x \int f(x, y)\,\partial y = F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y), \quad \text{(§. 76, II)}$$

so ist auch

$$\int f(x, y)\,\partial y = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + \varphi'(x),$$

$$\int_\alpha^\beta f(x, y)\,\partial y = \frac{\partial F(x, \beta)}{\partial x} - \frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[F(x, \beta) - F(x, \alpha)],$$

$$\int \partial x \int_\alpha^\beta f(x, y)\,\partial y = F(x, \beta) - F(x, \alpha) + \psi_1(y),$$

Digitized by Google

$$\int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta f(x, y)\, \partial y = F(b, \beta) - F(b, \alpha) - F(a, \beta) + F(a, \alpha). \quad \text{(b)}$$

Dabei ist klar, dass wenn in $F(x, y)$ auch Glieder vorhanden sind, die bloss von x oder bloss von y abhängen, also eigentlich zu $\varphi(x)$, $\psi(y)$ gehören, die von x allein abhängigen Glieder schon in $\frac{\partial}{\partial x}[F(x,\beta) - F(x,\alpha)]$ nicht mehr vorhanden seyn werden; die von y allein abhängigen fallen dann bei der nächsten bestimmten Integration weg.

Eben so ist

$$\int_\alpha^\beta \partial y \int_a^b f(x, y)\, \partial x = F(b, \beta) - F(a, \beta) - F(b, \alpha) + F(a, \alpha), \quad \text{(b')}$$

wobei wieder dieselbe Bemerkung zu machen ist.

Aus (b) und (b') folgt sofort:

$$\int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta f(x, y)\, \partial y = \int_\alpha^\beta \partial y \int_a^b f(x, y)\, \partial x, \quad (42)$$

so dass bei bestimmten Doppelintegralen mit konstanten Gränzen die Ordnung der Integration beliebig ist. Dabei freilich muss die Grundbedingung (§. 39, I) erfüllt seyn, dass nämlich $f(x, y)$ immer endlich bleibe von $x = a$ bis $x = b$, und $y = \alpha$ bis $y = \beta$.

Zweite Erklärungsweise des bestimmten Doppelintegrals.

III. Ist

$$\int_\alpha^\beta f(x, y)\, \partial y = F(x), \quad \text{(c)}$$

so hat man (§. 39, I):

$$\int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta f(x, y)\, \partial y = Gr\, \Delta x\, [F(a) + F(a + \Delta x) + \ldots + F(b - \Delta x)], \quad \text{(d)}$$

wo Gr auf ein abnehmendes Δx sich bezieht. Aus (c) aber folgt allgemein:

$$F(a + m\Delta x) = \int_\alpha^\beta f(a + m\Delta x, y)\, \partial y,$$

d. h. nach §. 39:

$$F(a + m\Delta x) = Gr\, \Delta y\, [f(a + m\Delta x, \alpha) + f(a + m\Delta x, \alpha + \Delta y) + \ldots + f(a + m\Delta x, \beta - \Delta y)],$$

wenn Gr auf ein gegen Null gehendes Δy sich bezieht.

Daraus ergibt sich leicht, dass $\int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta f(x, y)\, \partial y$ der Werth ist, dem sich die Grösse

$$\begin{aligned}
&\Delta x \Delta y\, [f(a, \alpha) + f(a, \alpha + \Delta y) + \ldots\ldots + f(a, \beta - \Delta y)] \\
+ &\Delta x \Delta y\, [f(a + \Delta x, \alpha) + f(a + \Delta x, \alpha + \Delta y) + \ldots + f(a + \Delta x, \beta - \Delta y)] \\
+ &\Delta x \Delta y\, [f(a + 2\Delta x, \alpha) + f(a + 2\Delta x, \alpha + \Delta y) + \ldots + f(a + 2\Delta x, \beta - \Delta y)] \quad \text{(e)} \\
+ &\vdots \\
+ &\Delta x \Delta y\, [f(b - \Delta x, \alpha) + f(b - \Delta x, \alpha + \Delta y) + \ldots + f(b - \Delta x, \beta - \Delta y)]
\end{aligned}$$

Digitized by Google

nähert, wenn man darin zuerst Δy und dann auch Δx gegen Null gehen lässt.

Ganz eben so findet sich, dass $\int_\alpha^\beta \partial y \int_a^b f(x, y)\, \partial x$ der Werth ist, dem sich

$$\begin{aligned} &\Delta y\, \Delta x\,[f(a,\alpha) + f(a+\Delta x, \alpha) + \ldots\ldots + f(b-\Delta x, \alpha)] \\ &+ \Delta y\, \Delta x\,[f(a, \alpha+\Delta y) + f(a+\Delta x, \alpha+\Delta y) + \ldots\ldots + f(b-\Delta x, \alpha+\Delta y)] \\ &\vdots \\ &+ \Delta y\, \Delta x\,[f(a, \beta-\Delta y) + f(a+\Delta x, \beta-\Delta y) + \ldots + f(b-\Delta x, \beta-\Delta y)] \end{aligned} \qquad (e')$$

nähert, wenn man zuerst Δx und dann auch Δy gegen Null gehen lässt.

Aus der Gleichung (42) folgt nunmehr, dass die Gränzwerthe der Grössen (e) und (e') gleich sind; da ferner diese Grössen identisch sind (wenn auch anders geordnet), so folgt hieraus der Satz:

Lässt man in (e) zuerst Δy und dann auch Δx gegen Null gehen, oder verfährt man in umgekehrter Weise, so erhält man immer denselben Gränzwerth, der durch die Gleichung (b) ermittelt ist.

Man kann also sagen, es sey das doppelt bestimmte Integral $\int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta f(x, y)\, \partial y$ eine Summe von Elementen der Form $\Delta x\, \Delta y\, f(x, y)$, wenn x und y alle möglichen Werthe zwischen $x = a$ und $x = b$, so wie $y = \alpha$ und $y = \beta$ annehmen, wobei die x um (das unendlich kleine) Δx, die y um Δy wachsen.

Was man unter drei- oder mehrfachem bestimmtem Integrale zu verstehen habe, ist hiemit wohl klar, so dass es einer weiteren Erörterung nicht bedarf. Da die Integrationsgränzen konstant sind, ist die Ordnung der Integration eine ganz willkürliche.

§. 78.

Bestimmte Integrale mit veränderlichen Gränzen.

I. Ereignet es sich, dass in einem bestimmten Doppelintegrale die Gränzen von y nicht unabhängig von x sind, so wird ein solches unter der Form

$$\int_a^b \partial x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, \partial y \qquad (f)$$

erscheinen. Die **Auswerthung** desselben geschieht in herkömmlicher Weise. Ermittelt man zunächst $\int f(x, y)\, \partial y$, wobei die zuzufügende willkürliche Konstante (Funktion von x) weggelassen wird (§. 41, II), und ist diess $= F(x, y)$, so ist

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, \partial y = F[x, \psi(x)] - F[x, \varphi(x)],$$

Digitized by Google

welche Grösse als Funktion von x erscheint und durch $F_1(x)$ bezeichnet werden mag. Alsdann ist

$$\int_a^b \partial x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\partial y = \int_a^b F_1(x)\,dx. \qquad (f')$$

Wie man die Bedeutung des Zeichens $\int_\alpha^\beta \partial y \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,\partial x$ auszulegen habe, ist hiernach klar.

II. Setzt man zur Abkürzung $\varphi(x) = y_1$, $\psi(x) = y_2$, so ist

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,\partial y = Gr\,\Delta y\,[f(x,y_1) + f(x,y_1+\Delta y) + \ldots + f(x,y_2-\Delta y)], \quad (g)$$

wo Gr wie immer sich auf ein gegen Null gehendes Δy bezieht. Die Grössen y_1, y_2 sind aber nicht fest, sondern ändern ihre Werthe mit x; Δy kann also auch angesehen werden als veränderlich mit x. Trotzdem werden wir dasselbe Zeichen Δy beibehalten, was auch x sey, da die Art der Einschiebung eine willkürliche ist (§. 40). Hat x den Werth $a + m\Delta x$, so ist alsdann die zweite Seite der Gleichung (g):

$$Gr\,\Delta y \Big\{f[a+m\Delta x, \varphi(a+m\Delta x)] + f[a+m\Delta x, \varphi(a+m\Delta x)+\Delta y] + \ldots$$
$$+ f[a+m\Delta x, \psi(a+m\Delta x)-\Delta y]\Big\},$$

wie man leicht übersieht.

Beachtet man, dass die Grösse $\int_a^b \partial x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\partial y$ gleich ist dem Gränzwerthe der Summe, die man erhält, wenn man in $\Delta x \int_{\psi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\partial y$ der Grösse x die Werthe $a, a+\Delta x, \ldots, b-\Delta x$ beilegt und alle addirt, so wird sich hiernach leicht ergeben, dass das bestimmte Doppelintegral gleich ist dem Gränzwerthe von

$$\Delta x\,\Delta y \Big\{f[a,\varphi(a)] + f[a,\varphi(a)+\Delta y] + \ldots + f[a,\psi(a)-\Delta y]\Big\}$$
$$+ \Delta x\,\Delta y \Big\{f[a+\Delta x, \varphi(a+\Delta x)] + f[a+\Delta x, \varphi(a+\Delta x)+\Delta y] + \ldots$$
$$+ f[a+\Delta x, \psi(a+\Delta x)-\Delta y]\Big\}$$
$$+ \vdots$$
$$+ \Delta x\,\Delta y \Big\{f[b-\Delta x, \varphi(b-\Delta x)] + f[b-\Delta x, \varphi(b-\Delta x)+\Delta y] + \ldots$$
$$+ f[b-\Delta x, \psi(b-\Delta x)-\Delta y]\Big\},$$

wenn darin Δy und dann Δx gegen Null gehen.

Da die Δy in den einzelnen Theilen nicht gleich sind, so kann man das Ergebniss auch in etwas anderer Form aussprechen. Geht y von $\varphi(a)$ zu $\psi(a)$ durch die unendlich kleinen Unterschiede ε_1, von $\varphi(a+\Delta x)$ bis $\psi(a+\Delta x)$ durch $\varepsilon_2, \ldots\ldots$, von $\varphi(b-\Delta x)$ zu $\psi(b-\Delta x)$ durch ε_n, so ist

Digitized by Google

$$\int_a^b \partial x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\partial y = \varepsilon_1 \Delta x [f(a,\varphi(a)) + f(a,\varphi(a)+\varepsilon_1) + \ldots + f(a,\psi(a)-\varepsilon_1)]$$
$$+ \varepsilon_2 \Delta x [f(a+\Delta x, \varphi(a+\Delta x)) + f(a+\Delta x, \varphi(a+\Delta x)+\varepsilon_2) + \ldots \quad (k)$$
$$+ f(a+\Delta x, \psi(a+\Delta x)-\varepsilon_2) + \ldots$$
$$\vdots$$
$$+ \varepsilon_n \Delta x [f(b-\Delta x, \varphi(b-\Delta x)) + f(b-\Delta x, \varphi(b-\Delta x)+\varepsilon_n) + \ldots$$
$$+ f(b-\Delta x, \psi(b-\Delta x)-\varepsilon_n)],$$

wo Δx ebenfalls unendlich klein ist.

Lässt man hier zuerst die ε gegen Null gehen (unendlich klein werden), so sind die einzelnen Zeilen gleich

$$\Delta x \int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} f(a,y)\,\partial y,\ \Delta x \int_{\varphi(a+\Delta x)}^{\psi(a+\Delta x)} f(a+\Delta x, y)\,\partial y, \ldots\ldots, \Delta x \int_{\varphi(b-\Delta x)}^{\psi(b-\Delta x)} f(b-\Delta x, y)\,\partial y,$$

d. h. wenn $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\partial y = F_1(x)$, diese einzelnen Zeilen sind $\Delta x\, F_1(a)$, $\Delta x\, F_1(a+\Delta x), \ldots, \Delta x\, F_1(b-\Delta x)$. Der Gränzwerth der Summe ist also (§. 39) $\int_a^b F_1(x)\,\partial x$, d. h. das Doppelintegral (f).

Man kann dieses Doppelintegral also mittelst der Gleichung (k) erklären, und umgekehrt, eine Summe wie die zweite Seite der Gleichung (k) ist immer ein bestimmtes Doppelintegral.

III. Dass die Ordnung der Integration hiebei vorgeschrieben ist, leuchtet ein, so dass man von ihr nicht abgehen kann.

Es wäre jedoch auch denkbar, dass in einem bestimmten Doppelintegrale (f) die Ordnung der Integration willkürlich wäre, d. h. dass man, statt zuerst nach y und dann nach x zu integriren, auch in umgekehrter Ordnung verfahren könnte; nur müssten in diesem Falle die Gränzen für x als Funktionen von y gehörig bestimmt werden. Es ereignet sich dieser Fall namentlich bei geometrischen Anwendungen. Allgemeines lässt sich hierüber Nichts aussagen. Dasselbe gilt von einem dreifachen Integrale

$$\int_a^b \partial x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \partial y \int_{\varphi_1(x,y)}^{\psi_1(x,y)} f(x,y,z)\,\partial z,$$

in dem $\varphi(x)$, $\psi(x)$ Funktionen von x, $\varphi_1(x,y)$ und $\psi_1(x,y)$ Funktionen von x und y sind. Hier muss der spezielle Fall maassgebend seyn.

Verwandlung in ein Integral mit konstanten Gränzen.

IV. Findet man bei veränderlichen Gränzen einen Anstand, so lässt sich ein jedes doppelt bestimmte Integral leicht in ein anderes verwandeln, dessen Gränzen konstant sind. Sey nämlich das Integral

$$\int_a^b \partial x \int_\xi^\zeta f(x,y)\,\partial y$$

Digitized by Google

vorgelegt, wo ξ und ζ Funktionen von x sind, so hat man, dem Obigen gemäss, zuerst die Grösse

$$\int_\xi^\zeta f(x, y)\,\partial y,$$

bei der x konstant ist, zu ermitteln. Man setze nun hier (§. 42, IV):

$$y = \xi + (\zeta - \xi)z, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = \zeta - \xi,$$

so sind die Gränzen für z: 0 und 1, und demnach

$$\int_\xi^\zeta f(x, y)\,\partial y = (\zeta - \xi)\int_0^1 f[x, \xi + (\zeta - \xi)z]\,\partial z = (\zeta - \xi)\int_0^1 f[x, \xi + (\zeta - \xi)y]\,\partial y,$$

so dass

$$\int_a^b \partial x \int_\xi^\zeta f(x, y)\,\partial y = \int_a^b (\zeta - \xi)\,\partial x \int_0^1 f[x, \xi + (\zeta - \xi)y]\,\partial y \qquad \text{(m)}$$

seyn wird, wodurch der Zweck erreicht ist. In dem letzten Integrale ist nun die Ordnung der Integration eine willkürliche.

Setzt man hier $\xi = 0$, so ist

$$\int_a^b \partial x \int_0^\zeta f(x, y)\,\partial y = \int_a^b \zeta\,\partial x \int_0^1 f(x, \zeta y)\,\partial y. \qquad \text{(m')}$$

Da nun (§. 42, II)

$$\int_\xi^\zeta f(x, y)\,\partial y = \int_0^\zeta f(x, y)\,\partial y - \int_0^\xi f(x, y)\,\partial y,$$

so folgt aus (m), dass auch

$$\int_a^b \partial x \int_\xi^\zeta f(x, y)\,\partial y = \int_a^b \zeta\,\partial x \int_0^1 f(x, \zeta y)\,\partial y - \int_a^b \xi\,\partial x \int_0^1 f(x, \xi y)\,\partial y \qquad \text{(n)}$$

sey. Dieser Satz führt oft leicht zur Auswerthung mehrfacher Integrale. So ist z. B.

$$\int_0^r \partial x \int_{\sqrt{r^2 - r x}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{\partial y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\partial x \int_0^1 \frac{\partial y}{\sqrt{r^2 - x^2 - (r^2 - x^2)y^2}} - \int_0^r \sqrt{r^2 - r x}\,\partial x \times$$

$$\int_0^1 \frac{\partial y}{\sqrt{r^2 - x^2 - (r^2 - r x)y^2}} = \int_0^r \partial x \int_0^1 \frac{\partial y}{\sqrt{1 - y^2}} - \int_0^r \frac{\sqrt{r^2 - r x}}{\sqrt{r - x}}\,\partial x \int_0^1 \frac{\partial y}{\sqrt{r + x - r y^2}} =$$

$$\int_0^r \partial x\,\frac{\pi}{2} - \sqrt{r}\int_0^r \partial x \int_0^1 \frac{\partial y}{\sqrt{r + x - r y^2}} = \frac{r\pi}{2} - \sqrt{r}\int_0^1 \partial y \int_0^r \frac{\partial x}{\sqrt{r + x - r y^2}} = \frac{r\pi}{2} -$$

$$\sqrt{r}\int_0^1 \partial y \left[2\sqrt{2r - r y^2} - 2\sqrt{r - r y^2}\right] = \frac{r\pi}{2} - 2r\int_0^1 (\sqrt{2 - y^2} - \sqrt{1 - y^2})\,\partial y = \frac{r\pi}{2}$$

$$- 2r\left[\frac{1}{2} + \mathit{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2}\,\mathit{arc}\,(\sin = 1)\right] = \frac{r\pi}{2} - 2r\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = r\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$



Digitized by Google

Dass man ähnliche Sätze für dreifache Integrale aufstellen kann, versteht sich ganz von selbst. Eben so lassen sich viele der Sätze in §. 42 ganz unmittelbar auf mehrfach bestimmte Integrale übertragen. Für den Augenblick mag es für uns hauptsächlich von Wichtigkeit seyn zu bemerken, dass die Bestimmung (Auswerthung) eines vielfachen bestimmten Integrals immer auf eine mehrfach wiederholte einfache Integration zwischen bestimmten Gränzen zurückkömmt.

§. 79.

Umformung vielfacher bestimmter Integrale.

1) Bestimmte Doppelintegrale.

I. Sey P eine bekannte Funktion von x und y und man wolle in dem bestimmten Doppelintegrale

$$\int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta P \partial y \qquad (a)$$

an die Stelle von x und y zwei neue unabhängig Veränderliche u, v einführen, welche mit x und y durch die Gleichungen

$$x = \varphi(u, v), \; y = \psi(u, v) \qquad (b)$$

zusammenhängen, welche Gleichungen sicher allgemein genug sind, da man ja immerhin x und y muss durch u und v ausdrücken können, wenn man eine durchführbare Umformung haben will. In dem Integrale (a) setzen wir die Gränzen als konstant voraus, und wie immer die Grösse unter den Integral-Zeichen endlich innerhalb der Gränzen der Integration.

Betrachten wir nun zuerst das Integral

$$\int_\alpha^\beta P \partial y, \qquad (c)$$

so ist in demselben x als Konstante angesehen; wollen wir statt y die Veränderliche v einführen, so werden wir aus (b) die Grösse u eliminiren, um die Gleichung zwischen y und v, in der freilich auch noch das konstante x vorkommt, zu erhalten. Gesetzt diese Gleichung sey

$$f(x, y, v) = 0, \qquad (d)$$

so werden die Gränzen α', β' von v aus den zwei Gleichungen

$$f(x, \alpha, \alpha') = 0, \; f(x, \beta, \beta') = 0 \qquad (d')$$

zu entnehmen seyn. Ist es möglich, von x unabhängige Werthe von α' und β' aus diesen Gleichungen zu erhalten, so hat man (§. 42)

$$\int_\alpha^\beta P \partial y = \int_{\alpha'}^{\beta'} P \frac{\partial y}{\partial v} \partial v, \qquad (e)$$

wo $\frac{\partial y}{\partial v}$ aus der Gleichung (d) zu ziehen ist. Aber die (d) entsteht, wenn man in der zweiten Gleichung (b) die Grösse u durch den Werth ersetzt, den

Digitized by Google

sie in der ersten hat; demnach wird auch u als eine Funktion von v zu behandeln seyn, während x konstant bleibt. Man hat also

$$\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial \psi}{\partial v},\quad 0=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

also $\frac{\partial u}{\partial v}=-\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}$, und $\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{-\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}$, welche Grösse in (e) einzuführen ist, und dann y und u nach (b) zu ersetzen sind. Geschieht diess, so ist die Grösse (a) gleich

$$\int_a^b \partial x \int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}-\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)P}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}\partial v, \tag{a'}$$

und da hier wieder die Gränzen konstant sind, so kann man die Ordnung der Integration ändern und also zuerst nach x integriren. Betrachten wir nunmehr das Integral

$$\int_a^b \frac{\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}-\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}P\,\partial x, \tag{α}$$

und drücken in demselben (es enthält nur x und v), da v konstant ist, x durch u aus, so wird die erste Gleichung (b) geradezu den Zusammenhang zwischen x und u geben. Aus ihr folgt $\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, also wenn a′, b′ aus

$$a=\varphi(a',v),\quad b=\varphi(b',v) \tag{f}$$

bestimmt werden, und man von v unabhängige Werthe von b und b′ daraus erhält, so ist $(\alpha)=$

$$\int_{a'}^{b'}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}-\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)P\,\partial u,$$

also endlich, wenn man die Ordnung der Integration nochmals umkehrt:

$$\int_a^b \partial x\int_\alpha^\beta P\,\partial y=\int_{a'}^{b'}\partial u\int_{\alpha'}^{\beta'}P\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}-\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\partial v, \tag{A}$$

wo y und x durch u und v nach (b) ausgedrückt werden, und die Gränzen aus (d′) und (f) unabhängig von x und v gefunden werden müssen.

Liefern die Gleichungen (d′) Werthe von α', β' unabhängig von x, dagegen die Gleichungen (f) Werthe von a′, b′ die auch noch von v abhängen, so ist immerhin

$$\int_a^b \partial x\int_\alpha^\beta P\,\partial y=\int_{\alpha'}^{\beta'}\partial v\int_{a'}^{b'}P\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}-\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\partial u,$$

wobei aber die Ordnung der Integration nunmehr vorgeschrieben ist.

Digitized by Google

II. Es kann sich nun ganz wohl ereignen, dass (d') keine konstanten Werthe von α' und β' liefern. In diesem Falle drücke man in

$$\int_a^b P\,\partial x$$

x durch v aus, suche also a' und b' zu bestimmen aus

$$f(a, y, a') = 0, \quad f(b, y, b') = 0 \tag{g}$$

und zwar unabhängig von y; alsdann ist

$$\int_a^b P\,\partial x = \int_{a'}^{b'} P\frac{\partial x}{\partial v}\,\partial v.$$

Die Grösse $\frac{\partial x}{\partial v}$ bestimmt sich aus:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v}, \quad 0 = \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v},$$

so dass

$$\int_a^b P\,\partial x = \int_{a'}^{b'} \frac{P\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \psi}{\partial u}}\,\partial v,$$

$$\int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta P\,\partial y = \int_{a'}^{b'} \partial v \int_\alpha^\beta \frac{P\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \psi}{\partial u}}\,\partial y.$$

Betrachtet man hier zuerst wieder die Integration nach y (wo v konstant ist) und drückt y durch u aus, so bestimmen sich α', β' aus

$$\alpha = \psi(\alpha', v), \quad \beta = \psi(\beta', v), \tag{g'}$$

unabhängig von v, und $\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial u}$, so dass jetzt:

$$\int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta P\,\partial y = \int_a^{b'} \partial v \int_{\alpha'}^{\beta'} P\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)\partial u, \tag{B}$$

wo y und x nach (b) ersetzt werden; a' und b' aus (g), α', β' aus (g'), unabhängig von y und v gefunden werden müssen.

Liefern die (g) für a', b' konstante Werthe, die (g') aber für α', β' Funktionen von v, so ist die Gleichung (B) immerhin noch zulässig, nur ist die Ordnung der Integration alsdann nicht mehr willkürlich.

III. Wir haben zuerst jeweils v eingeführt; diess war willkürlich. Allein da es gleichgiltig ist, welche der neuen Veränderlichen v heisse, so soll es die seyn, die uns in dem einen der zwei Fälle zur Ermittlung der Gränzen führt, wenn man sie aus (b) eliminirt. Kann man aber die Gränzen in keinem der obigen Fälle in der verlangten Weise finden, so ist die Umformung mittelst der (b) nicht zulässig.

Digitized by Google

Sind α und β Funktionen von x, und kann man aus (d') Werthe von α', β' finden, die konstant sind, so wird alles Obige immer noch gelten. (Ein allgemeiner Satz findet sich noch in §. 168, II.)

Beispiele.

1) Um das Gesagte zu erläutern, wollen wir uns das Integral

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} \partial y$$

vorlegen und setzen $x = u$, $y = uv$, so ist die (d): $y - xv = 0$, während die (d') sind: $0 - x\alpha' = 0$, $\infty - x\beta' = 0$, woraus (da $x > 0$) $\alpha' = 0$, $\beta' = \infty$ folgen. Dann sind die (f): $0 = a'$, $\infty = b'$; ferner $\frac{\partial \psi}{\partial v} = u$, $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial \psi}{\partial u} = v$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$, mithin nach (A):

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^\infty e^{-(x+y^2)} \partial y = \int_0^\infty \partial u \int_0^\infty u e^{-(u^2+u^2 v^2)} \partial v.$$

Aber

$$\int_0^\infty \partial u \int_0^\infty u e^{-(u^2+u^2 v^2)} \partial v = \int_0^\infty \partial v \int_0^\infty u e^{-(1+v^2) u^2} \partial u.$$

Ferner (§. 28):

$$\int u e^{-(1+v^2) u^2} \partial u = -\frac{e^{-(1+v^2) u^2}}{2(1+v^2)},$$

$$\int_0^\infty u e^{-(1+v^2) u^2} \partial u = \frac{1}{2(1+v^2)}.$$

Also

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} \partial y = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\partial v}{1+v^2},$$

und da

$$\int \frac{\partial v}{1+v^2} = arc\,(tg = v), \int_0^\infty \frac{\partial v}{1+v^2} = \frac{\pi}{2},$$

so ist endlich

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} \partial y = \frac{\pi}{4}.$$

2) Legt man uns eben so das Integral (§. 160)

$$\int_0^h \partial x \int_{(a-r)\frac{x}{h}}^{(a+r)\frac{x}{h}} P\, \partial y$$

vor, und setzen wir wieder $x = u$, $y = uv$, so ist die (d): $y - xv = 0$, also die (d'): $(a-r)\frac{x}{h} - \alpha' x = 0$, $(a+r)\frac{x}{h} - \beta' x = 0$, denen durch $\alpha' = \frac{a-r}{h}$, $\beta' = \frac{a+r}{h}$, unabhängig von x, genügt wird; die (f) sind $0 = a'$, $h = b'$, so dass also nach (A):

$$\int_0^h \partial x \int_{(a-r)\frac{x}{h}}^{(a+r)\frac{x}{h}} P\, \partial x = \int_0^h u\, \partial u \int_{\frac{(a-r)}{h}}^{\frac{(a+r)}{h}} P\, \partial v,$$

wo in P die x und y durch u und uv zu ersetzen sind.

Digitized by Google

3) Wir wollen ferner das Integral

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^\infty f(x^2+y^2)\,\partial y$$

untersuchen, indem wir

$$x = u\,cos\,v, \quad y = u\,sin\,v$$

setzen. Die (d) ist hier $y - x\,tg\,v = 0$, also wenn wir die (g) anwenden, und desshalb die (d) unter die Form $y\,cotg\,v - x = 0$ setzen: $y\,cotg\,a' - 0 = 0$, $y\,cotg\,b' - \infty = 0$, woraus $a' = \frac{\pi}{2}$, $b' = 0$; die (g') sind jetzt $0 = \alpha'\,sin\,v$, $\infty = \beta'\,sin\,v$, also $\alpha' = 0$, $\beta' = \infty$; $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = -u\,sin\,v$, $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = cos\,v$, $\frac{\partial \psi}{\partial v} = u\,cos\,v$, $\frac{\partial \psi}{\partial u} = sin\,v$; $\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u} = -u$, also da $x^2+y^2 = u^2$:

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^\infty f(x^2+y^2)\,\partial y = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \partial v \int_0^\infty u\,f(u^2)\,\partial u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial v \int_0^\infty u\,f(u^2)\,\partial u,$$

d. h. da $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial v = \frac{\pi}{2}$, indem $u\,f(u^2)$ von v nicht abhängt:

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^\infty f(x^2+y^2)\,\partial y = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty u\,f(u^2)\,\partial u.$$

Setzt man hier noch $u^2 = x$, also $u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}$, so ist (§. 42)

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^\infty f(x^2+y^2)\,\partial y = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty f(x)\,\partial x. \qquad \text{(h)}$$

Das Beispiel in Nr. 1 gehört hieher. Dort ist $f(u) = e^{-u}$, also

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,\partial y = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty e^{-x}\,\partial x = \frac{\pi}{4}.$$

IV. Es ist selbstverständlich, dass man nicht nothwendig den hier vorgeschriebenen Weg einhalten muss, wenn man nur nicht gegen die Grundsätze, auf denen das Verfahren ruht, fehlt.

So etwa liesse sich das Beispiel Nr. 1 auch in folgender Weise lösen.

Setzt man in dem Integrale

$$\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,\partial y$$

$y = xu$, so ist $\frac{\partial y}{\partial u} = x$, und die Gränzen von u sind 0 und ∞ (§. 42, IV), so dass

$$\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,\partial y = \int_0^\infty x\,e^{-(1+u^2)x^2}\,\partial u,$$

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,\partial y = \int_0^\infty \partial x \int_0^\infty x\,e^{-(1+u^2)x^2}\,\partial u = \int_0^\infty \partial u \int_0^\infty x\,e^{-(1+u^2)x^2}\,\partial x.\,*$$

Daraus ergibt sich dann der bereits gefundene Werth.

---

* Man könnte hier die Frage aufwerfen, ob die Gleichung (42) des §. 77 auch noch gelte, wenn einige der dortigen Gränzen unendlich werden. Diese Frage wird sich wie in §. 42, VI erledigen lassen, so dass die Giltigkeit davon abhängt, dass die Resultate endliche, bestimmte Werthe sind.

Digitized by Google

Dass man eben so in I den Werth von $\frac{\partial y}{\partial v}$ unmittelbar aus (d) ziehen kann, ist klar; nur ergibt sich alsdann keine allgemeine Vorschrift.

2. Dreifache bestimmte Integrale.

V. Wir wollen nun annehmen, man lege uns das dreifach bestimmte Integral

$$J = \int_a^b \partial x \int_{a'}^{b'} \partial y \int_{a''}^{b''} P \, \partial z \tag{i}$$

vor, in dem P eine bekannte Funktion von x, y, z ist, und worin a, b, a′, b′, a″, b″ bekannte Konstanten sind, und man solle für x, y, z drei neue Veränderliche u, v, w einführen, die mit x, y, z durch die Gleichungen

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \Theta(u, v, w) \tag{k}$$

zusammenhängen, wo φ, ψ, Θ bekannte Funktionen sind.

Da die Integrationsgränzen in (i) konstant sind, so ist die Ordnung der Integration eine ganz willkürliche. Wir wollen desshalb annehmen, man integrire nach z zuerst, wie es auch in (i) gemeint ist, betrachten also zunächst das Integral:

$$\int_{a''}^{b''} P \, \partial z,$$

in welchem wir z durch w ersetzen wollen. Dabei sind x und y als Konstanten angesehen. Eliminiren wir nun aus den Gleichungen (k) die Grössen u und v, so erhalten wir etwa die Gleichung

$$f(x, y, z, w) = 0, \tag{k'}$$

und gesetzt, man erhalte aus ihr für $z = a''$, und $z = b''$ die Werthe $w = \alpha''$, $w = \beta''$, unabhängig von x und y, d. h. man könne α'', β'' aus

$$f(x, y, a'', \alpha'') = 0, \quad f(x, y, b'', \beta'') = 0 \tag{k''}$$

bestimmen, so ist (§. 42)

$$\int_{a''}^{b''} P \, \partial z = \int_{\alpha''}^{\beta''} P \frac{\partial z}{\partial w} \partial w,$$

wo $\frac{\partial z}{\partial w}$ aus (k′) zu ziehen ist, wenn dabei x und y als konstant angesehen werden. Da man aber u und v aus den zwei ersten Gleichungen (k) gezogen und in die dritte eingesetzt, um (k′) zu erhalten, so ist $\frac{\partial z}{\partial w}$ aus (k′) gezogen gleich $\frac{\partial z}{\partial w}$ aus der dritten (k), wenn u, v als Funktionen von w aus den zwei ersten folgen. Also hat man, da x und y konstant:

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial \Theta}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial w} + \frac{\partial \Theta}{\partial w}, \quad 0 = \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial w} + \frac{\partial \psi}{\partial w}, \quad 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial w} + \frac{\partial \varphi}{\partial w},$$

woraus


Digitized by Google

$$\frac{\partial u}{\partial w}=\frac{-\frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial \psi}{\partial v}}{\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}},\quad \frac{\partial v}{\partial w}=\frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial \psi}{\partial u}+\frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}-\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}},$$

und dann

$$\frac{\partial z}{\partial w}=\frac{-\frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial w}+\frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial \psi}{\partial v}-\frac{\partial \Theta}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial \psi}{\partial u}+\frac{\partial \Theta}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \Theta}{\partial w}\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial \Theta}{\partial w}\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}-\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}},$$

was zur Abkürzung $=-\frac{M}{N}$ gesetzt werden möge. Also

$$J=-\int_a^b \partial x \int_{a'}^{b'} \partial y \int_{\alpha''}^{\beta''} \frac{PM}{N} \partial w,$$

wo nun z durch w [mittelst (k')] zu ersetzen ist. Da hier die Integrationsgränzen konstant sind, so ist die Ordnung der Integration abermals beliebig. Betrachten wir also das Integral

$$\int_{a'}^{b'} \frac{PM}{N} \partial y,$$

in dem x und w konstant sind, und ersetzen y durch v. Eliminiren wir nun u aus den zwei ersten Gleichungen (k), so erhalten wir etwa

$$F(x, y, v, w)=0 \qquad (k_1)$$

und gesetzt, es sey möglich aus

$$F(x, a', \alpha', w)=0,\ F(x, b', \beta', w)=0 \qquad (k_1')$$

Werthe von α', β' zu ziehen, die unabhängig von x seyen, so ist

$$\int_{a'}^{b'} \frac{PM}{N} \partial y=\int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{PM}{N} \frac{\partial y}{\partial v} \partial v,$$

wo $\frac{\partial y}{\partial v}$ aus (k_1) zu ziehen ist. Wie immer hat man aber:

$$0=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial \varphi}{\partial v},\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial \psi}{\partial v};\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{-\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}=-\frac{N}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}},$$

so dass

$$J=\int_{\alpha''}^{\beta''} \partial w \int_a^b \partial x \int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{PM}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}} \partial v$$

ist, wo y und z durch v und w zu ersetzen sind. Da α', β' unabhängig von x, so kann in dem Doppelintegral

$$\int_a^b \partial x \int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{PM}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}} \partial v$$

Digitized by Google

die Ordnung der Integration nochmals umgekehrt werden, so dass wir zunächst

$$\int_a^b \frac{PM}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}} \partial x$$

betrachten wollen, wo v, w konstant sind. Bestimmt man nun α, β aus

$$a = \varphi(\alpha, v, w), \quad b = \varphi(\beta, v, w), \qquad (k_1'')$$

so ist

$$\int_a^b \frac{PM}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}} \partial x = \int_\alpha^\beta \frac{PM}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}} \frac{\partial x}{\partial u} \partial u,$$

wo $\frac{\partial x}{\partial u}$ aus der ersten Gleichung (k) gezogen wird, aus der (bei konstantem v, w) folgt

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

so dass nun endlich

$$\int_a^b \partial x \int_{a'}^{b'} \partial y \int_{a''}^{b''} P \partial z = \int_{\alpha''}^{\beta''} \partial w \int_{\alpha'}^{\beta'} \partial v \int_\alpha^\beta PM \partial u, \qquad (C)$$

wenn

$$M = \frac{\partial \Theta}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial w} - \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) + \frac{\partial \Theta}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial w}\right) + \frac{\partial \Theta}{\partial w}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right), \qquad (C')$$

und wo α'', β'' unabhängig von x und y aus (k''); α', β' unabhängig von x aus (k_1'); α, β aus (k_1'') folgen. Es versteht sich hiebei von selbst, dass α', β' ganz wohl w, und α, β sogar v und w enthalten können. Ebenso wenn a'', b'' nicht konstant sind, man aber α'', β'' doch wie hier verlangt bestimmen kann, gelten die obigen Schlüsse noch.

Man übersieht leicht, dass man auch ursprünglich z durch v oder u hätte ersetzen können. In diesem Falle würde man ganz ähnlich verfahren seyn. Da wir aber die neuen Veränderlichen beliebig nennen können, so soll eben w die derselben seyn, welche die Bestimmung von α'', β'' ermöglicht. Aehnlich verhalte es sich mit u und v. Eben so hätte man statt z auch y oder x durch w ersetzen können. Allein auch hier wird man ganz ähnlich verfahren, wie so eben. Man ersieht leicht, dass, da man — (k') benützend — dreierlei Wege einschlagen kann; und dann, wenn z, oder y, oder x ersetzt ist, doch je — wegen der bleibenden zwei — noch zwei, man im Ganzen sechs verschiedene Formen erhalten wird, deren Ableitung keinerlei Schwierigkeit hat, und deren Ergebniss wir nun noch aufzählen wollen, indem wir Obiges wiederholen.

VI. Gesetzt, man ziehe aus (k) die (k') durch Elimination von u, v (w immer in der Bedeutung von so eben genommen); ferner ziehe man aus (k)

Digitized by Google

durch Elimination von u aus den zwei ersten, oder aus der ersten und dritten, oder aus der zweiten und dritten, indem auch v die andere der neuen Veränderlichen seyn soll, die im Nachstehenden zum Ziele führt:

$$F(x,y,v,w)=0,\; F_1(x,z,v,w)=0,\; F_2(y,z,v,w)=0, \qquad (K')\;.$$

so hat man, wenn M durch (C') gegeben ist und J die Bedeutung in (i) hat:

1) $$J=\int_{\alpha''}^{\beta''}\partial w\int_{\alpha'}^{\beta'}\partial v\int_{\alpha}^{\beta} PM\,\partial u, \qquad (C_1)$$

wenn α'', β'', α', β', α, β unabhängig von x und y aus

$$f(x,y,a'',\alpha'')=0,\; f(x,y,b'',\beta'')=0;\; F(x,a',\alpha',w)=0,\; F(x,b',\beta',w)=0;$$
$$a=\varphi(\alpha,v,w),\; b=\varphi(\beta,v,w)$$

bestimmt werden können;

2) $$J=-\int_{\alpha''}^{\beta''}\partial w\int_{\alpha}^{\beta}\partial v\int_{\alpha'}^{\beta'} PM\,\partial u, \qquad (C_2)$$

wenn die Gränzen unabhängig von x und y aus

$$f(x,y,a'',\alpha'')=0,\; f(x,y,b'',\beta'')=0;\; F(a,y,\alpha,w)=0,\; F(b,y,\beta,w)=0;$$
$$a'=\psi(\alpha',v,w),\; b'=\psi(\beta',v,w)$$

bestimmt werden können;

3) $$J=-\int_{\alpha'}^{\beta'}\partial w\int_{\alpha''}^{\beta''}\partial v\int_{\alpha}^{\beta} PM\,\partial u, \qquad (C_3)$$

wenn die Integrationsgränzen unabhängig von x und z aus

$$f(x,a',z,\alpha')=0,\; f(x,b',z,\beta')=0;\; F_1(x,a'',\alpha'',w)=0,\; F_1(x,b'',\beta'',w)=0;$$
$$a=\varphi(\alpha,v,w),\; b=\varphi(\beta,v,w)$$

bestimmt werden können;

4) $$J=\int_{\alpha'}^{\beta'}\partial w\int_{\alpha}^{\beta}\partial v\int_{\alpha''}^{\beta''} PM\,\partial u, \qquad (C_4)$$

wenn die Integrationsgränzen unabhängig von x und z aus

$$f(x,a',z,\alpha')=0,\; f(x,b',z,\beta')=0;\; F_1(a,z,\alpha,w)=0,\; F_1(b,z,\beta,w)=0;$$
$$a''=\Theta(\alpha'',v,w),\; b''=\Theta(\beta'',v,w)$$

bestimmt werden können;

5) $$J=-\int_{\alpha}^{\beta}\partial w\int_{\alpha'}^{\beta'}\partial v\int_{\alpha''}^{\beta''} PM\,\partial u, \qquad (C_5)$$

wenn die Integrationsgränzen unabhängig von y und z aus

$$f(a,y,z,\alpha)=0,\; f(b,y,z,\beta)=0;\; F_2(a',z,\alpha',w)=0,\; F_2(b',z,\beta',w)=0;$$
$$a''=\Theta(\alpha'',v,w),\; b''=\Theta(\beta'',v,w)$$

bestimmt werden können;

6) $$J=\int_{\alpha}^{\beta}\partial w\int_{\alpha''}^{\beta''}\partial v\int_{\alpha'}^{\beta'} PM\,\partial u, \qquad (C_6)$$

wenn die Integrationsgränzen unabhängig von y und z aus

$$f(a,y,z,\alpha)=0,\; f(b,y,z,\beta)=0;\; F_2(y,a'',\alpha'',w)=0,\; F_2(y,b'',\beta'',w)=0;$$
$$a'=\psi(\alpha',v,w),\; b'=\psi(\beta',v,w)$$

bestimmt werden können.

Digitized by Google

VII. Beispiele wollen wir hier zunächst keine zufügen, da wir später dazu Gelegenheit erhalten werden. Wir bemerken jedoch hiezu nur noch das Folgende:

Das Wesentliche bei allen obigen Erörterungen war, dass immer wieder die Ordnung der Integration geändert werden darf. Wie wir in §. 78 schon bemerkt, ist es denkbar, dass diess auch gestattet ist, wenn die Gränzen nicht konstant sind, so dass wir nicht kurzweg sagen können, es sey in diesem Falle die obige Umformung nicht zulässig. Ja wenn wir zum Voraus wissen, es müsse das bestimmte vielfache Integral sich umformen lassen, indem man gewisse neue Veränderliche einführt, man auch aus andern Untersuchungen die Gränzen des neuen Integrals ermitteln kann, so wird man die Formeln (A) oder (C) immerhin anzuwenden haben. Wir werden von dieser Bemerkung mehrfach Gebrauch zu machen Gelegenheit haben, sie auch später noch förmlich erweisen (§. 168, II, III).

Dass man für vier- und mehrfache bestimmte Integrale ähnliche Untersuchungen anstellen kann, ist klar; doch wollen wir uns hierauf nicht weiter einlassen, da das Gesagte wohl genügen wird. Weitere Untersuchungen über bestimmte Integrale mögen späteren Abschnitten vorbehalten seyn.

Die allgemeine Umformungsformel ist im „Anhang" unter 𝔄, VI und XV abgeleitet.

§. 80.

Berechnung des Inhalts krummer Oberflächen.

I. Sey die Kurve MN die Projektion (der Gränzlinie) des zu berechnenden Stücks der krummen Oberfläche auf die Ebene der xy, wobei wir voraussetzen, dass jedem Punkte innerhalb dieser Kurve auch nur ein einziger Punkt der krummen Oberfläche, in so weit sie zu berechnen ist, zugehöre.

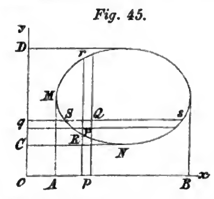


Fig. 45.

Durch Gerade, parallel mit den Axen der x und y, deren gegenseitige Entfernung bezüglich Δy (parallel mit der Axe der Ox) und Δx sey, theile man die Figur (in der Ebene der xy) in lauter Rechtecke, wovon PQ eines ist. Die Fläche eines jeden dieser Rechtecke ist $\Delta x\, \Delta y$. — In den Eckpunkten des Rechtecks PQ errichte man Senkrechte (parallel der z-Axe) und lasse sie enden an der Oberfläche, auf der hiedurch vier Punkte erhalten werden, die ein Viereck bilden können. Durch zwei entgegenstehende dieser Punkte lege man eine Gerade und ziehe ausserdem die vier Geraden, welche über den vier Seiten des Rechtecks PQ liegen. Hiedurch erhält man zwei ebene Dreiecke, deren Projektion auf die Ebene der xy das Rechteck PQ ist.

Digitized by Google

Dieselbe Konstruktion vollführe man für alle einzelnen Rechtecke und erhält dadurch über der Figur MN eine aus lauter kleinen Dreiecken zusammengesetzte Fläche (Polyeder), deren Projektion auf die Ebene der xy eben diese Figur ist. Das Dreieck über PQ, dessen eine Spitze über P liegt, ist in einer Ebene enthalten, welche durch die drei Punkte geht, deren Koordinaten sind: x, y, z; $x + \Delta x, y, z + \Delta_x z$; $x, y + \Delta y, z + \Delta_y z$, wo mit $\Delta_x z$, $\Delta_y z$ die Aenderungen von z bezeichnet sind, die man erhält, wenn man bloss x, oder bloss y sich ändern lässt. Diese Ebene macht mit der Ebene der xy einen Winkel, dessen Cosinus gleich

$$\frac{\Delta x \, \Delta y}{\sqrt{[(\Delta x \, \Delta y)^2 + (\Delta x \, \Delta_y z)^2 + (\Delta y \, \Delta_x z)^2]}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\Delta_y z}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_x z}{\Delta x}\right)^2\right]}},$$

so dass die Fläche jenes Dreiecks $= \frac{1}{2} \Delta x \, \Delta y \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\Delta_y z}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_x z}{\Delta x}\right)^2\right]}$ ist. Die Neigung der Ebene des andern über PQ stehenden Dreiecks ist um so mehr der eben bestimmten gleich, je kleiner Δx und Δy sind, so dass man beide Dreiecke um so mehr einander gleich annehmen kann, je kleiner Δx, Δy sind. Demnach ist ihre Summe $= \Delta x \, \Delta y \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\Delta_y z}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_x z}{\Delta x}\right)^2\right]}$.

Addirt man nun alle diese (Doppel-) Dreiecke, und lässt in dieser Summe Δx, Δy unbegränzt abnehmen, so wird der Gränzwerth der Summe die gesuchte krumme Fläche geben, da dann der Polyeder sich in die krumme Fläche verwandelt (d. h. letztere die Gränze desselben ist). Da zugleich $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ und $\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ sich unbegränzt den Grössen $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ genähert haben, so geht die fragliche Summe nach §. 77 und 78 in das doppelt bestimmte Integral $\int \partial x \int \partial y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ über. Die Gränzen für x und y sind aus der Figur MN zu entnehmen.

Ist also für ein beliebiges x (etwa Op): $pR = y_1$, $pr = y_2$, wo y_1, y_2 Funktionen von x sind, und sind $x = a$ (OA) und $x = b$ (OB) die äussersten Werthe von x, so ist die Fläche =

$$\int_a^b \partial x \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, \partial y. \qquad \text{(a)}$$

Ganz eben so könnte sie auch gleich gesetzt werden

$$\int_\alpha^\beta \partial y \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, \partial x, \qquad \text{(a')}$$

wenn für ein beliebiges y (z. B. Oq): $qS = x_1$, $qs = x_2$, wo x_1, x_2 Funktionen von y sind, und wenn die äussersten Werthe von y gleich α und β (OC und OD) sind.

Man kann auch noch in einer etwas verschiedenen Weise verfahren. Die Fläche des einen der über PQ stehenden Dreiecke, dessen Endpunkte zu Koordinaten (x, y, z),

Digitized by Google

$(x+\Delta x, y, z+\Delta_x z)$, $(x, y+\Delta y, z+\Delta_y z)$ haben, ist $\frac{1}{2}\sqrt{[(\Delta x\,\Delta y)^2+(\Delta y\,\Delta_x z)^2+(\Delta x\,\Delta_y z)^2]}$; die Fläche des andern, dessen Eckpunkte zu Koordinaten $(x+\Delta x, y, z+\Delta_x z)$, $(x, y+\Delta y, z+\Delta_y z)$, $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta_x z+\Delta_y z+\Delta_x\Delta_y z)$ hat, ist nach denselben Formeln $=\frac{1}{2}\sqrt{[(\Delta x\,\Delta y)^2+(\Delta y)^2(\Delta_x z+\Delta_x\Delta_y z)^2+(\Delta x)^2(\Delta_y z+\Delta_x\Delta_y z)^2]}$, (wo $\Delta_x\Delta_y z=\Delta_y\Delta_x z$), d. h. gleich

$$\frac{1}{2}\Delta x\,\Delta y\sqrt{1+\left(\frac{\Delta_x z}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta_y z}{\Delta y}\right)^2}$$

$$\text{und } \frac{1}{2}\Delta x\,\Delta y\sqrt{\left[1+\left(\frac{\Delta_x z}{\Delta x}+\Delta_y\frac{\Delta_x z}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta_y z}{\Delta y}+\Delta_x\frac{\Delta_y z}{\Delta y}\right)^2\right]}.$$

Lässt man Δx und Δy unendlich abnehmen, so werden die beiden Quadratwurzeln zu $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ so dass man die Flächen setzen kann:

$$\frac{1}{2}\Delta x\,\Delta y\left[\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}+A\right]$$

$$\text{und } \frac{1}{2}\Delta x\,\Delta y\left[\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}+B\right],$$

wo A und B mit Δx und Δy gegen Null gehen. Die Summe beider Dreiecke ist demnach

$$\Delta x\,\Delta y\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}+C\,\Delta x\,\Delta y,$$

wo C die Eigenschaft hat zu Null zu werden, wenn Δx und Δy es werden.

Die Summe aller Dreiecke ist, wenn durch Σ diese Summirung angedeutet wird,

$$\Sigma\Sigma\,\Delta x\,\Delta y\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}+\Sigma\Sigma\,C\,\Delta x\,\Delta y.$$

Summirt man die zweite Grösse für ein bestimmtes x nach allen Werthen von y, so ist $\Sigma C\,\Delta x\,\Delta y=\Delta x\,\Sigma C\,\Delta y=\Delta x\,C_1\,\Sigma\Delta y=\Delta x\,C_1\,(y_2-y_1)$, wo C_1 ein Mittelwerth zwischen allen C ist und also immer die Eigenschaft der C theilt; alsdann ist $\Sigma\Sigma C\,\Delta x\,\Delta y=\Sigma C_1\,(y_2-y_1)\,\Delta x=C_2\,\Delta x=(b-a)\,C_2$, wo C_2 ein Mittelwerth zwischen allen $C_1\,(y_2-y_1)$ ist, welch letztere immerhin mit C_1 (d. h. mit Δx und Δy) zu Null werden. Also wird auch C_2 zu Null mit Δx und Δy. Da obige Summe hiernach

$$\Sigma\Sigma\,\Delta x\,\Delta y\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}+(b-a)\,C_2,$$

so wird ihr Gränzwerth, wo C_2 verschwindet, gleich dem Gränzwerth des ersten Theils derselben, d. h. gleich dem Integral $\iint\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\partial x\,\partial y$. Dieses ist somit der Ausdruck der zu berechnenden Fläche.

II. Gesetzt die Gleichung der krummen Oberfläche sey auf Polarkoordinaten, statt auf rechtwinklige Koordinaten bezogen, und zwar seyen dieselben: die Entfernung r eines Punktes vom Anfangspunkt der Koordinaten, der Winkel ψ, den r mit seiner Projektion auf die Ebene der xy macht, und der Winkel φ, den diese Projektion mit der Axe der x macht, wobei r immer



Digitized by Google

positiv seyn soll, ψ von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ gerechnet werde, während φ von 0 bis 2π gehen könne, und im Drehungssinne: Axe der + x gegen die der + y gerechnet werde. Alsdann ist

$$x = r\cos\psi\cos\varphi,\quad y = r\cos\psi\sin\varphi,\quad z = r\sin\psi.$$

Ist nun r als Funktion von φ und ψ angesehen, so hat man (§. 69, 2)

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2+\left[r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)^2\right]\cos^2\psi}}{\cos\psi\left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\cos\psi - r\sin\psi\right)}.$$

Wir haben bereits schon gezeigt, dass in dem Ausdruck (a) die Ordnung der Integration geändert werden kann; ferner ist klar, dass mittelst der neuen Koordinaten ein Element der Fläche ausgedrückt werden kann, so dass also nothwendig die Formeln des §. 79, I hier angewendet werden dürfen. Die dortigen u und v sind hier durch φ und ψ ersetzt, während $\varphi(u, v) = r\cos\psi\cos\varphi$, $\psi(u,v) = r\cos\psi\sin\varphi$, also $\frac{\partial\psi}{\partial v} = -r\sin\psi\sin\varphi + \frac{\partial r}{\partial\psi}\cos\psi\sin\varphi$, $\frac{\partial\psi}{\partial u} = r\cos\psi\cos\varphi + \frac{\partial r}{\partial\varphi}\cos\psi\sin\varphi$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v} = -r\sin\psi\cos\varphi + \frac{\partial r}{\partial\psi}\cos\psi\cos\varphi$, $\frac{\partial\varphi}{\partial u} = -r\cos\psi\sin\varphi + \frac{\partial r}{\partial\varphi}\cos\psi\cos\varphi$; $\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} = r\cos\psi\left(r\sin\psi - \frac{\partial r}{\partial\psi}\cos\psi\right)$, so dass

$$\iint\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\partial x\,\partial y = \int\int\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2+\left[r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)^2\right]\cos^2\psi}}{\cos\psi\left[\frac{\partial r}{\partial\psi}\cos\psi - r\sin\psi\right]}$$

$$r\cos\psi\left(r\sin\psi - \frac{\partial r}{\partial\psi}\cos\psi\right)\partial\varphi\,\partial\psi = -\iint r\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2+\left[r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)^2\right]\cos^2\psi}\,\partial\varphi\,\partial\psi,$$

wo man das — Zeichen auch weglassen kann, so dass das Flächenstück =

$$\iint r\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2+\left[r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)^2\right]\cos^2\psi}\,\partial\varphi\,\partial\psi, * \qquad \text{(b)}$$

---

* Diese Formel lässt sich leicht geometrisch ableiten, so dass wir dadurch eine thatsächliche Bestätigung der Richtigkeit derselben haben. Wir wollen uns nämlich einen Punkt denken, dem φ und ψ zugehören und dann φ und ψ um die unendlich kleinen Grössen $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$ sich ändern lassen, so wird der Endpunkt des Fahrstrahls r auf der Oberfläche eine Fläche beschreiben, die wir als auf der Tangentialebene liegend ansehen dürfen. Was nun die Projektion derselben auf die Ebene der x y anbelangt, so ist sie gebildet von der durch die Aenderung des ψ um $\Delta\psi$ hervorgebrachten Verlängerung von $r\cos\psi$, d. h. von $\Delta(r\cos\psi)$, wo nicht φ sich ändert, und von der durch die Aenderung des φ um $\Delta\varphi$ in der Ebene der x y vom Halbmesser $r\cos\psi$ beschriebenen Linie, die senkrecht auf der ersten steht und als gerad muss angesehen werden. Die Fläche dieser Projection ist also, indem letztere Linie $= r\cos\varphi\,\Delta\varphi$:

$$\Delta(r\cos\psi)\,.\,r\cos\psi\,\Delta\varphi = \left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\cos\psi - r\sin\psi\right)\Delta\psi\, r\cos\psi\,\Delta\varphi,$$

Digitized by Google

worin r, $\frac{\partial r}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial r}{\partial \psi}$ als Funktionen von φ und ψ auszudrücken sind, während die Gränzen des Integrals den Bedingungen der Aufgabe gemäss zu bestimmen sind. (Vergl. Anhang, unter 𝔏.)

III. Die Formel des §. 49 für Rotationsflächen lässt sich aus der Formel (a) unmittelbar ableiten. Sey nämlich $y = f(x)$ die Gleichung der sich drehenden Kurve NN' (Fig. 32), so ist $y^2 + z^2 = f(x)^2$ die Gleichung der entstehenden Rotationsfläche,* somit:

$$z\frac{\partial z}{\partial x} = f(x)f'(x),\; y + z\frac{\partial z}{\partial y} = 0,\; \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f(x)f'(x)}{z},\; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{z},$$

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{z^2 + y^2 + f(x)^2 f'(x)^2}{z^2} = \frac{f(x)^2 + f(x)^2 f'(x)^2}{f(x)^2 - y^2} = \frac{f(x)^2[1 + f'(x)^2]}{f(x)^2 - y^2},$$

mithin, da die Gränzen von y sind $-f(x)$ und $+f(x)$ wenn man die halbe entstehende Fläche haben will, ist die ganze Fläche =

$$2\int_a^b \partial x \int_{-f(x)}^{+f(x)} \frac{f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{f(x)^2 - y^2}}\partial y = 2\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,\partial x \int_{-f(x)}^{+f(x)} \frac{\partial y}{\sqrt{f(x)^2 - y^2}}.$$

Aber es ist

$$\int \frac{\partial y}{\sqrt{f(x)^2 - y^2}} = arc\left(sin = \frac{y}{f(x)}\right),\quad \int_{-f(x)}^{+f(x)} \frac{\partial y}{\sqrt{f(x)^2 - y^2}} = \pi,$$

also die Rotationsfläche =

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\partial x,$$

die Formel des §. 49, II.

---

indem $\Delta(r\cos\varphi) = \frac{\Delta(r\cos\psi)}{\Delta\psi}\Delta\psi = \frac{\partial(r\cos\psi)}{\partial\psi}\Delta\psi$ ist. Demnach ist die eigentliche Fläche selbst

$$= \left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\cos\psi - r\sin\psi\right) r\cos\psi\,\Delta\psi\,\Delta\varphi \,.\, \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2 + \left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)^2\right]\cos^2\psi}}{\cos\psi\left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\cos\psi - r\sin\psi\right)}$$

$$= r\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2 + \left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)^2\right]\cos^2\psi}\,\Delta\varphi\,\Delta\psi,$$

indem die zugefügte Grösse $= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{\cos\alpha}$ ist, wenn α den Winkel der Tangentialebene mit der Ebene der xy vorstellt. Daraus ergibt sich dann sehr leicht die Formel (b).

* Dreht sich nämlich NN' um OM', so beschreibt Q einen Kreis, dessen Halbmesser = $PQ = f(x)$. Sind nun x, y, z die Koordinaten irgend eines Punktes dieser Kreislinie, also eines Punktes der entstehenden Oberfläche, so ist $x = OP$, während $PQ^2 = y^2 + z^2$ ist, so dass da immer $PQ^2 = f(x)^2$, nothwendig für alle Punkte der krummen Oberfläche die Gleichung $f(x)^2 = y^2 + z^2$ besteht.



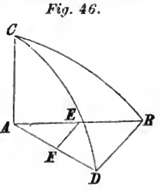
Digitized by Google

§. 81.

Beispiele zu §. 80.

I. In der Ebene der x z liegt ein Kreisbogen CB (Fig. 46), der an den Koordinatenaxen der x (AB) und z (AC) endet; längs desselben bewegt sich eine Gerade, die senkrecht auf der Ebene der x z steht und also eine Zylinderfläche beschreibt. Diese Zylinderfläche wird durch eine Ebene geschnitten, die durch die Axe der z und durch die in der Ebene der x y liegende Gerade AD geht; man soll das Stück BCD derselben berechnen, das von dieser Ebene und den Ebenen der x y und x z eingeschlossen wird. (Kreisförmiges Klostergewölbe.)

Fig. 46.



Sey r der Halbmesser des Kreisbogens BC, α, β die Koordinaten seines Mittelpunktes (die gewöhnlich beide negativ seyn werden), so ist die Gleichung des Kreises und also auch der Zylinderfläche:

$$(x-\alpha)^2+(z-\beta)^2=r^2,\ z=\beta\pm\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2},\ \frac{\partial z}{\partial x}=\mp\frac{x-\alpha}{\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Die Projektion der Fläche auf die Ebene der x y ist das Dreieck BAD, und wenn AB = a, BD = b, so ist die Gleichung der Geraden AD: $y=\frac{b}{a}x$; also sind die Gränzen von y für ein beliebiges x (= AE): 0 und $\frac{b}{a}x$ (= EF), während die von x sind 0 und a, so dass also die zu berechnende Fläche ist:

$$\int_0^a\partial x\int_0^{\frac{b}{a}x}\sqrt{1+\frac{(x-\alpha)^2}{r^2-(x-\alpha)^2}}\,\partial y=r\int_0^a\frac{\partial x}{\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}}\int_0^{\frac{b}{a}x}\partial y=\frac{rb}{a}\int_0^a\frac{x\,\partial x}{\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}}.$$

Aber es ist, wenn man $x-\alpha=z$, $x=z+\alpha$, $\frac{\partial x}{\partial z}=1$ setzt:

$$\int\frac{x\,\partial x}{\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}}=\int\frac{z\,\partial z}{\sqrt{r^2-z^2}}+\alpha\int\frac{\partial z}{\sqrt{r^2-z^2}}=-\sqrt{r^2-z^2}+\alpha\,arc\left(sin=\frac{z}{r}\right)$$

$$=-\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}+\alpha\,arc\left(sin=\frac{x-\alpha}{r}\right),\ \int_0^a\frac{x\,\partial x}{\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}}=-\sqrt{r^2-(a-\alpha)^2}$$

$$+\sqrt{r^2-\alpha^2}+\alpha\,arc\left(sin=\frac{a-\alpha}{r}\right)+\alpha\,arc\left(sin=\frac{\alpha}{r}\right).$$

Ist nun s die Länge des Bogens BC, so ist (§. 47):

$$s=\int_0^a\sqrt{1+\frac{(x-\alpha)^2}{r^2-(x-\alpha)^2}}\,\partial x=r\int_0^a\frac{\partial x}{\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}}=r\,arc\left(sin=\frac{a-\alpha}{r}\right)$$

$$+r\,arc\left(sin=\frac{\alpha}{r}\right),$$

$$\int_0^a\frac{x\,\partial x}{\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}}=\sqrt{r^2-\alpha^2}-\sqrt{r^2-(a-\alpha)^2}+\frac{\alpha s}{r},$$

mithin die fragliche Fläche =

Digitized by Google

$$\frac{r\,b}{a}\left[\sqrt{r^2-\alpha^2}-\sqrt{r^2-(a-\alpha)^2}\right]+\frac{\alpha\,b}{a}s.$$

Nun ist aber, wenn $AC=h$, für den Punkt C des Kreises:

$$\alpha^2+(h-\beta)^2=r^2,\ \text{also}\ r^2-\alpha^2=(h-\beta)^2,\ \sqrt{r^2-\alpha^2}=h-\beta,$$

eben so für B:

$$(a-\alpha)^2+\beta^2=r^2,\ r^2-(a-\alpha)^2=\beta^2,\ \sqrt{r^2-(a-\alpha)^2}=\pm\beta,$$

je nachdem, ob β positiv oder negativ ist. Setzen wir β negativ voraus, so ist

$$\sqrt{r^2-\alpha^2}-\sqrt{r^2-(a-\alpha)^2}=h-\beta+\beta=h,$$

mithin die Fläche:

$$\frac{r\,b}{a}h+\frac{\alpha\,b}{a}s=\frac{b}{a}(r\,h+\alpha\,s).$$

Fig. 47.

II. Um den Anfangspunkt der Koordinaten O ist mit dem Halbmesser r eine Kugelfläche beschrieben; man soll das über dem Rechtecke OC (Fig. 47) liegende Stück derselben berechnen, wenn $OA=a$, $OB=b$ ist.

Die Gleichung der Kugelfläche ist $x^2+y^2+z^2=r^2$, woraus $x+z\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $y+z\frac{\partial z}{\partial y}=0$, $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$, $1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}=\frac{r^2}{z^2}=\frac{r^2}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$, und da die Gränzen von y sind 0 und b, von x aber 0 und a, so ist die fragliche Fläche =

$$r\int_0^a\partial x\int_0^b\frac{\partial y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}.$$

Aber

$$\int\frac{\partial y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=arc\left(sin=\frac{y}{\sqrt{r-x^2}}\right),\ \int_0^b\frac{\partial y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=arc\left(sin=\frac{b}{\sqrt{r^2-x^2}}\right),$$

also die Fläche =

$$r\int_0^a arc\left(sin=\frac{b}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)\partial x.$$

Um das hier vorkommende Integral zu bestimmen, setze man in der Formel (7) des §. 27:

$$y=arc\left(sin=\frac{b}{\sqrt{r^2-x^2}}\right),\ \frac{\partial z}{\partial x}=1,\ \text{also}\ z=x,\ \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{b\,x}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-b^2-x^2}},$$

$$\int arc\left(sin=\frac{b}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)\partial x=x\,arc\left(sin=\frac{b}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)-b\int\frac{x^2\partial x}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-b^2-x^2}},$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-b^2-x^2}}=r^2\int\frac{\partial x}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-b^2-x^2}}-\int\frac{\partial x}{\sqrt{r^2-b^2-x^2}}=\frac{r}{b}arc\left(tg=\frac{b\,x}{r\sqrt{r^2-b^2-x^2}}\right)-arc\left(sin=\frac{x}{\sqrt{r^2-b^2}}\right),\ \int_0^a arc\left(sin=\frac{b}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)\partial x=$$

$$a\,arc\left(sin=\frac{b}{\sqrt{r^2-a^2}}\right)-r\,arc\left(tg=\frac{a\,b}{r\sqrt{r^2-b^2-a^2}}\right)+b\,arc\left(sin=\frac{a}{\sqrt{r^2-b^2}}\right),$$

also die Fläche =

Digitized by Google

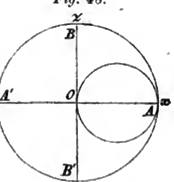
$$a r\, arc\left(sin = \frac{b}{\sqrt{r^2-a^2}}\right) - r^2 arc\left(tg = \frac{a b}{r\sqrt{r^2-b^2-a^2}}\right) + b r\, arc\left(sin = \frac{a}{\sqrt{r^2-b^2}}\right).$$

Daraus folgt, dass $r^2 > a^2 + b^2$ seyn muss, wie sich von selbst versteht, wenn über dem ganzen Rechteck noch Kugelfläche sich befinden soll.

III. Durch die Kugel, deren Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ist, wird ein Zylinder gesteckt, dessen Gleichung $x^2 - r x + z^2 = 0$ ist; man soll das Stück der Zylinderfläche, das innerhalb der Kugel, so wie das der Kugelfläche innerhalb des Zylinders berechnen.

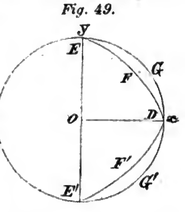
Die Kugel hat r zum Halbmesser und ihr Mittelpunkt ist Anfangspunkt der Koordinaten; der Zylinder steht senkrecht auf der Ebene der $x z$; * seine Grundfläche ist ein Kreis vom Halbmesser $\frac{r}{2}$ und dessen Mittelpunkt auf der Axe der x, in der Entfernung $\frac{r}{2}$ vom Anfangspunkt ist. Der Durchschnitt der Ebene der $x z$ mit Zylinder und Kugel bildet also die Figur 48, wo ABA'B' der um O mit dem Halbmesser r beschriebene Kugelkreis, der um OA als Durchmesser beschriebene Kreis aber der Durchschnitt der Zylinderfläche ist. Die Axe der y liegt also auf dem Zylindermantel.

Fig. 48.



Was die Projektion der Durchschnittskurve beider Flächen auf die Ebene der $x y$ anbelangt, so erhält man ihre Gleichung, wenn man z aus den beiden Gleichungen eliminirt. Dadurch ergibt sich $y^2 + r x = r^2$, eine Parabel, die durch die Punkte $x = r$, $y = 0$ und $x = 0$, $y = \pm r$ geht (Fig. 49), so dass EDE' diese Projektion vorstellt. Was nun das Kugelstück innerhalb des Zylinders anbelangt, so besteht es aus zwei gleichen Theilen, die sich im Punkte A (Fig. 48) berühren; der eine Theil liegt auf der Seite der positiven y, der andere auf der der negativen y; ferner schneidet die Ebene der $x y$ jeden dieser zwei Theile wieder in zwei Hälften, so dass man also bloss ein Viertel des Ganzen zu berechnen braucht. Die Projektion eines solchen Viertels ist in Figur 49 die Fläche DFEG, wo also die Gränzen von y sind: $\sqrt{r^2 - r x}$ (für DFE), $\sqrt{r^2 - x^2}$ (für DGE), mithin, da $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ denselben Werth hat wie in II, ist das Kugelflächenstück:

Fig. 49.



$$4 r \int_0^r \partial x \int_{\sqrt{r^2 - r x}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{\partial y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = 4 r \int_0^r \left[\frac{\pi}{2} - arc\left(sin = \frac{\sqrt{r^2 - r x}}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)\right] \partial x = 2 r^2 \pi -$$

$$4 r \int_0^r arc\left(sin = \sqrt{\frac{r^2 - r x}{r^2 - x^2}}\right) \partial x = 2 r^2 \pi - 4 r \int_0^r arc\left(sin = \sqrt{\frac{r}{r + x}}\right) \partial x.$$

* Senkrecht auf der Ebene der $x y$ kann man ihn nicht aufstehen lassen, da sonst in der Gleichung z nicht vorkäme, was doch die Formel (a) verlangt.

Digitized by Google

Nun ist (§ 27):

$$\int arc\left(sin=\sqrt{\frac{r}{r+x}}\right)\partial x = x\, arc\left(sin=\sqrt{\frac{r}{r+x}}\right)+\frac{\sqrt{r}}{2}\int\frac{\sqrt{x}\,\partial x}{r+x},$$

$$\int_0^r arc\left(sin=\sqrt{\frac{r}{r+x}}\right)\partial x = r\, arc\left(sin=\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\frac{\sqrt{r}}{2}\int_0^r\frac{\sqrt{x}\,\partial x}{r+x}=\frac{r\pi}{4}+\frac{\sqrt{r}}{2}\int_0^r\frac{\sqrt{x}\,\partial x}{r+x}.$$

Setzt man $x=z^2$, $\frac{\partial x}{\partial z}=2z$, so ist, da die Gränzen von z sind 0 und $\sqrt{r}$:

$$\int_0^r\frac{\sqrt{x}\,\partial x}{r+x}=2\int_0^{\sqrt{r}}\frac{z^2\,\partial z}{r+z^2}=2\int_0^{\sqrt{r}}\left(1-\frac{r}{r+z^2}\right)\partial z=2\sqrt{r}-\frac{2r}{\sqrt{r}}arc\left(tg=\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r}}\right)$$
$$=2\sqrt{r}-\frac{\sqrt{r}.\pi}{2},$$

also die Fläche: $2r^2\pi-r^2\pi-4r^2+r^2\pi=r^2(2\pi-4)=2r^2(\pi-2)$. (Vergl. §. 78, IV).

Was die Zylinderfläche innerhalb der Kugel anbelangt, so wird sie von der Ebene der xy in zwei Hälften getheilt, wovon DFEE'F'D die Projektion auf die Ebene der xy ist. Da aus $x^2-rx+z^2=0$ folgt: $2x-r+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{r-2x}{2z}=\frac{r-2x}{2\sqrt{rx-x^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$, so ist die fragliche Fläche:

$$2\int_0^r\partial x\int_{-\sqrt{r^2-rx}}^{\sqrt{r^2-rx}}\sqrt{1+\frac{(r-2x)^2}{4(rx-x^2)}}\,\partial y=2\int_0^r\frac{\sqrt{4(rx-x^2)+(r-2x)^2}}{2\sqrt{x}\sqrt{r-x}}\int_{-\sqrt{r^2-rx}}^{\sqrt{r^2-rx}}\partial y$$
$$=2\int_0^r\frac{r}{\sqrt{x}\sqrt{r-x}}\sqrt{r(r-x)}\,\partial x=2r^{\frac{3}{2}}\int_0^r\frac{\partial x}{\sqrt{x}}=4r^2.$$

IV. Eine Kegelfläche, deren Axe die der z ist und die durch Rotation einer durch den Anfangspunkt der Koordinaten gehenden Geraden, die mit der Axe der z den Winkel α macht, um die Axe der z entstanden ist, schneidet eine Kugelfläche, deren Halbmesser r ist, und deren Mittelpunkt der nämliche Anfangspunkt ist. Man soll das Stück der Kugelfläche innerhalb der Kegelfläche berechnen.

Die Gleichung der Kugel ist $x^2+y^2+z^2=r^2$ und also wie oben $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$. Was die Kegelfläche anbelangt, so wollen wir von einem Punkte (x, y, z) derselben auf die Ebene der xy uns eine Senkrechte gezogen denken; die Länge derselben ist $=z$; verbindet man ihren Fusspunkt mit dem Anfangspunkt der Koordinaten, so ist die Länge der Verbindungslinie $=\sqrt{x^2+y^2}$, und man hat offenbar:

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=cotg\,\alpha,\ \text{also}\ y^2+x^2=z^2\,tg^2\,\alpha,$$

als Gleichung der Kegelfläche. Die Projektion der Durchschnittskurve auf die Ebene der xy ist also

Digitized by Google

$$(x^2 + y^2)(1 + cotg^2\alpha) = r^2, \quad x^2 + y^2 = r^2 sin^2\alpha,$$

ein Kreis vom Halbmesser $r\,sin\,\alpha$, dessen Mittelpunkt der Anfangspunkt der Koordinaten ist. Demnach ist die fragliche Fläche:

$$r\int_{-r\,sin\,\alpha}^{+r\,sin\,\alpha}\partial x\int_{-\sqrt{r^2 sin^2\alpha - x^2}}^{\sqrt{r^2 sin^2\alpha - x^2}}\frac{\partial y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}},$$

oder wenn man $r\,sin\,\alpha = a$ setzt:

$$2r\int_{-a}^{+a} arc\left(sin = \sqrt{\frac{a^2-x^2}{r^2-x^2}}\right)\partial x.$$

Sodann ist, wie so eben

$$\int_{-a}^{+a} arc\left(sin = \sqrt{\frac{a^2-x^2}{r^2-x^2}}\right)\partial x = \sqrt{r^2-a^2}\int_{-a}^{+a}\frac{x^2\,\partial x}{(r^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$\sqrt{r^2-a^2}\int_{-a}^{+a}\left(\frac{r^2}{r^2-x^2}-1\right)\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sqrt{r^2-a^2}\left[\frac{r\pi}{\sqrt{r^2-a^2}}-\pi\right] \text{ (§. 43, VII)},$$

$$2r\int_{-a}^{+a} arc\left(sin = \sqrt{\frac{a^2-x^2}{r^2-x^2}}\right)\partial x = 2r^2\pi - 2r\pi\sqrt{r^2-a^2} = 2r^2\pi(1-cos\,\alpha) = 4r^2\pi\,sin^2\frac{\alpha}{2},$$

die bekannte Formel für eine sphärische Haube.

Will man ein Stück des Kegels berechnen, das innerhalb der Kugel liegt, so zieht man aus $z^2 = (x^2+y^2)cotg^2\alpha$: $z\frac{\partial z}{\partial x} = x\,cotg^2\alpha$, $z\frac{\partial z}{\partial y} = y\,cotg^2\alpha$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}cotg^2\alpha$ $= \frac{x\,cotg\,\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y\,cotg\,\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{x^2+y^2+x^2 cotg^2\alpha + y^2 cotg^2\alpha}{x^2+y^2}$ $= 1 + cotg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}$, also ist die Fläche:

$$\frac{1}{sin\,\alpha}\int_{-r\,sin\,\alpha}^{+r\,sin\,\alpha}\partial x\int_{-\sqrt{r^2 sin^2\alpha - x^2}}^{+\sqrt{r^2 sin^2\alpha - x^2}}\partial y = \frac{2}{sin\,\alpha}\int_{-r\,sin\,\alpha}^{+r\,sin\,\alpha}\sqrt{r^2 sin^2\alpha - x^2}\,\partial x = \frac{2}{sin\,\alpha}\left[\frac{r^2 sin^2\alpha}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{r^2 sin^2\alpha}{2}\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= r^2\pi\,sin\,\alpha.$$

V. Ein Kreiszylinder steht schief auf seiner Grundfläche; es soll sein Mantel berechnet werden. Sey r der Halbmesser der Grundfläche, b die Länge der Zylinderaxe, α der Winkel, den sie mit der Grundebene macht; ferner wähle man letztere zur Ebene der xy, den Mittelpunkt des Grundkreises zum Anfangspunkt der Koordinaten, die Ebene durch die Axe des Zylinders und die Axe der z zur Ebene der xz, so dass die Axe der x Projektion der Zylinderaxe auf die Ebene der xy ist. Was nun die Gleichung der Zylinderfläche anbelangt, so denken wir uns durch den Punkt (x, y, z) derselben eine Ebene parallel mit der Grundfläche, welche die Zylinderaxe in einem Punkte schneiden wird, dessen Entfernung vom gewählten Punkte $= r$ ist. Die Länge des Zylinderaxenstücks vom Anfangspunkt der Koordinaten

Digitized by Google

bis zu diesem Durchschnittspunkte ist $\frac{z}{\sin\alpha}$, so dass die Koordinaten des Durchschnittspunkts sind: $\frac{z}{\sin\alpha}\cos\alpha$, 0, z, und man also hat:

$$(z\,cotg\,\alpha - x)^2 + y^2 + (z - z)^2 = r^2,$$

d. h. die Gleichung der Zylinderfläche ist

$$(z\,cotg\,\alpha - x)^2 + y^2 = r^2,\quad z\,cotg\,\alpha = x \pm \sqrt{r^2 - y^2},$$

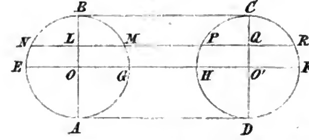
wo beide Zeichen gelten, da jedes z die Zylinderfläche zweimal trifft. Man zieht daraus:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = tg\,\alpha,\ \frac{\partial z}{\partial y} = \mp \frac{y\,tg\,\alpha}{\sqrt{r^2 - y^2}},\quad 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 + tg^2\alpha + \frac{y^2 tg^2\alpha}{r^2 - y^2}$$

$$= \frac{r^2(1 + tg^2\alpha) - y^2}{r^2 - y^2} = \frac{r^2 - y^2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\,(r^2 - y^2)}.$$

Sind AB, CD zwei Kreise vom Halbmesser r, ist die Entfernung OO′ ihrer Mittelpunkte $= b\cos\alpha$, so stellt Figur 50 die Projektion der zu berechnenden Fläche auf die Ebene der xy vor, wobei OO′ Axe der x, OB der y ist. Dabei ist AEBCHD die Projektion der einen Hälfte, AGBCFD der andern. In diesem Falle ist es nun bequemer, die Formel (a′) anzuwenden. Für ein beliebiges $y = OL$ sind die Gränzen von x

Fig. 50.



für die erste Hälfte: $-NL = -LM$ und $LP = OO' - PQ = OO' - LM$,
„ „ zweite „ : $+LM$ und $LR = OO' + QR = OO' + LM$.

Da nun $LM = \sqrt{r^2 - y^2}$ und $-r$, $+r$ die Gränzen von y sind, so hat man für den Zylindermantel:

$$\frac{1}{\cos\alpha}\int_{-r}^{+r}\partial y \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{b\cos\alpha - \sqrt{r^2-y^2}} \sqrt{\frac{r^2 - y^2\cos^2\alpha}{r^2 - y^2}}\,\partial x + \frac{1}{\cos\alpha}\int_{-r}^{+r}\partial y \int_{\sqrt{r^2-y^2}}^{b\cos\alpha + \sqrt{r^2-y^2}} \sqrt{\frac{r^2 - y^2\cos^2\alpha}{r^2 - y^2}}\,\partial x$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha}\int_{-r}^{+r}\partial y \sqrt{\frac{r^2 - y^2\cos^2\alpha}{r^2 - y^2}} \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{b\cos\alpha - \sqrt{r^2-y^2}} \partial x + \frac{1}{\cos\alpha}\int_{-r}^{+r}\partial y \sqrt{\frac{r^2 - y^2\cos^2\alpha}{r^2 - y^2}} \int_{\sqrt{r^2-y^2}}^{b\cos\alpha + \sqrt{r^2-y^2}} \partial x$$

$$= 2b\int_{-r}^{+r}\sqrt{\frac{r^2 - y^2\cos^2\alpha}{r^2 - y^2}}\,\partial y = 4b\int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - y^2\cos^2\alpha}{r^2 - y^2}}\,\partial y\ (\text{§. 42, VII}).$$

Setzt man hier $y = r\sin\varphi$, $\frac{\partial y}{\partial\varphi} = r\cos\varphi$, so sind die Gränzen von φ: 0 und $\frac{\pi}{2}$ und es ist die Fläche =

$$4rb\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2\alpha\sin^2\varphi}\,\partial\varphi.$$

Digitized by Google

Gemäss §. 57, VII ist aber $4\,r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^2\alpha\sin^2\varphi}\,\partial\varphi$ der Umfang einer Ellipse, deren Halbaxen sind: r und $r\sin\alpha$, und da diese Ellipse die Kurve ist, die man erhält, wenn man den Zylinder senkrecht auf seine Axe durchschneidet, so folgt hieraus, dass der Zylindermantel gleich ist dem Umfang des senkrecht auf die Axe geführten Schnittes, multiplizirt mit der Länge der Axe.

VI. Man soll die Fläche berechnen, die durch Rotation der Lemniscate (Fig. 25, S. 180) um BA entsteht. * Die Gleichung der Lemniscate ist $r^2=a^2\cos 2\omega= a^2(\cos^2\omega-\sin^2\omega)$, also da $r^2=x^2+y^2$, $\cos^2\omega=\frac{x^2}{x^2+y^2}$, $\sin^2\omega=\frac{y^2}{x^2+y^2}$, so ist ihre Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten: $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ folglich die Gleichung der Rotationsfläche, wenn die Axen der x und y bleiben (§. 80, III):

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2-y^2-z^2).$$

Setzt man die oben erwähnten Polarkoordinaten, so ist:

$$r^4=a^2r^2(\cos^2\psi\cos^2\varphi-\cos^2\psi\sin^2\varphi-\sin^2\psi)=a^2r^2(2\cos^2\varphi\cos^2\psi-1),$$
$$r^2=a^2(2\cos^2\varphi\cos^2\psi-1).$$

Hieraus:

$$r\frac{\partial r}{\partial\varphi}=-2a^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\psi,\quad r\frac{\partial r}{\partial\psi}=-2a^2\cos^2\varphi\cos\psi\sin\psi,$$

$$r^2\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2+r^2\cos^2\psi\left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)^2+r^4\cos^2\psi=4a^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi\cos^4\psi+4a^4\cos^4\varphi\cos^4\psi\sin^2\psi$$
$$+4a^4\cos^4\varphi\cos^6\psi-4a^4\cos^2\varphi\cos^4\psi+a^4\cos^2\psi$$
$$=4a^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi\cos^4\psi+4a^4\cos^4\varphi\cos^4\psi-4a^4\cos^2\varphi\cos^4\psi+a^4\cos^2\psi$$
$$=4a^4\cos^2\varphi\cos^4\psi-4a^4\cos^2\varphi\cos^4\psi+a^4\cos^2\psi=a^4\cos^2\psi,$$

also

$$r\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2+\left[r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)^2\right]\cos^2\psi}=a^2\cos\psi.$$

Was nun die Gränzwerthe anbelangt, so sind die von φ, wenn man nur die durch AMB enstandene Hälfte erhalten will, $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$; die einem beliebigen φ entsprechenden Gränzwerthe von ψ sind, wenn der Pol wie hier nicht im Innern des Körpers liegt, aus dem Kegel zu entnehmen, dessen Spitze im Pol sich befindet und der die zu berechnende Fläche umhüllt. Für unsern Fall ist derselbe enstanden durch Rotation einer Geraden durch A, die mit AB einen Winkel $=\frac{\pi}{4}$ macht, um AB. Da die Gleichung dieser Geraden $y=x$ ist, so ist $y^2+z^2=x^2$ die Gleichung des Kegels, also wenn man die Polarkoordinaten einführt: $\cos^2\psi\sin^2\varphi+\sin^2\psi=\cos^2\psi\cos^2\varphi$, woraus $\sin^2\psi=\cos^2\psi\cos 2\psi$, $tg^2\psi=\cos 2\varphi$, $tg\,\psi=\sqrt{\cos 2\varphi}$, so dass die Gränzen von ψ sind: $+arc(tg=\sqrt{\cos 2\varphi})$, $-arc(tg=\sqrt{\cos 2\varphi})$ und mithin die zu berechnende Hälfte:

---

* Findet sich nach §. 49, III für $r^2=a^2\cos 2\omega$ gleich $4a^2\pi\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)=2a^2\pi(2-\sqrt{2})$.

Digitized by Google

$$a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}}\partial\varphi\int_{-arc(tg=\sqrt{\cos 2\varphi})}^{+arc(tg=\sqrt{\cos 2\varphi})}\cos\psi\,\partial\psi\,.$$

Da nun $\int\cos\psi\,\partial\psi=\sin\psi$, also das bestimmte Integral nach ψ gleich $\sin arc\,(tg=\sqrt{\cos 2\varphi})-\sin[-arc\,(tg=\sqrt{\cos 2\varphi})]=2\sin arc\,(tg=\sqrt{\cos 2\varphi})$, und allgemein $\sin arc\,(tg=z)=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$ [§. 32, IV (f)], so ist also die halbe Fläche =

$$2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{\sqrt{1+\cos 2\varphi}}\partial\varphi=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}}\,\partial\varphi\,.$$

Um das hier vorkommende Integral zu bestimmen, setzen wir $\cos 2\varphi=u$, $-2\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}=1$, $\frac{\partial\varphi}{\partial u}=-\frac{1}{2\sqrt{1-u^2}}$, da $\sin 2\varphi$ immer positiv ist. Also ist

$$\int\sqrt{\frac{\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}}\,\partial\varphi=-\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{u}{1+u}}\cdot\frac{\partial u}{\sqrt{1-u^2}}=-\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{u}{(1+u)(1-u^2)}}\,\partial u$$
$$=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+u}\sqrt{\frac{u}{1-u}}\,\partial u\,.$$

Setzt man hier noch $\frac{u}{1-u}=v^2$, $u=\frac{v^2}{1+v^2}$, $\frac{\partial u}{\partial v}=\frac{2v}{(1+v^2)^2}$, so ist

$$\int\sqrt{\frac{\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}}\,\partial\varphi=-\int\frac{1+v^2}{1+2v^2}v\cdot\frac{v\,\partial v}{(1+v^2)^2}=-\int\frac{v^2\,\partial v}{(1+2v^2)(1+v^2)},$$

wobei nun die Gränzen von u sind: 1 und 0, also von $v:\infty$ und 0, so dass

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}}\,\partial\varphi=\int_0^{\infty}\frac{v^2\,\partial v}{(1+2v^2)(1+v^2)}.$$

Aber

$$\int\frac{v^2\,\partial v}{(1+2v^2)(1+v^2)}=\int\left(\frac{1}{1+v^2}-\frac{1}{1+2v^2}\right)\partial v=arc\,(tg=v)-\frac{1}{\sqrt{2}}arc\,(tg=v\sqrt{2}),$$

$$\int_0^{\infty}\frac{v^2\,\partial v}{(1+2v^2)(1+v^2)}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2}=\frac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2}.$$

also die halbe Fläche $=2a^2\pi\frac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$, die ganze $\frac{4a^2\pi(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}=2a^2\pi(2-\sqrt{2})$.

(Vergl. §. 160, II; §. 169, I; Anhang, unter 𝕮).

§. 82.

Rektifikation doppelt gekrümmter Kurven.

Soll man die Länge des Bogens einer doppelt gekrümmten Kurve berechnen, dessen Endabszissen (x) a und b sind, so wird man wie in §. 47

Digitized by Google

annehmen dürfen, dass Sehne und Bogen zusammenfallen, wenn beide unendlich klein sind. Da nun die Länge der Sehne $=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$ ist, wenn sie sich vom Punkte (x, y, z) zum Punkte $(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$ erstreckt, so ist also, wenn Δs die Länge des sich zwischen denselben Punkten erstreckenden Kurvenbogens ist:

$$Gr\frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}=\pm 1,\quad Gr\frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}}=\pm 1,$$

d. h.

$$\frac{\partial s}{\partial x}=\pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2},$$

woraus dann leicht folgt, dass die Länge des zu berechnenden Bogens =

$$\pm\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\,\partial x,$$

wo $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ die aus den zwei Gleichungen der Kurve gezogenen Differentialquotienten sind, und das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Bogen wächst oder abnimmt mit wachsendem x. In dieser Beziehung gelten überhaupt die in §. 47 schon gemachten Bemerkungen. *

* Man wird sich von der Länge eines Kurvenbogens immerhin den klarsten Begriff machen, wenn man denselben als Gränze der Summe aller Seiten eines eingeschriebenen (geradlinigen) Linienzugs (§. 47) ansieht. Sind die auf der x-Axe gemessenen Abstände der Eckpunkte des Zuges sämmtlich $=\Delta x$ (d. h. ist die Projektion aller Seiten auf die x-Axe gleich Δx), so ist die Länge irgend einer Seite $=\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}$, und da (§. 15, I) $\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}+\alpha$, wo $Gr\ \alpha=0$, so ist diese Länge $=\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}+\alpha\Delta x$. Die Summe aller Seiten ist also, wenn wir d s Summenzeichen Σ gebrauchen: $\Sigma\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}+\Sigma\alpha\Delta x$. Der Gränzwerth des ersten Theils ist (§. 39) $\int_a^b\partial x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}$, der des zweiten Theils aber Null (§. 7, IV). Demnach ist der Gränzwerth der Summe aller Seiten des Linienzugs, d. h. der Kurvenbogen $=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\,\partial x$. Dass man in Bezug auf Bezeichnung diesen Ausdruck auch schreiben kann: $\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx$ oder $\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\,dx$ ist klar.

Digitized by Google

I. Man soll die Länge einer auf einen senkrechten Zylinder vom Halbmesser r gewickelten Schraubenlinie berechnen.

Die Gleichungen derselben sind $x = r\cos\omega$, $y = r\sin\omega$, $z = ar\omega$, wo a eine Konstante ist, und ω den Winkel bedeutet, den der vom Punkte (x, y, z) senkrecht auf die Zylinderaxe gezogene Halbmesser des Zylinders mit der Axe der x macht, wenn derselbe von 0 bis in's Unbegränzte gezählt wird. Demnach:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \omega}}{\frac{\partial x}{\partial \omega}} = \frac{r\cos\omega}{-r\sin\omega} = -\cot g\,\omega, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial z}{\partial \omega}}{\frac{\partial x}{\partial \omega}} = \frac{ar}{-r\sin\omega} = -\frac{a}{\sin\omega},$$

$$\int\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\,\partial x = \int\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\,\frac{\partial x}{\partial \omega}\,\partial\omega =$$

$$\int\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)^2}\,\partial\omega$$

$$= r\int\sqrt{\sin^2\omega+\cos^2\omega+a^2}\,\partial\omega = r\sqrt{1+a^2}\int\partial\omega = r\sqrt{r+a^2}\,\omega,$$

mithin wenn 0 und ω_1 die Gränzwerthe von ω sind, so ist die Länge des Bogens $= r\,\omega_1\sqrt{1+a^2} = \frac{z_1}{a}\sqrt{1+a^2}$, wo z_1 die Ordinate des Endpunktes ist.

II. Man soll die Länge des Bogens einer auf einen senkrechten Kreiskegel gewickelten Schraubenlinie bestimmen.

Man kann sich die fragliche Schraubenlinie in folgender Weise entstanden denken. Eine Gerade, die durch den Anfangspunkt der Koordinaten geht, mache mit der Axe der x den Winkel α und drehe sich mit gleichförmiger Bewegung um diese Axe, während ein Punkt in derselben, der vom Anfangspunkt ebenfalls ausgeht, sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt; alsdann beschreibt die Gerade die Kegelfläche, der Punkt die fragliche Schraubenlinie. Um die Gleichungen derselben zu finden, beachten wir zuerst, dass die Gleichung der Kegelfläche ist $y^2+z^2 = x^2 tg^2\alpha$ (§. 81, IV) und diess die eine der Gleichungen seyn wird. Seyen nun x, y, z die Koordinaten des beschreibenden Punktes zur Zeit t, so wird, wenn c der Winkel ist, den die durch die Axe der x und die drehende Gerade gelegte Ebene in der Zeit 1 zurücklegt, ct der Winkel seyn, den diese Ebene in jenem Zeitmoment mit der Ebene der xy macht, wenn diese letztere Ebene die anfängliche Lage der beweglichen Ebene ist. Ist ferner a der Weg, den der beschreibende Punkt in der Zeit 1 zurücklegt, so ist seine Entfernung vom Anfangspunkt zur Zeit t gleich at, und wenn man nun die bewegliche Gerade in dem Zeitmomente t auf die Ebene der yz projizirt, dabei voraussetzt, dass der Winkel ct in der Richtung von der Axe der y zu der der z gezählt wird, so wird ct der Winkel seyn, den diese Projektion, deren Länge $= at\sin\alpha$ ist, macht mit der Axe der y. Daraus folgt, dass nothwendig $y = at\sin\alpha\cos(ct)$ ist. Da auch $at\cos\alpha = x$, so ist $t = \frac{x}{a\cos\alpha}$ und man kann daher folgende zwei Gleichungen als Gleichungen der Schraubenlinie aufstellen:

$$y = x\,tg\,\alpha\cos\left(\frac{cx}{a\cos\alpha}\right), \quad z = x\,tg\,\alpha\sin\left(\frac{cx}{a\cos\alpha}\right),$$

woraus von selbst folgt $y^2+z^2 = x^2 tg^2\alpha$. Was nun den Quotienten $\frac{c}{a}$ anbelangt,

Digitized by Google

so kann er in etwas anderer Weise ausgedrückt werden. Sey nämlich τ die Zeit, in der die Gerade eine vollständige Umdrehung macht, so dass also $c\,t = 2\pi$, $\tau = \frac{2\pi}{c}$, so wird der bewegliche Punkt in dieser Zeit den Weg $a\tau = \frac{a}{c}\,2\pi$ zurücklegen, und wenn wir diesen Weg mit h bezeichnen, so ist $\frac{a}{c}\,2\pi = h$, $\frac{c}{a} = \frac{2\pi}{h}$ und es sind endlich die gesuchten Gleichungen:

$$y = x\,tg\,\alpha\cos\left(\frac{2\pi x}{h\cos\alpha}\right),\quad z = x\,tg\,\alpha\sin\left(\frac{2\pi x}{h\cos\alpha}\right).$$

Was übrigens h anbelangt, so ist es die **Höhe eines Schraubengangs**, d. h. die Entfernuug derjenigen Punkte, in denen eine Seitenlinie des Kegels (eine durch den Scheitel gehende, auf dem Kegelmantel liegende Gerade) die Schraubenlinie schneidet. Jetzt ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = tg\,\alpha\cos\left(\frac{2\pi x}{h\cos\alpha}\right) - \frac{2\pi x}{h\cos\alpha}\,tg\,\alpha\sin\left(\frac{2\pi x}{h\cos\alpha}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = tg\,\alpha\sin\left(\frac{2\pi x}{h\cos\alpha}\right) + \frac{2\pi x}{h\cos\alpha}\,tg\,\alpha\cos\left(\frac{2\pi x}{h\cos\alpha}\right),$$

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 1 + tg^2\alpha + \frac{4\pi^2 x^2}{h^2\cos^2\alpha}\,tg^2\alpha = \frac{h^2 + 4\pi^2 x^2\,tg^2\alpha}{h^2\cos^2\alpha},$$

also wenn man die Länge der Schraubenlinie vom Scheitel ($x = 0$) an rechnet, bis zu demjenigen Punkte, dessen Abszissse $x = x_1$, so hat man für dieselbe:

$$\frac{1}{h\cos\alpha}\int_0^{x_1}\sqrt{h^2 + 4\pi^2 tg^2\alpha\, x^2}\,\partial x = \frac{1}{h\cos\alpha}\left[\frac{x_1}{2}\sqrt{h^2 + 4\pi^2 tg^2\alpha\,.\,x_1^2} + \right.$$

$$\left.\frac{h^2}{4\pi\,tg\,\alpha}\,l\left(\frac{x_1\,2\pi\,tg\,\alpha + \sqrt{h^2 + 4\pi^2 x_1^2\,tg^2\alpha}}{h}\right)\right],$$

d. h. wenn man zur Abkürzung $\frac{2\pi\,tg\,\alpha}{h} = k$ setzt, so ist diese Länge $=$

$$\frac{x_1}{2\cos\alpha}\sqrt{1 + k^2 x_1^2} + \frac{1}{2k\cos\alpha}\,l(k x_1 + \sqrt{1 + k^2 x_1^2}).$$

Für $\alpha = 90^0$ wird die Schraubenlinie zu einer Spirale in der Ebene der $y\,z$, und wenn dann r_1 die Entfernung des Endpunkts vom Pol ist, so ist oben $\frac{x_1}{\cos\alpha} = r_1$, also $k x_1 = \frac{2\pi\sin\alpha}{h}\,\frac{x_1}{\cos\alpha} = \frac{2\pi r_1}{h}$, $k\cos\alpha = \frac{2\pi}{h}$ und wenn $\frac{2\pi}{h} = \frac{1}{a}$, so ist die Länge der Spirale:

$$\frac{r_1}{2a}\sqrt{a^2 + r_1^2} + \frac{a}{2}\,l\left(\frac{r_1 + \sqrt{a^2 + r_1^2}}{a}\right),\ (\S.\ 48,\ III).$$

III. Man soll die Länge der Durchschnittskurve der zwei in §. 81, III betrachteten Flächen bestimmen.

Die Gleichungen derselben sind $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $z^2 + x^2 - r\,x = 0$, woraus folgt $z = \sqrt{r\,x - x^2}$, $y = \sqrt{r^2 - r\,x}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{r - 2x}{2\sqrt{rx - x^2}}$, $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{r}{2\sqrt{r^2 - rx}}$, $1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 1 + \frac{(r - 2x)^2}{4(rx - x^2)} + \frac{r^2}{4(r^2 - rx)} = 1 + \frac{(r - 2x)^2}{4x(r - x)} + \frac{r^2}{4r(r - x)} =$

$\frac{4x(r-x)+(r-2x)^2+rx}{4x(r-x)} = \frac{r^2+rx}{4x(r-x)}$, mithin, da die Durchschnittskurve durch die Ebene der xy in vier gleiche Theile getheilt wird, und die Gränzen von x für einen derselben sind 0 und r, so ist dieser vierte Theil =

$$\frac{\sqrt{r}}{2}\int_0^r \sqrt{\frac{r+x}{(r-x)x}}\,\partial x = \frac{\sqrt{r}}{2}\int_0^r \frac{r+x}{\sqrt{x(r^2-x^2)}}\,\partial x.$$

Man setze hier $x = r\cos^2\varphi$, was man darf, da $x \lesseqgtr {r \atop 0}$, so sind die Gränzen von φ: $\frac{\pi}{2}$ und 0, und es ist $\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -2r\sin\varphi\cos\varphi$, also

$$\frac{\sqrt{r}}{2}\int_0^r \frac{r+x}{\sqrt{x(r^2-x^2)}}\,\partial x = -\frac{\sqrt{r}}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{r+r\cos^2\varphi}{\sqrt{r}.\cos\varphi.r\sqrt{1-\cos^4\varphi}}\,2r\sin\varphi\cos\varphi\,\partial x =$$

$$r\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos^2\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}\sqrt{1+\cos^2\varphi}}\sin\varphi\,\partial\varphi = r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2\varphi}\,\partial\varphi = r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-\sin^2\varphi}\,\partial\varphi$$

$$= r\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi}\,\partial\varphi.$$

Diese Grösse ist aber (§. 57, VII) gleich dem vierten Theil des Umfangs einer Ellipse, deren Halbaxen $r\sqrt{2}$ und r sind, so dass also die ganze Länge der Kurve gleich ist dem Umfang dieser Ellipse.

IV. Man soll die Länge der Durchschnittslinie der Kugel $x^2+y^2+z^2=a^2$ und des elliptischen Zylinders $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b^2<a^2)$ berechnen.

Man zieht aus $x^2+y^2+z^2=a^2$, $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$: $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $z=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{e}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, wenn $a^2-b^2=e^2$. Daraus $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{ex}{a\sqrt{a^2-x^2}}$, $1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = \frac{a^2(a^2-x^2)+b^2x^2+e^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}$ $=\frac{a^2}{a^2-x^2}$.

Für den vierten Theil der über der Ebene der xy liegenden Durchschnittskurve sind die Gränzen von x: 0 und a, so dass also derselbe =

$$a\int_0^a \frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a\pi}{2},$$

mithin der über der Ebene der xy befindliche Theil $= 2a\pi$, d. h. gleich dem Umfang eines grössten Kreises der Kugel.

V. Wollte man bei diesen Aufgaben die Polarkoordinaten des §. 80 einführen, so müssten etwa r und ψ als Funktionen von φ betrachtet werden, und man hätte

Digitized by Google

$$\int\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\,\partial x=\int\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}\,\partial\varphi,$$

wo nun

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}=\frac{\partial r}{\partial\varphi}\cos\psi\cos\varphi-r\sin\psi\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}-r\cos\psi\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi}=\frac{\partial r}{\partial\varphi}\cos\psi\sin\varphi-r\sin\psi\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}+r\cos\psi\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial\varphi}=\frac{\partial r}{\partial\varphi}\sin\psi+r\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi},$$

also

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2=\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2+r^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+r^2\cos^2\psi,$$

so dass, wenn φ_0, φ_1 die Gränzen von φ sind, die Länge des Bogens =

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2+r^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+r^2\cos^2\psi}\,\partial\varphi,$$

wo nun r und ψ durch φ vermöge der Gleichungen der Kurve auszudrücken sind.

Meistens werden diese Polarkoordinaten mit Vortheil dann angewendet werden, wenn die Kurve, deren Länge berechnet werden soll, auf einer Kugel liegt, da in diesem Falle r konstant, gleich dem Kugelhalbmesser, ist. Alsdann ist die Länge =

$$r\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+\cos^2\psi}\,\partial\varphi,$$

wo r den Kugelhalbmesser bedeutet. Wollte man hiernach etwa die Aufgabe IV lösen, so wäre $r=a$, und $\cos^2\psi\cos^2\varphi+\frac{a^2}{b^2}\cos^2\psi\sin^2\varphi=1$, $\cos^2\psi=\frac{b^2}{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}$,

$$-2\sin\psi\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}=-\frac{b^2(2a^2\sin\varphi\cos\varphi-2b^2\sin\varphi\cos\varphi)}{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^2},\ \sin\psi\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}=\frac{b^2(a^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi}{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^2},$$

$$\sin^2\psi\cos^2\psi\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2=\frac{b^4e^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^4},\quad \sin^2\psi=1-\cos^2\psi=\frac{(a^2-b^2)\sin^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}$$

$$=\frac{e^2\sin^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi},\quad \sin^2\psi\cos^2\psi=\frac{b^2e^2\sin^2\varphi}{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^2},$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2=\frac{b^2e^2\cos^2\varphi}{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^2},\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+\cos^2\psi=\frac{b^2(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)+b^2e^2\cos^2\varphi}{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^4\varphi)^2}=$$

$$\frac{a^2b^2}{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^2},\quad \sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+\cos^2\psi}=\frac{ab}{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi},$$

also da für den vierten Theil der Kurve die Gränzen von φ sind 0 und $\frac{\pi}{2}$, so ist die Kurvenlänge:

$$4a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}=4a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{a^2-e^2\cos^2\varphi}=\frac{4a^2b}{ab}\cdot\frac{\pi}{2}=2a\pi\ (\S.43,\ \mathrm{VII}).$$

Digitized by Google

VI. Die Kugel $x^2+y^2+z^2=b^2$ durchschneidet die Fläche $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$, wo $a^2>b^2>c^2$; man soll die Länge der Durchschnittskurve berechnen.

Führt man Polarkoordinaten ein, so ist $r=b$, also $b^2=a^2\cos^2\psi\cos^2\varphi+b^2\cos^2\psi\sin^2\varphi+c^2\sin^2\psi$, $b^2-c^2=\cos^2\psi(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi-c^2)$, $\cos^2\psi=\frac{b^2-c^2}{(a^2-c^2)\cos^2\varphi+(b^2-c^2)\sin^2\varphi}$, so dass wenn $a^2-c^2=e^2$, $b^2-c^2=\varepsilon^2$, $\cos^2\psi=\frac{\varepsilon^2}{e^2\cos^2\varphi+\varepsilon^2\sin^2\varphi}$, woraus wie oben $\sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+\cos^2\psi}=\frac{e\varepsilon}{e^2\cos^2\varphi+\varepsilon^2\sin^2\varphi}$, also da für den achten Theil der Durchschnittskurve die Gränzen von φ sind 0 und $\frac{\pi}{2}$, so ist die Kurve $=$

$$8be\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{e^2\cos^2\varphi+\varepsilon^2\sin^2\varphi}=8be\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{e^2\sin^2\varphi+\varepsilon^2\cos^2\varphi}\ (\S.\ 42,\ IV)$$

$$=8be\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{e^2-(e^2-\varepsilon^2)\cos^2\varphi}=8b\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{a^2-c^2-(a^2-b^2)\cos^2\varphi}$$

$$=\frac{8b\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}}{\sqrt{a^2-c^2}\sqrt{b^2-c^2}}\frac{\pi}{2}=4b\pi,$$

d. h. gleich dem doppelten Umfang eines grössten Kugelkreises.

§. 83.

Berechnung von Körperinhalten.

I. Soll man den Inhalt eines beliebig begränzten Körpers suchen, so wird man durch Ebenen, die parallel gehen mit den Koordinatenebenen der xy, xz, yz denseben in Prismen zertheilen. Sind die betreffenden Ebenen in je gleichem Abstande und zwar die mit der Ebene der xy parallelen in dem Abstande Δz, die mit der Ebene der xz parallelen in dem Abstande Δy, die mit der Ebene der yz parallelen in dem Abstande Δx, so wird der Inhalt eines solchen Prismas $=\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ seyn. Je kleiner nun Δx, Δy, Δz sind, desto mehr solcher Prismen werden sich im Innern des seinem Inhalte nach zu berechnenden Körperraums befinden, so dass, wenn wir Δx, Δy, Δz unendlich abnehmen lassen, diese Anzahl immer grösser wird. Allerdings werden durch die gezogenen Ebenen im Innern des Körpers nicht lauter Prismen gebildet werden, vielmehr an den Begränzungen hin unregelmässigere Körperstücke entstehen; je kleiner aber Δx, Δy, Δz sind, desto kleiner werden auch diese unregelmässigen Stückchen werden, so dass, wenn man Δx, Δy, Δz schliesslich als unendlich klein ansieht, dieselben um den Körper herum eine unendlich dünne Schichte bilden werden, deren Inhalt mithin verschwinden wird. Wir haben demnach das Recht zu sagen, der zu berechnende Körper bestehe bloss aus den unendlich kleinen Körperelementen $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$, deren Summe also den gesuchten Inhalt ausmacht (d. h. letz-

Digitized by Google

terer sey die Gränze, der sich jene Summe nähert). Was nun die Begränzung des Körpers anbelangt, so wollen wir uns (Fig. 45) auf der Ebene der xy einen senkrechten Zylinder errichtet denken, dessen Grundfläche MN sey, und das Körperstück berechnen, das innerhalb der Zylinderwand und Stücken von gegebenen krummen Oberflächen liege, die den Zylinder durchschneiden. Sind nun z_0, z_1 die Werthe von z als Funktionen von x und y, wie sie der unteren und oberen dieser krummen Oberflächen innerhalb des Zylinders zukommen, so wird die Grösse

$$\Delta x \Delta y \int_{z_0}^{z_1} \partial z = \Delta x \Delta y (z_1 - z_0)$$

die Summe all der unendlich kleinen Prismen ausdrücken, die über dem unendlich kleinen Rechtecke PQ stehen, wenn x, y die Koordinaten von P sind. Also wird, wenn y_0, y_1 die als Funktionen von x gegebenen Werthe von pR, pr sind, die Grösse

$$\Delta x \int_{y_0}^{y_1} \partial y \int_{z_0}^{z_1} \partial z$$

den über dem unendlich schmalen Streifen Rr liegenden Körperstreifen ausdrücken; endlich, wenn a und b die äussersten Werthe von x (OA, OB) sind, so drückt

$$\int_a^b \partial x \int_{y_0}^{y_1} \partial y \int_{z_0}^{z_1} \partial z$$

den gesuchten Körperinhalt aus. Dass man bei der Summirung keineswegs die eben eingeschlagene Ordnung einhalten muss, ist wohl klar, so dass die Ordnung der Integration eine willkürliche ist. Eben so wird man unschwer einsehen, wie man sich in verwickelteren Fällen zu helfen hätte.

II. Führt man statt rechtwinkliger Koordinaten die bereits in §. 80 angewendeten Polarkoordinaten ein, wo nun r, φ, ψ die drei neuen unabhängig Veränderlichen sind, so ist in §. 79, V: $\varphi = r \cos\varphi \cos\psi$, $\psi = r \sin\varphi \cos\psi$, $\Theta = r \sin\psi$, $u = r$, $v = \varphi$, $w = \psi$, also:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \cos\varphi \cos\psi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = - r \sin\varphi \cos\psi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial w} = - r \cos\varphi \sin\psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u} = \sin\varphi \cos\psi,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = r \cos\varphi \cos\psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial w} = - r \sin\varphi \sin\psi, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial u} = \sin\psi, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial w} = r \cos\psi;$$

woraus dann $M = r^2 \cos\psi$, demnach:

$$\iiint \partial x \, \partial y \, \partial z = \iiint r^2 \cos\psi \, \partial r \, \partial \varphi \, \partial \psi,$$

wo nun die Gränzen des neuen Integrals den Bedingungen der Aufgabe gemäss zu wählen sind. Liegt der Pol im Innern eines allseitig geschlossenen

Digitized by Google

Körpers, so sind die Gränzen nach r:0 und r, wenn r jetzt die aus der in Polarkoordinaten gegebenen Gleichung der begränzenden krummen Oberfläche gezogene Funktion von φ und ψ ist, die dort mit diesem Buchstaben bezeichnet wird; die Gränzen von ψ sind $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, von φ: 0 und 2π, so dass also dann der Körperinhalt =

$$\int_0^{2\pi}\partial\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,\partial\psi\int_0^r r^2\,\partial r = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\partial\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}r^3\cos\psi\,\partial\psi$$

ist.

III. Es lässt sich von der eben gefundenen Formel eine geometrische Ableitung geben, die wir hier beifügen wollen, da sie die Anstände beseitigt, die eine Anwendung der Formeln des §. 79 haben könnte. Denken wir uns nämlich im Innern des zu berechnenden Körperraums einen Punkt, dessen Polarkoordinaten r, φ, ψ seyen, ziehen den Fahrstrahl r nach dem Pole; projiziren denselben auf die Polarebene (Ebene der xy), so wird die Projektion mit der Axe der x den Winkel φ, so wie mit r den Winkel ψ machen. Wir wollen uns nun r um $\varDelta r$ verlängert denken, so wie r selbst sich um den Winkel $\varDelta\psi$ gegen die Axe der z sich drehen lassen, so dass also r nicht aus der durch r und die Projektion von r gehenden Ebene heraustritt. Alsdann wird, wenn $\varDelta r$, $\varDelta\psi$ unendlich klein sind, $\varDelta r$ ein Rechteck beschreiben, dessen Seiten $\varDelta r$ und $r\varDelta\psi$, dessen Inhalt also $= r\varDelta r\varDelta\psi$ ist. Lässt man nun die Ebene, in der dieses Rechteck sich befindet, sich drehen um die Axe der z und zwar den Winkel $\varDelta\varphi$ durchlaufen, so wird, für ein unendlich kleines $\varDelta\varphi$, das Rechteck ein Parallelepiped beschreiben, dessen Grundfläche eben jenes Rechteck, dessen Höhe aber $= r\cos\psi\varDelta\varphi$, so dass sein Inhalt $= r^2\cos\psi\varDelta r\varDelta\psi\varDelta\varphi$ ist. Dieses ist nun ein Körperelement und durch Summirung all der Körperelemente erhält man den Körperinhalt, wodurch dann obiges Integral wieder zum Vorschein kommt. (Vergl. Anhang S, I.)

§. 84.

Beispiele zu §. 83.

I. Man soll den von dem dreiaxigen Ellipsoide (§. 51, I) umschlossenen Körperraum berechnen.

Die Gleichung des Ellipsoids ist $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, und es wird von der Ebene der xy in einer Ellipse geschnitten, deren Gleichung $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ist. Demnach, wenn man die über der Ebene der xy stehende Hälfte erhalten will, ist $z_0=0$, $z_1 = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$; ferner ist die Gleichung der Kurve MN (Fig. 45) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; also $y_0=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $y_1=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ und die Gränzen von x sind $-a$ und $+a$, so dass die fragliche Hälfte =

$$\int_{-a}^{+a}\partial x\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\partial y\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\partial z = c\int_{-a}^{+a}\partial x\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\partial y =$$

$$\frac{b c \pi}{2}\int_{-a}^{+a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\partial x = \frac{2 b c a \pi}{3}.$$

Hätte man die obigen Polarkoordinaten eingeführt, so wäre

$$\frac{r^2 \cos^2\psi\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{r^2\cos^2\psi\sin^2\varphi}{b^2}+\frac{r^2\sin^2\psi}{c^2}=1,$$

$$r^2=\frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2\cos^2\psi\cos^2\varphi+a^2c^2\cos^2\psi\sin^2\varphi+a^2b^2\sin^2\psi};$$

demnach ist

$$\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\partial\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\psi\,.\,a^3b^3c^3\cos\psi}{[b^2c^2\cos^2\psi\cos^2\varphi+a^2c^2\cos^2\psi\sin^2\varphi+a^2b^2\sin^2\psi]^{\frac{3}{2}}}=\frac{4}{3}abc\pi,$$

d. h. man hat:

$$\int_0^{2\pi}\partial\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi\,\partial\psi}{[b^2c^2\cos^2\psi\cos^2\varphi+a^2c^2\cos^2\psi\sin^2\varphi+a^2b^2\sin^2\psi]^{\frac{3}{2}}}=\frac{4\pi}{a^2b^2c^2}$$

ein Resultat, auf das wir später wieder zurückkommen werden. Setzt man übrigens $b^2c^2=\alpha^2$, $a^2c^2=\beta^2$, $a^2b^2=\gamma^2$, und α, β, γ positiv, so ist $a^2b^2c^2=\alpha\beta\gamma$, also

$$\int_0^{2\pi}\partial\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi\,\partial\psi}{[\alpha^2\cos^2\psi\cos^2\varphi+\beta^2\cos^2\psi\sin^2\varphi+\gamma^2\sin^2\psi]^{\frac{3}{2}}}=\frac{4\pi}{\alpha\beta\gamma}.$$

II. Man soll den durch Rotation einer Lemniscate (§. 81, VI) entstandenen Körper berechnen. Derselbe ist:

$$\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}}\partial\varphi\int_{-arc(tg=\sqrt{\cos 2\varphi})}^{+arc(tg=\sqrt{\cos 2\varphi})}a^3(2\cos^2\varphi\cos^2\psi-1)^{\frac{3}{2}}\cos\psi\,\partial\psi.$$

Um dieses Integral zu bestimmen, setze man $\sin\psi=x$, $\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}=1$, $\cos^2\psi = 1-x^2$ und hat

$$\int(2\cos^2\varphi\cos^2\psi-1)^{\frac{3}{2}}\cos\psi\,\partial\psi=\int(2\cos^2\varphi-2x^2\cos^2\varphi-1)^{\frac{3}{2}}\partial x$$

$$=\int(\cos 2\varphi-2x^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}\partial x=\frac{x(\cos 2\varphi-2x^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{4}$$

$$+\frac{3\cos 2\varphi}{4}\int(\cos 2\varphi-2x^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\partial x\ (\text{§. 33, I})=$$

Digitized by Google

$$= \frac{x(\cos 2\varphi - 2x^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3\cos 2\varphi(\cos 2\varphi - 2x^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}x}{8}$$
$$+ \frac{3\cos^2 2\varphi}{8}\int\frac{\partial x}{(\cos 2\varphi - 2x^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{x(\cos 2\varphi - 2x^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3\cos 2\varphi(\cos 2\varphi - 2x^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}x}{8}$$
$$+ \frac{3\cos^2 2\varphi}{8\sqrt{2}\cos\varphi}\,arc\left(\sin = x\sqrt{\frac{2\cos^2\varphi}{\cos 2\varphi}}\right),$$

also da $x = \sin\psi$:

$$\int(2\cos^2\varphi\cos^2\psi - 1)^{\frac{3}{2}}\cos\psi\,\partial\psi = \frac{\sin\psi(2\cos^2\varphi\cos^2\psi - 1)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3\cos 2\varphi\sin\psi(2\cos^2\varphi\cos^2\psi - 1)^{\frac{1}{2}}}{8}$$
$$+ \frac{3\cos^2 2\varphi}{8\sqrt{2}\cos\varphi}\,arc\left(\sin = \sin\psi\,\frac{\cos\varphi.\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right).$$

Da ferner $\sin arc(tg = \sqrt{\cos 2\varphi}) = \frac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{\sqrt{1+\cos 2\varphi}}$, $\cos arc(tg = \sqrt{\cos 2\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos 2\varphi}}$, $\cos^2\varphi\cos^2 arc(tg = \sqrt{\cos 2\varphi}) = \frac{\cos^2\varphi}{1+\cos 2\varphi} = \frac{\cos^2\varphi}{2\cos^2\varphi} = \frac{1}{2}$, $2\cos^2\varphi\cos^2 arc(tg = \sqrt{\cos 2\varphi}) - 1 = 0$, so ist

$$\int_{-arc(tg=\sqrt{\cos 2\varphi})}^{+arc(tg=\sqrt{\cos 2\varphi})}(2\cos^2\varphi\cos^2\psi - 1)^{\frac{3}{2}}\cos\psi\,\partial\psi = \frac{3\cos^2 2\varphi}{4\sqrt{2}\cos\varphi}\,arc\left(\sin = \sqrt{\frac{\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\sqrt{2}\right)$$
$$= \frac{3\cos^2 2\varphi}{4\sqrt{2}\cos\varphi}\,arc\left(\sin = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos 2\varphi}}\sqrt{2}\right) = \frac{3\cos^2 2\varphi}{4\sqrt{2}\cos\varphi}\,arc(\sin = 1)$$
$$= \frac{3\cos^2 2\varphi}{8\sqrt{2}.\cos\varphi}\pi,$$

also der Inhalt:

$$\frac{\pi}{4\sqrt{2}}a^3\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 2\varphi}{\cos\varphi}\partial\varphi = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}a^3\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}}\frac{(2\cos^2\varphi - 1)^2}{\cos\varphi}\partial\varphi =$$
$$\frac{\pi}{4\sqrt{2}}a^3\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}}\left[4\cos^3\varphi - 4\cos\varphi + \frac{1}{\cos\varphi}\right]\partial\varphi$$
$$= \frac{\pi a^3}{4\sqrt{2}}\left[\frac{8}{6}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{16}{3}\sqrt{\frac{1}{2}} - 8\sqrt{\frac{1}{2}}\right] + \frac{\pi a^3}{4\sqrt{2}}\left[l\,tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right) - l\,tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right)\right]$$
$$= -\frac{\pi a^3}{6} + \frac{\pi a^3}{4\sqrt{2}}\,l\frac{tg\frac{3\pi}{8}}{tg\frac{\pi}{8}} = \frac{\pi a^3}{4\sqrt{2}}\,l\left(tg\frac{3\pi}{8}cotg\frac{\pi}{8}\right) - \frac{\pi a^3}{6} = \frac{\pi a^3}{4\sqrt{2}}\,l\left(cotg^2\frac{\pi}{8}\right) -$$
$$-\frac{\pi a^3}{6} = \frac{\pi a^3}{4\sqrt{2}}\,l\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{1-\cos\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi a^3}{6} = a^3\pi\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\,l(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{6}\right].$$

(Vergl. §. 50, VI.)

Digitized by Google

III. Ein senkrechter Kreiszylinder wird mit einer Ebene, die durch einen Durchmesser seiner Grundfläche geht, und mit letzterer den Winkel α macht, geschnitten. Man soll das Körperstück berechnen, das dadurch vom Zylinder abgeschnitten wird, wenn r der Halbmesser des Zylinders ist.

Nimmt man den Mittelpunkt der Grundfläche zum Anfangspunkt rechtwinkliger Koordinaten, den fraglichen Durchmesser zur Axe der y, die Grundfläche zur Ebene der xy, so ist die Gleichung des Schnitts: $z = x\, tg\,\alpha$, und es sind die Gränzen von $z: 0$ und $x\, tg\,\alpha$, von $y: -\sqrt{r^2-x^2}$ und $\sqrt{r^2-x^2}$, von $x: 0$ und r, so dass der zu berechnende Körper gleich

$$\int_0^r \partial x \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} \partial y \int_0^{x\,tg\,\alpha} \partial z = tg\,\alpha \int_0^r \partial x \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} x\, \partial y = 2\, tg\,\alpha \int_0^r x \sqrt{r^2-x^2}\, \partial x = \frac{2}{3} r^3\, tg\,\alpha.$$

Dabei ist $r\, tg\,\alpha$ die Höhe des Körperstücks, so dass letzteres $= \frac{2}{3} r^2 h$ ist, wenn man mit h die Höhe bezeichnet.

Fall, da die zu integrirende Grösse zum Theil imaginär wird.

IV. Es kann sich ereignen, dass bei der Berechnung eines Körperinhaltes (überhaupt eines bestimmten Integrals) die Gränzen für die Berechnung selbst sehr unbequem gewählt werden müssen, dass aber, wenn man etwa weiter gehende Gränzen nähme, die Rechnung sehr erleichtert würde. Natürlich erhält man auf diese Weise nicht den gesuchten Werth; ist man aber im Stande, nachträglich das auszuscheiden, was zu viel erhalten worden, so ergibt sich der richtige Werth unmittelbar. Dieses Ausscheiden wird dann immer leicht seyn, wenn für alle Werthe der Unabhängigen, die zu viel eingetreten sind, die Elemente des bestimmten Integrals rein imaginär (d. h. von der Form b i) sind, während sie begreiflich für die übrigen Werthe reell seyn müssen.

In diesem Falle erscheint dann der gefundene (unrichtige) Werth unter der Form $A + Bi$ (§. 4), wo A und B reelle Zahlen sind, und es ist A der wahre Werth des Integrals. Wir wollen diess durch ein Beispiel erläutern.

Es soll ein Stück eines dreiaxigen Ellipsoids berechnet werden (Nr. I), das begränzt ist von der Koordinaten-Ebene der xy, der der xz und einer Ebene, welche durch die z-Axe geht und die Ebene der xy in einer Geraden schneidet, deren Gleichung $y = mx$ ist ($m > 0$ vorausgesetzt).

Wie in I handelt es sich hier um das doppelt bestimmte Integral

$$c \int \partial x \int \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, \partial y,$$

dessen Gränzen nach x und y aus der Projektion des fraglichen Stücks auf die Ebene der xy zu ermitteln sind. Diese Projektion ist ein elliptischer Ausschnitt, begränzt von der x-Axe OC (Länge $= a$), der Geraden $y = mx$ (OA), und dem elliptischen Bogen zwischen beiden Geraden. Für alle Punkte innerhalb dieses Ausschnitts ist

Digitized by Google

bekanntlich $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$, also $\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ reell (positiv); geht man aber über den begränzenden elliptischen Bogen hinaus, so wird $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>1$, also $\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ rein imaginär (d. h. von der Form Mi, wo M reell).

Fig. 51.

Wollte man die Gränzen bloss innerhalb des fraglichen Schnittes angeben, so müsste man nothwendig das Integral in zwei theilen und, zwar wenn AB parallel der y-Axe, für die Punkte im Dreiecke OAB, und die im Abschnitte ABC. Was den Punkt B anbelangt, so ist seine Abszisse (die von A) gleich $\frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2m^2}}$; in OAB ist $y=mx$, in BAC aber $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ (da die Endpunkte in AC liegen). Demnach wäre der fragliche Körperraum, wenn $\frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2m^2}}=\alpha$:

$$c\int_0^\alpha \partial x\int_0^{mx}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\partial y+c\int_\alpha^a \partial x\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\partial y. \quad (a)$$

Statt nun aber diese beiden Integrale zu berechnen, wollen wir OA verlängern bis zum Zusammentreffen mit der auf OC Senkrechten CD und die Gränzen auf das Dreieck OCD ausdehnen. Für die Punkte in ACD ist, wie wir schon gezeigt, das Integral rein imaginär. Daraus folgt, dass wenn man die Grösse

$$c\int_0^a \partial x\int_0^{mx}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\partial y \quad (b)$$

unter der Form $M+Ni$ ermittelt hat, M der verlangte Inhalt ist.

Setzt man (§. 79, IV) $y=xz$, so ist die (b):

$$c\int_0^a \partial x\int_0^m x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^2z^2}{b^2}}\,\partial z=c\int_0^m \partial z\int_0^a x\sqrt{1-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)x^2}\,\partial x.$$

Aber

$$\int x\sqrt{1-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)x^2}\,\partial x=-\tfrac{1}{3}\frac{\left[1-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)x^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}},$$

$$\int_0^a x\sqrt{1-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)x^2}\,\partial x=-\tfrac{1}{3}\frac{\left(-\frac{a^2z^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}}+\tfrac{1}{3}\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}}.$$

Digitized by Google

Daraus folgt, dass (b) gleich ist:

$$\frac{c}{3}\int_0^m \frac{\partial z}{\frac{1}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}} + \frac{1}{3}\frac{a^3 e i}{b^3}\int_0^m \frac{z^3 \partial z}{\frac{1}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}},$$

wovon der zweite Theil zu verwerfen ist. Der gesuchte Körperinhalt ist also

$$\frac{c}{3}\int_0^m \frac{\partial z}{\frac{1}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}} = \frac{a b c}{3} arc\left(tg = \frac{a m}{b}\right).$$

Für $m = \infty$ muss man den achten Theil des Ellipsoids erhalten. Der obige Ausdruck gibt dann aber $\frac{a b c \pi}{6}$, wie verlangt (Nr. I). *

Vierzehnter Abschnitt.

Weitere Untersuchungen über bestimmte Integrale.

§. 85.

Differenzirung bestimmter Integrale.

I. Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,\partial x$ hängt bloss von den Werthen von a und b, so wie den etwa noch in f(x) vorkommenden Konstanten, begreiflich aber nicht von x ab. Gesetzt nun, a und b seyen Funktionen einer Grösse α, die etwa auch noch in f(x) vorkomme, was wir dadurch anzeigen wollen, dass wir $f(x,\alpha)$ für f(x) schreiben, so ist natürlich das bestimmte Integral $\int_a^b f(x,\alpha)\,\partial x$ eine Funktion von α, und es kann uns die Aufgabe gestellt werden, den Differentialquotienten dieser Grösse nach α zu bestimmen.

Sey nun

$$\int f(x,\alpha)\,\partial x = F(x,\alpha), \text{ also } \int_a^b f(x,\alpha)\,\partial x = F(b,\alpha) - F(a,\alpha),$$

so ist (§. 15):

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)\,\partial x = \frac{\partial F(b,\alpha)}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial \alpha} + \frac{\partial F(b,\alpha)}{\partial \alpha} - \frac{\partial F(a,\alpha)}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha} - \frac{\partial F(a,\alpha)}{\partial \alpha}.$$

---

* Man vergl. hiemit: Raabe, mathematische Mittheilungen, II. Heft, S. 81 ff.

Digitized by Google

Nun ist aber

$$\frac{\partial F(x,\alpha)}{\partial x} = f(x,\alpha),$$

demnach ist

$$\frac{\partial F(b,\alpha)}{\partial b} = f(b,\alpha),\ \frac{\partial F(a,\alpha)}{\partial a} = f(a,\alpha).$$

Was ferner die Grösse

$$\frac{\partial F(b,\alpha)}{\partial \alpha} - \frac{\partial F(a,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial [F(b,\alpha) - F(a,\alpha)]}{\partial \alpha}$$

anbelangt, so ist sie gleich dem partiellen Differentialquotienten von $\int_a^b f(x,\alpha)\,\partial x$ nach α, wenn man dabei a und b als unabhängig von α ansieht. Derselbe ist =

$$Gr\frac{\int_a^b f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,\partial x - \int_a^b f(x,\alpha)\,\partial x}{\Delta\alpha} = Gr\int_a^b \frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}\,\partial x$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,\partial x \ (\S. 37),$$

so dass endlich

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)\,\partial x = \int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,\partial x + f(b,\alpha)\frac{\partial b}{\partial\alpha} - f(a,\alpha)\frac{\partial a}{\partial\alpha}. \quad (43)$$

Sind b und a unabhängig von α, so sind $\frac{\partial b}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial a}{\partial\alpha}$ Null u. s. w.

Beispiele.

II. Der Satz (43) ist eine fruchtbare Quelle für Bildung bestimmter Integrale. So ist (§. 43):

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin(bx)\,\partial x = \frac{b}{a^2+b^2},\ \int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)\,\partial x = \frac{a}{a^2+b^2},\ a > 0.$$

Hieraus folgt durch n malige Differenzirung nach a:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\sin(bx)\,\partial x = (-1)^n b\,\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{1}{a^2+b^2}\right),$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\cos(bx)\,\partial x = (-1)^n\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right).$$

Die hier vorkommenden Differentialquotienten lassen sich leicht bestimmen. Es ist nämlich, wenn wie immer $\sqrt{-1} = i$:

$$\frac{1}{a^2+b^2} = -\frac{1}{2bi}\left[\frac{1}{a+bi} - \frac{1}{a-bi}\right],\ \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{1}{a^2+b^2}\right) = -\frac{1}{2bi}\left[(-1)^n\frac{1.2\ldots n}{(a+bi)^{n+1}} - \frac{(-1)^n 1.2\ldots n}{(a-bi)^{n+1}}\right] = -\frac{1}{2bi}(-1)^n 1.2\ldots n\left[\frac{(a-bi)^{n+1}-(a+bi)^{n+1}}{(a^2+b^2)^{n+1}}\right],$$

so dass, wenn $a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, also $a - bi = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ (§. 4, III), man hat:

Digitized by Google

$(a+bi)^{n+1} = r^{n+1}[\cos(n+1)\varphi + i \sin(n+1)\varphi]$, $(a-bi)^{n+1} = r^{n+1}[\cos(n+1)\varphi - i \sin(n+1\varphi]$, $(a^2+b^2)^{n+1} = r^{2(n+1)}$,

$$\frac{(a-bi)^{n+1}-(a+bi)^{n+1}}{2bi(a^2+b^2)^{n+1}} = -\frac{\sin(n+1)\varphi}{b r^{n+1}},\quad (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \frac{1.2\ldots n \sin(n+1)\varphi}{r^{n+1}}.$$

Eben so

$$(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) = \frac{(-1)^n}{2}\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left[\frac{1}{a+bi}+\frac{1}{a-bi}\right] = \frac{1.2\ldots n \cos(n+1)\varphi}{r^{n+1}},$$

mithin

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\sin(bx)\partial x = \frac{1.2\ldots n \sin(n+1)\varphi}{r^{n+1}},\quad \int_0^\infty x^n e^{-ax}\cos(bx)\partial x = \frac{1.2..n \cos(n+1\varphi}{r^{n+1}}, \text{(a)}$$

wo

$$r = \sqrt{a^2+b^2},\ \sin\varphi = \frac{b}{r},\ \cos\varphi = \frac{a}{r},\ a > 0.$$

Ferner ist (§. 43):

$$\int_0^a \frac{\partial x}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{4a}.$$

Hieraus folgt, wenn man nach a differenzirt:

$$-\int_0^a \frac{2a\,\partial x}{(a^2+x^2)^2} + \frac{1}{2a^2} = -\frac{\pi}{4a^2},\quad \int_0^a \frac{\partial x}{(a^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{8a^3} + \frac{1}{4a^3} = \frac{1}{4a^3}\left(\frac{\pi}{2}-1\right). \text{ (b)}$$

Es versteht sich hiebei von selbst, dass in dem Satze (43) alle vorkommenden Grössen bestimmte endliche Werthe haben müssen, wenn er gelten soll.

Das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin b x}{x} \partial x$.

III. Man hat, wenn α und β nicht negativ:

$$\int_0^\infty \partial x \int_\alpha^\beta e^{-ax}\sin(bx)\partial a = \int_\alpha^\beta \partial a \int_0^\infty e^{-ax}\sin(bx)\partial x.$$

Da aber

$$\int_\alpha^\beta e^{-ax}\sin(bx)\partial a = \frac{-e^{-\beta x}+e^{-\alpha x}}{x}\sin(bx),\quad \int_0^\infty e^{-ax}\sin(bx)\partial x = \frac{b}{a^2+b^2},$$

so ist also

$$\int_0^\infty \frac{-e^{-\beta x}+e^{-\alpha x}}{x}\sin(bx)\partial x = \int_\alpha^\beta \frac{b}{a^2+b^2}\partial a = arc\left(tg = \frac{\beta}{b}\right) - arc\left(tg = \frac{\alpha}{b}\right). \text{ (c)}$$

Setzt man hier etwa $\alpha = 0$, $\beta = \infty$, so ist für $b > 0$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(bx)\partial x}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{(d)}$$

ein wichtiges Resultat, das wir sogleich noch in anderer Weise nachweisen wollen. Man hat

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,\partial y = \int_0^\infty \partial y \int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,\partial x.$$

Aber

Digitized by Google

$$\int e^{-xy} \sin x \, \partial y = \sin x \int e^{-xy} \partial y = -\frac{\sin x \, . \, e^{-xy}}{x},$$

also da für $y = \infty$ und positivem $x : e^{-xy} = 0$:

$$\int_0^\infty e^{-xy} \sin x \, \partial y = \frac{\sin x}{x}.$$

Ferner (§. 43):

$$\int_0^\infty e^{-xy} \sin x \, \partial x = \frac{1}{1+y^2};$$

demnach ist

$$\int_0^\infty \frac{\sin x \, \partial x}{x} = \int_0^\infty \frac{\partial y}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Setzt man hier bz für x, also $\frac{\partial x}{\partial z} = b$, so sind für $b > 0$ die Gränzen von $z : 0$ und ∞, mithin (§. 42)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x \, \partial x}{x} = b \int_0^\infty \frac{\sin (bz) \, \partial z}{bz} = \int_0^\infty \frac{\sin bz}{z} \partial z,$$

d. h. es ist auch:

$$\int_0^\infty \frac{\sin (bx)}{x} \partial x = \frac{\pi}{2}, \quad b > 0. \qquad \text{(d)}$$

Bestimmte Doppelintegrale.

IV. Hat man das bestimmte Doppelintegral (mit konstanten Gränzen)

$$\int_a^b \partial x \int_{a'}^{b'} f(x, y, \alpha, \beta) \, \partial y = V$$

und sind a und b Funktionen von α; a', b' von β, so ist natürlich eben so

$$\frac{dV}{d\alpha} = \int_a^b \partial x \int_{a'}^{b'} \frac{\partial f(x, y, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} \partial y + \int_{a'}^{b'} f(b, y, \alpha, \beta) \, \partial y \, . \frac{\partial b}{\partial \alpha} - \int_{a'}^{b'} f(a, y, \alpha, \beta) \, \partial y \, . \frac{\partial a}{\partial \alpha},$$

$$\frac{dV}{d\beta} = \int_a^b \partial x \int_{a'}^{b'} \frac{\partial f(x, y, \alpha, \beta)}{\partial \beta} \partial y + \int_a^b f(x, b', \alpha, \beta) \, \partial x \, . \frac{\partial b'}{\partial \beta} - \int_a^b f(x, a', \alpha, \beta) \, \partial x \, . \frac{\partial a'}{\partial \beta},$$

wie man auch aus der Gleichung (b′) in §. 77 ableiten kann, die hier gibt:

$$V = F(b, b', \alpha, \beta) - F(b, a', \alpha, \beta) - F(a, b', \alpha, \beta) + F(a, a', \alpha, \beta),$$

wenn

$$\int \partial x \int f(x, y, \alpha, \beta) \, \partial y = F(x, y, \alpha, \beta).$$

V. Wir fügen hier noch folgende Beispiele bei: (Vergl. „Anhang" 𝔇).

1) Wie in §. 81, II sey in der dortigen Fig. 47 0 der Mittelpunkt einer Kugel, deren Halbmesser aber $=$ OC sey; man soll nun $OA = m$, $OB = n$ so bestimmen, dass das Stück Körper, das zwischen dem über OACB stehenden Parallelepiped und der Kugelfläche liegt, ein Maximum sey.

Nach §. 83 ist der Inhalt $= \int_0^m \partial x \int_0^n \partial y \int_0^z \partial z, \; x^2+y^2+z^2=r^2, \; m^2+n^2=r^2$, so dass also

$$v = \int_0^m \partial x \int_0^n \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \, \partial y \text{ ein Maximum, und } m^2 + n^2 = r^2.$$

Digitized by Google

Also ist nach §. 73:

$$\frac{\partial [v - \lambda (m^2 + n^2 - r^2)]}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial [v - \lambda (m^2 + n^2 - r^2)]}{\partial n} = 0$$

zu setzen. Aber

$$\frac{\partial v}{\partial m} = \int_0^n \sqrt{r^2 - m^2 - y^2}\, \partial y = \frac{r^2 - m^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = \int_0^m \sqrt{r^2 - x^2 - n^2}\, \partial x = \frac{r^2 - n^2}{2} \frac{\pi}{2},$$

so dass

$$\frac{r^2 - m^2}{2} \frac{\pi}{2} - 2 \lambda m = 0, \quad \frac{r^2 - n^2}{2} \frac{\pi}{2} - 2 \lambda n = 0, \quad m^2 + n^2 = r^2.$$

Daraus

$$m = n = r \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Da wenn n Funktion von m:

$$\frac{d^2 v}{d m^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial m^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial m\, \partial n} \frac{\partial n}{\partial m} + \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} \left(\frac{\partial n}{\partial m}\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial n} \frac{\partial^2 n}{\partial m^2} \text{ (§. 19)},$$

und hier

$$\frac{\partial^2 v}{\partial m^2} = -m \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial m\, \partial n} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} = -n \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{m^2}{2} \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\partial n}{\partial m} = -\frac{m}{n}, \quad \frac{\partial^2 n}{\partial m^2} = -\frac{r^2}{n^3},$$

so ist für $m = n = r \sqrt{\tfrac{1}{2}}$:

$$\frac{d^2 v}{d m^2} = -\frac{3 r \pi}{\sqrt{8}},$$

also negativ, so dass v ein Maximum ist (§. 24).

2) Wenn man zwei Räder konstruiren soll so, dass ihre Winkelgeschwindigkeiten in einem gegebenen, sonst aber beliebig veränderlichen oder konstanten Verhältnisse stehen, und es ist a die Entfernung der beiden, parallel angenommenen Drehaxen, also auch die Entfernung der zwei Punkte, in denen diese Axen die Ebene treffen, in der die beiden Räder liegen, so kommt die Aufgabe offenbar darauf hinaus, in dieser gemeinschaftlichen Ebene zwei Kurven zu konstruiren, die, indem sie sich um die Axen (Punkte in der gemeinschaftlichen Ebene) drehen, sich auf einander abwickeln, wobei die Geschwindigkeit der Bewegung das gegebene Verhältniss hat. Nehmen wir für jede Kurve den Drehpunkt als Anfangspunkt von Polarkoordinaten, die Linie a als Polaraxe, so seyen r, ω die Polarkoordinaten für einen Punkt der ersten Kurve; r_1, ω_1 für den entsprechenden Punkt der zweiten, wobei wir das Wort entsprechend so verstehen, dass in diesen zwei Punkten zu einer gewissen Zeit die Kurven sich berühren werden. Da die Kurven sich auf einander abwickeln sollen, so muss (§. 47, III):

$$\int_0^\omega \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2 + r^2}\, \partial \omega = \int_0^{\omega_1} \sqrt{\left(\frac{\partial r_1}{\partial \omega_1}\right) + r_1^2}\, \partial \omega_1$$

seyn. Da ferner die Drehung möglich seyn soll, so muss $r + r_1 = a$ seyn, und da endlich das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten ein gegebenes ist, so ist ω_1 als Funktion von ω bekannt, d. h. $\omega_1 = f(\omega)$. Die erste Gleichung gibt durch Differenzirung nach ω

$$\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial r_1}{\partial \omega_1}\right)^2 + r_1^2}\, \frac{\partial \omega_1}{\partial \omega}, \text{ d. h. da } \frac{\partial r}{\partial \omega} + \frac{\partial r_1}{\partial \omega_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial \omega} = 0, \quad \left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial r_1}{\partial \omega_1}\right)^2 \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial \omega}\right)^2 : r^2 = r_1^2 \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial \omega}\right)^2.$$

Digitized by Google

Da wir annehmen, es wachsen ω und ω_1 zu gleicher Zeit, d. h. es sey $\frac{\partial \omega_1}{\partial \omega} > 0$, so hat man also

$$r = r_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial \omega}, \; r + r_1 = a, \; \omega_1 = f(\omega),$$

aus welchen drei Gleichungen r als Funktion von ω, und r_1 als Funktion von ω_1 darzustellen ist. Nun ist $r_1 = a - r$, $\frac{\partial \omega_1}{\partial \omega} = f'(\omega)$, so dass also

$$r = (a - r) f'(\omega), \text{ woraus } r \text{ als Funktion von } \omega.$$

Dann gibt, wenn man $r = a - r_1$ setzt und ω durch ω_1 mittelst $\omega_1 = f(\omega)$ ersetzt, dieselbe Gleichung auch die Gleichung zwischen r_1 und ω_1. Wir wollen etwa annehmen, es sey $\omega_1 = \alpha\omega + \beta \sin m\omega$, so ist $f'(\omega) = \alpha + m\beta \cos m\omega$, so dass die Gleichung der ersten Kurve ist:

$$r = a \frac{\alpha + m\beta \cos m\omega}{1 + \alpha + m\beta \cos m\omega};$$

die der zweiten findet sich durch Elimination von ω aus

$$r_1 = \frac{a}{1 + \alpha + m\beta \cos m\omega}, \; \omega_1 = \alpha\omega + \beta \sin m\omega.$$

Die Konstanten α, β, m kann man in verschiedener Weise bestimmen. Gesetzt etwa man verlange, dass das eine Rad den vierten Theil seiner Bewegung in derselben Zeit zurücklege wie das andere, so muss für $\omega = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ auch ω_1 dieselben Werthe haben, d. h. es muss $\frac{\pi}{2} = \alpha . \frac{\pi}{2} + \beta \sin \frac{m\pi}{2}$, $\pi = \alpha\pi + \beta \sin m\pi$, $\frac{3}{2}\pi = \alpha \frac{3}{2}\pi + \beta \sin \frac{3m\pi}{2}$, $2\pi = \alpha 2\pi + \beta \sin 2m\pi$ seyn. Verlangt man dazu noch, dass für $\omega = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ auch r denselben Werth annimmt, wie für $\omega = 0$, so muss seyn:

$$\frac{\alpha + m\beta}{1 + \alpha + m\beta} = \frac{a + m\beta \cos \frac{m\pi}{2}}{1 + \alpha + m\beta \cos \frac{m\pi}{2}} = \frac{\alpha + m\beta \cos m\pi}{1 + \alpha + m\beta \cos m\pi} = \frac{a + m\beta \cos \frac{3}{2} m\pi}{1 + \alpha + m\beta \cos \frac{3}{2} m\pi} = \frac{\alpha + m\beta \cos 2m\pi}{1 + \alpha + m\beta \cos 2m\pi}.$$

Diesen Bedingungen genügt $m = 4$, $\alpha = 1$, während β noch unbestimmt bleibt. — Die Grösse $Gr \frac{\Delta \omega_1}{\Delta \omega}$, d. h. $\frac{\partial \omega_1}{\partial \omega}$ drückt in jedem Zeitmoment das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten aus. Gesetzt nun, es sey vorgeschrieben, es sollen der grösste und der kleinste Werth desselben (d. h. $\alpha + 4\beta$ und $\alpha - 4\beta$) zu einander sich wie 1 zu γ verhalten, so ist $1 - 4\beta = \gamma(1 + 4\beta)$, $\beta = \frac{1}{4} \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}$, so dass also für unsern Fall:

$$r = a . \frac{1 + \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \cos 4\omega}{2 + \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \cos 4\omega}; \; r_1 = \frac{a}{2 + \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \cos 4\omega}, \; \omega_1 = \omega + \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \frac{\sin 4\omega}{4}.$$

Die beiden Räder bewegen sich dann so, dass wenn das erste gleichförmig gedreht wird, das zweite bald etwas langsamer, bald etwas schneller sich dreht, als das erste.

Digitized by Google

§. 86.

Die Integrale $\int_0^\infty x^n e^{-ax^2}\partial x$, $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(bx)\,\partial x$, $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\sin(bx)\,\partial x$.

I. Es sey das Integral $\int_0^\infty e^{-x^2}\partial x$ zur Bestimmung vorgelegt. Setzt man den Werth desselben $=k$, so ist auch $\int_0^\infty e^{-y^2}\partial y = k$ und $\int_0^\infty e^{-x^2}\partial x \times \int_0^\infty e^{-y^2}\partial y = k^2$. Aber es ist

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\partial y = \int_0^\infty \partial x \int_0^\infty e^{-x^2} e^{-y^2}\partial y = \int_0^\infty e^{-x^2}\partial x \times \int_0^\infty e^{-y^2}\partial y,$$

so dass also

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\partial y = k^2.$$

Nach §. 79, III ist

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\partial y = \frac{\pi}{4}, \text{ also } k = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

so dass

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\partial x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \qquad \text{(a)}$$

Man kann dasselbe Resultat auf einem hievon ganz verschiedenen Wege erhalten. Stelle nämlich MN (Fig. 52) eine Kurve vor, deren Gleichung $z = e^{-x^2}$ ist, und man lasse diese Kurve sich um die Axe der z drehen, so wird sie eine krumme Oberfläche beschreiben, deren Gleichung ist $z = e^{-(x^2+y^2)}$, und der Inhalt des von dieser Oberfläche und der Ebene der x y eingeschlossenen Körpers ist (§. 83):

Fig. 52.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\partial x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\partial y,$$

da, wie man leicht sieht, die Gränzen nach x und y sind $-\infty$ und $+\infty$. Sey nun aber $OP = z$, $PQ = r$, so ist $z = e^{-r^2}$, und wenn die Kurve sich um die Axe der z dreht, so beschreibt PQ einen Kreis vom Halbmesser r, dessen Fläche also $= r^2\pi$ ist. Denken wir uns nun in der Entfernung Δz von PQ einen zweiten mit dem eben betrachteten parallelen Kreis, so wird, wenn Δz unendlich klein ist, zwischen beiden ein Stück Körper liegen, dessen Inhalt $= r^2\pi\,\Delta z$, oder da $r^2 = -l(z)$, so wird der Inhalt $= -\pi\, l(z)\,\Delta z$ seyn. Der niederste Werth von z ist 0, der höchste $= 1$ (für $x = 0$); demnach ist der fragliche Körper, den wir zu berechnen haben, auch gleich (§. 51):

$$\pi\int_0^1 [-l(z)\,\partial z] = -\pi\int_0^1 l(z)\,\partial z = -\pi[-1] \text{ (§. 27, I und §. 23, I)} = \pi,$$

so dass also

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\partial x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\partial x = \pi.$$

Digitized by Google

Aber

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\partial x\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\partial y = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\partial x\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\partial y = 4\int_0^\infty \partial x\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\partial y \text{ (§. 42, VII)},$$

mithin

$$\int_0^\infty \partial x\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\partial y = \frac{\pi}{4},\ k^2 = \frac{\pi}{4},\ k = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

II. Setzt man in (a) $x = az$, $a > 0$, so ist $\frac{\partial x}{\partial z} = a$ und die Gränzen von z sind ebenfalls 0 und ∞, so dass (§. 42, IV):

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\partial x = a\int_0^\infty e^{-a^2z^2}\partial z,$$

und also

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}. \tag{b}$$

Setzt man hier $\sqrt{a}$ für a, so ist $\int_0^\infty e^{-ax^2}\partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$, woraus nun, indem man n mal nach a differenzirt:

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2}\partial x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{\partial^n a^{-\frac{1}{2}}}{\partial a^n} = (-1)^n\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}a^{-\frac{1}{2}-n} =$$

$$\frac{1.3.5..(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\sqrt{a^{2n+1}}},\ a > 0. \tag{b'}$$

III. Will man $\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2}\partial x$ erhalten, so ist, da $\int x e^{-ax^2}\partial x = -\frac{1}{2a}e^{-ax^2}$, nach §. 27:

$$\int x^{2n+1} e^{-ax^2}\partial x = \int x^{2n} x\, e^{-ax^2}\partial x = -\frac{x^{2n} e^{-ax^2}}{2a} + \frac{2n}{2a}\int x^{2n-1} e^{-ax^2}\partial x,$$

und da für $x = \infty$: $x^{2n} e^{-ax^2} = \frac{x^{2n}}{e^{ax^2}} = 0$ (§. 22, V), so ist (§. 43, V):

$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2}\partial x = \frac{n}{a}\int_0^\infty x^{2n-1} e^{-ax^2}\partial x;$$

eben so nun:

$$\int_0^\infty x^{2n-1} e^{-ax^2}\partial x = \frac{n-1}{a}\int_0^\infty x^{2n-3} e^{ax^2}\partial x, \ldots\ldots, \int_0^\infty x^3 e^{-ax^2}\partial x = \frac{1}{a}\int_0^\infty x e^{-ax^2}\partial x,$$

$$\int_0^\infty x e^{-ax^2}\partial x = \frac{1}{2a},$$

also

$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2}\partial x = \frac{n(n-1)\ldots 1}{2a^{n+1}}. \tag{c}$$

Das Integral $\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{-l(x)}}$ kommt unmittelbar auf das obige zurück. Man setze nämlich $x = e^{-z^2}$, $l(x) = -z^2$, $\frac{\partial x}{\partial z} = -2z e^{-z^2}$, so ist

Digitized by Google

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{-l(x)}} = -2\int \frac{z e^{-z^2} \partial z}{\sqrt{z^2}} = -2\int e^{-z^2} \partial z,$$

und da die Gränzen von z sind ∞ und 0, so ist

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{-l(x)}} = -2\int_\infty^0 e^{-z^2} \partial z = 2\int_0^\infty e^{-z^2} \partial z = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}. \quad \text{(d)}$$

IV. Will man weiter den Werth von $\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos(bx)\, \partial x$ ermitteln, so setze man denselben $= u$ und hat nun (§. 85, I):

$$\frac{\partial u}{\partial b} = -\int_0^\infty e^{-a^2x^2} x \sin(bx)\, \partial x.$$

Aber es ist (§. 27), da $\int x e^{-a^2x^2} \partial x = -\frac{1}{2a^2} e^{-a^2x^2}$:

$$\int x e^{-a^2x^2} \sin(bx)\, \partial x = -\frac{\sin(bx)}{2a^2} e^{-a^2x^2} + \frac{b}{2a^2}\int e^{-a^2x^2} \cos(bx)\, \partial x,$$

$$\int_0^\infty x e^{-a^2x^2} \sin(bx)\, \partial x = \frac{b}{2a^2}\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos(bx)\, \partial x = \frac{bu}{2a^2},$$

d. h. es ist

$$\frac{\partial u}{\partial b} = -\frac{bu}{2a^2}, \quad \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial b} = -\frac{b}{2a^2}.$$

Daraus folgt, dass

$$\int \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial b} \partial b = -\int \frac{b\, \partial b}{2a^2} + C, \text{ d. h. } l(u) = -\frac{b^2}{4a^2} + C,$$

worin C nicht von b abhängt. Also da $l(u) = -\frac{b^2}{4a^2} + C$, so ist $u = e^{-\frac{b^2}{4a^2} + C} = e^C e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$, d. h. da e^C eine Konstante $= C'$, es ist

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos(bx)\, \partial x = C' e^{-\frac{b^2}{4a^2}},$$

worin C' nicht von b abhängt. Setzt man also hier $b = 0$, so ändert sich C' nicht, und man hat:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \partial x = C', \text{ d. h. } C' = \frac{\sqrt{\pi}}{2a},$$

und endlich

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos(bx)\, \partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{b^2}{4a^2}}, \quad a > 0. \quad \text{(e)}$$

Dass man durch Differenzirung nach a oder b hieraus neue Formeln bilden kann, ist klar.

V. Das Dopelintegral $\int_0^\infty \partial x \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{e^{-(a^2x^2+b^2y^2)}\, \partial y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ lässt sich leicht hiedurch auf ein einfaches zurückführen. Man hat nämlich nach §. 78, IV:

Digitized by Google

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{e^{-(a^2x^2+b^2y^2)}\partial y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \int_0^\infty \partial x \sqrt{1+x^2}\int_0^1 \frac{e^{-(a^2x^2+b^2y^2+b^2x^2y^2)}\partial y}{\sqrt{1+x^2+(1+x^2)y^2}} =$$

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^1 \frac{e^{-(a^2x^2+b^2y^2+b^2x^2y^2)}\partial y}{\sqrt{1+y^2}} = \int_0^1 \frac{e^{-b^2y^2}\partial y}{\sqrt{1+y^2}}\int_0^\infty e^{-(a^2x^2+b^2x^2y^2)}\partial x =$$

$$\int_0^1 \frac{e^{-b^2y^2}\partial y}{\sqrt{1+y^2}}\int_0^\infty e^{-(a^2+b^2y^2)x^2}\partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^1 \frac{e^{-b^2y^2}\partial y}{\sqrt{1+y^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2y^2}},$$

so dass

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{e^{-(a^2x^2+b^2y^2)}\partial y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-b^2x^2}\partial x}{\sqrt{(1+x^2)(a^2+b^2x^2)}}. \quad \text{(f)}$$

§. 87.

Die Integrale $\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\partial x$, $\int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2+x^2}\partial x$.

I. Sey das Doppelintegral

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1+x^2}\int_0^x \frac{\partial y}{1+y},$$

das offenbar $=\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\partial x$ ist, vorgelegt, so hat man nach §. 78, IV:

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1+x^2}\int_0^x \frac{\partial y}{1+y} = \int_0^1 \frac{x\,\partial x}{1+x^2}\int_0^1 \frac{\partial y}{1+xy} = \int_0^1 \partial y\int_0^1 \frac{x\,\partial x}{(1+xy)(1+x^2)}.$$

Aber

$$\int \frac{x\,\partial x}{(1+xy)(1+x^2)} = -\frac{y}{1+y^2}\int \frac{\partial x}{1+xy} + \frac{1}{1+y^2}\int \frac{x\,\partial x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2}\int \frac{\partial x}{1+x^2}$$

$$= -\frac{l(1+xy)}{1+y^2} + \frac{l(1+x^2)}{2(1+y^2)} + \frac{y}{1+y^2}\,arc\,(tg = x),$$

$$\int_0^1 \frac{x\,\partial x}{(1+xy)(1+x^2)} = -\frac{l(1+y)}{1+y^2} + \frac{l(2)}{2(1+y^2)} + \frac{y}{1+y^2}\,\frac{\pi}{4}.$$

Demnach

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1+x^2}\int_0^x \frac{\partial y}{1+y} = -\int_0^1 \frac{l(1+y)}{1+y^2}\partial y + \frac{1}{2}l(2)\int_0^1 \frac{\partial y}{1+y^2} + \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{y\,\partial y}{1+y^2},$$

d. h.

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\partial x = -\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\partial x + \frac{\pi}{8}l(2) + \frac{\pi}{8}l(2),$$

woraus

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\partial x = \frac{\pi}{8}l(2). \quad \text{(a)}$$

Setzt man hier $x = tg\,z$, so sind die Gränzen von $z: 0$ und $\frac{\pi}{4}$ und man hat

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{l(1+tg\,z)}{1+tg^2 z}\,\frac{\partial z}{\cos^2 z} = \frac{\pi}{8}l(2),$$

d. h.

Digitized by Google

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} l(1+tg\, z)\,\partial z = \frac{\pi}{8}\, l(2).$$

II. Nach §. 86, IV ist

$$a\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(2bx)\,\partial x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\left(\frac{b}{a}\right)^2},\quad \int_0^\infty a\, e^{-a^2}\partial a \int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(2bx)\,\partial x =$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_0^\infty e^{-a^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\partial a.$$

Aber die erste Seite ist auch (§. 77, II)

$$\int_0^\infty \cos(2bx)\,\partial x \int_0^\infty a\, e^{-(1+x^2)a^2}\partial a = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos(2bx)}{1+x^2}\partial x,$$

während die zweite gibt

$$\int_0^\infty e^{-a^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\partial a = e^{2b}\int_0^\infty e^{-\left(a+\frac{b}{a}\right)^2}\partial a = e^{2b}\int_0^\infty e^{-\left(\sqrt{4b+a^2}\right)^2}\partial a,$$

indem nach §. 44, I immer

$$\int_0^\infty f\left(x+\frac{b}{x}\right)\partial x = \int_0^\infty f\left(\sqrt{4b+x^2}\right)\partial x$$

ist, wenn $b>0$. Demnach ist die zweite Seite

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{2b}\int_0^\infty e^{-(4b+a^2)}\partial a = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-2b}\int_0^\infty e^{-a^2}\partial a = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.e^{-2b}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}(\text{§}.86) = \frac{\pi}{4}e^{-2b},$$

so dass

$$\int_0^\infty \frac{\cos(2bx)}{1+x^2}\partial x = \frac{\pi}{2}e^{-2b},\quad \int_0^\infty \frac{\cos bx}{1+x^2}\partial x = \frac{\pi}{2}e^{-b},\ b>0. \qquad \text{(b)}$$

Uebrigens gilt diess auch noch für $b=0$. Durch Differenzirung nach b folgt hieraus:

$$\int_0^\infty \frac{x \sin bx}{1+x^2}\partial x = \frac{\pi}{2}e^{-b},\ b>0. \qquad \text{(c)}$$

Setzt man $x=\frac{z}{a}$, wo $a>0$, so sind die Gränzen von z wieder 0 und ∞, und man hat:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\frac{b}{a}z}{1+\frac{z^2}{a^2}}\frac{\partial z}{a} = \frac{\pi}{2}e^{-b},$$

d. h. wenn man a b für b setzt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2+x^2}\partial x = \frac{\pi}{2a}e^{-ab},\ \int_0^\infty \frac{x\sin bx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-ab},\ a>0,\ b>0.^* \qquad \text{(d)}$$

---

* Aus

$$\int_0^\infty \partial u \int_\alpha^\beta \frac{v\, f(v)}{u^2+v^2}\cos a u\,\partial v = \int_\alpha^\beta v\, f(v)\,\partial v \int_0^\infty \frac{\cos a u}{u^2+v^2}\partial u$$

folgt hiernach sofort:

Digitized by Google

Eine weitere Differenzirung nach b ist nicht mehr gestattet, da dieselbe geben würde:

$$\int_0^\infty \frac{x^2 \cos b x}{a^2+x^2} \partial x = -\frac{a\pi}{2} e^{-ab},$$

und da

$$\int_0^\infty \frac{x^2 \cos b x}{a^2+x^2} \partial x = \int_0^\infty \cos b x \,\partial x - a^2 \int_0^\infty \frac{\cos b x}{a^2+x^2} \partial x = \int_0^\infty \cos b x \,\partial x - \frac{a\pi}{2} e^{-ab},$$

so müsste $\int_0^\infty \cos b x \,\partial x = 0$ seyn, was nicht zulässig ist. Denn $\int \cos b x \,\partial x = -\frac{\sin b x}{b}$ ist zwar 0 für $x = 0$, aber für $x = \infty$ ist dieser Werth unbestimmbar. (Vergl. §. 149, II, 1.)

Dagegen werden Differenzirungen nach a ganz unbedingt gestattet seyn. So wäre

$$\int_0^\infty \frac{\cos b x}{(a^2+x^2)^2} \partial x = \frac{\pi}{4a^2} e^{-ab}\left(b + \frac{1}{a}\right), \int_0^\infty \frac{\cos b x}{(a^2+x^2)^3} \partial x = \frac{\pi}{16 a^3} e^{-ab}\left(\frac{3}{a^2} + \frac{3b}{a} + b^2\right), \quad (e)$$

und durch Integration nach b:

$$\int_0^\infty \frac{\sin b x}{x(a^2+x^2)} \partial x = \frac{\pi}{2a} \int_0^b e^{-ab} \partial b = \frac{\pi}{2a^2}(1 - e^{-ab}). \quad (f)$$

Das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a\, tg x) \partial x$$

kommt auf Obiges zurück, wenn man $tg\, x = z$, also $\frac{1}{\cos^2 x} \frac{\partial x}{\partial z} = 1$, $\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{1+z^2}$ setzt, wo dann die Gränzen von z sind 0 und ∞, so dass

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a\, tg x) \partial x = \int_0^\infty \frac{\cos(a z)}{1+z^2} \partial z = \frac{\pi}{2} e^{-a}, \; a > 0. \quad (g)$$

Eine allgemeine Formel zur Ermittlung bestimmter Integrale.

III. Die Resultate in II. setzen uns in Stand, eine ziemlich allgemeine Formel zur Ermittlung des Werthes bestimmter Integrale aufzustellen. Gesetzt nämlich, es sey (a, b, c, . . . reell)

$$F(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots,$$

wobei die Reihe endlich oder unendlich seyn kann, wenn sie nur im letztern Falle konvergent ist [wo dann F (x) ihre Summe ist, vergl. §. 57], so ist wenn man $x = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ setzt:

$$F[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = a + br\cos\varphi + cr^2\cos 2\varphi + \ldots + i(br\sin\varphi + cr^2 \sin 2\varphi + \ldots\ldots),$$

so dass wenn

$$F[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = F_1(r, \varphi) + i F_2(r, \varphi), \quad (n)$$

wo $F_1(r, \varphi)$, $F_2(r, \varphi)$ zwei reelle Funktionen von r und φ sind, man hat

---

$$\int_0^\infty \partial u \int_\alpha^\beta \frac{v f(v)}{u^2+v^2} \cos a u \,\partial v = \frac{\pi}{2} \int_\alpha^\beta e^{-av} f(v) \partial v,$$

wenn α und β positiv sind (damit v es sey). Diese Formel kommt später wieder vor (§. 149, II, 2).

Digitized by Google

$$F_1(r,\varphi) = a + b\,r\cos\varphi + c\,r^2\cos 2\varphi + \ldots,\quad F_2(r,\varphi) = b\,r\sin\varphi + c\,r^2\sin 2\varphi + \ldots,$$

natürlich a, b, c, ... reell vorausgesetzt. Gemäss den Formeln (d) folgt hieraus:

$$\int_0^\infty \frac{F_1(r,\varphi)\,\partial\varphi}{\alpha^2+\varphi^2} = a\int_0^\infty \frac{\partial\varphi}{\alpha^2+\varphi^2} + b\,r\int_0^\infty \frac{\cos\varphi\,\partial\varphi}{\alpha^2+\varphi^2} + \ldots = \frac{\pi}{2\alpha}\left[a + b\,r\,e^{-\alpha} + c\,r^2 e^{-2\alpha} + \ldots\right],$$

$$\int_0^\infty \frac{\varphi\,F_2(r,\varphi)}{\alpha^2+\varphi^2}\,\partial\varphi = b\,r\int_0^\infty \frac{\varphi\sin\varphi}{\alpha^2+\varphi^2}\,\partial\varphi + \ldots = \frac{\pi}{2}\left[b\,r\,e^{-\alpha} + c\,r^2 e^{-2\alpha} + \ldots\right].$$

Nun ist aber $a + b\,r\,e^{-\alpha} + c\,r^2 e^{-2\alpha} + \ldots = F(r\,e^{-\alpha})$, $a = F(0)$, so dass demnach

$$\int_0^\infty \frac{F_1(r,\varphi)\,\partial\varphi}{\alpha^2+\varphi^2} = \frac{\pi}{2\alpha}F(r\,e^{-\alpha}),\quad \int_0^\infty \frac{\varphi\,F_2(r,\varphi)\,\partial\varphi}{\alpha^2+\varphi^2} = \frac{\pi}{2}\left[F(r\,e^{-\alpha}) - F(0)\right]. \quad (n')$$

Setzt man in der letzten Formel (n') $\alpha = 0$, und subtrahirt dann das Resultat von derselben, so erhält man noch:

$$\int_0^\infty \frac{F_2(r,\varphi)\,\partial\varphi}{\varphi} = \frac{\pi}{2}\left[F(r) - F(0)\right],\quad \int_0^\infty \frac{F_2(r,\varphi)}{\varphi(\alpha^2+\varphi^2)}\,\partial\varphi = \frac{\pi}{2\alpha^2}\left[F(r) - F\,r\,e^{-\alpha})\right]. \quad (n'')$$

Es ist sehr leicht, hiernach Integrale zu ermitteln. So ist für $F(x) = l(1+x)$: $F[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = l[1 + r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi]$, so dass wenn $1 + r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi = k + h\,i = m(\cos n + i\sin n)$, man hat $m^2 = k^2 + h^2 = 1 + 2r\cos\varphi + r^2$, $\cos n = \frac{k}{m} = \frac{1+r\cos\varphi}{m}$, $\sin n = \frac{r\sin\varphi}{m}$, folglich $1 + r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi = m\,e^{ni}$, $l(1 + r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi) = l(m) + n\,i$, und mithin

$$\int_0^\infty \frac{l(1 + 2r\cos\varphi + r^2)}{\alpha^2+\varphi^2}\,\partial\varphi = \frac{\pi}{\alpha}\,l(1 + r\,e^{-\alpha}),\ \alpha > 0,$$

wo $r^2 < 1$ seyn muss (damit $1 + 2r\cos\varphi + r^2$ nicht Null werde), was schon daraus folgt, dass sonst $l(1+x)$ nicht in eine unendliche Reihe entwickelt werden kann, von welcher Voraussetzung wir doch ausgiengen.

Setzt man $r = \frac{1}{\varrho}$, so muss $\varrho > 1$ seyn, und man hat

$$\int_0^\infty \frac{l\left[\frac{\varrho^2 + 2\varrho\cos\varphi + 1}{\varrho^2}\right]}{\alpha^2+\varphi^2}\,\partial\varphi = \frac{\pi}{\alpha}\,l(1 + \frac{1}{\varrho}e^{-\alpha}) = \int_0^\infty \frac{l(\varrho^2 + 2\varrho\cos\varphi + 1)}{a^2+\varphi^2}\,\partial\varphi -$$
$$2\,l(\varrho)\int_0^\infty \frac{\partial\varphi}{\alpha^2+\varphi^2} = \int_0^\infty \frac{l(\varrho^2 + 2\varrho\cos\varphi + 1)}{\alpha^2+\varrho^2}\,\partial\varphi - l(\varrho)\frac{\pi}{\alpha},$$

also

$$\int_0^\infty \frac{l(\varrho^2 + 2\varrho\cos\varphi + 1)}{\alpha^2+\varphi^2}\,\partial\varphi = \frac{\pi}{\alpha}\,l(\varrho) + \frac{\pi}{\alpha}\,l\left(1 + \frac{1}{\varrho}e^{-\alpha}\right) = \frac{\pi}{\alpha}\,l(\varrho + e^{-\alpha}),\ \varrho > 1.$$

§. 88.

Die Integrale $\int_0^\pi l(1 + 2a\cos x + a^2)\,\partial x$, $\int_0^\pi \frac{l(\sin x)}{1 + 2a\cos x + a^2}\,\partial x$.

I. Wir wollen das Doppelintegral

$$\int_0^1 \partial z\int_0^\pi \frac{(a\,z + \cos x)\,\partial x}{1 + 2a\,z\cos x + a^2 z^2} = \int_0^\pi \partial x\int_0^1 \frac{(a\,z + \cos x)\,\partial z}{1 + 2a\,z\cos x + a^2 z^2},\ 1 > a > 0,$$

Digitized by Google

in ähnlicher Weise behandeln, wie in §. 87, I geschehen. Da

$$\int\frac{(az+\cos x)\partial z}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{1}{2a}l(1+2az\cos x+a^2z^2),$$

so ist

$$\int_0^\pi\partial x\int_0^1\frac{(az+\cos x)\partial z}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{1}{2a}\int_0^\pi l(1+2a\cos x+a^2)\partial x.$$

Nun ist aber

$$\int\frac{(az+\cos x)\partial x}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{1}{2az}\int\left(1-\frac{1}{1+2az\cos x+a^2z^2}\right)\partial x+$$
$$\frac{1}{2}az\int\frac{\partial x}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{x}{2az}+\frac{a^2z^2-1}{2az}\int\frac{\partial x}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{x}{2az}$$
$$+\frac{a^2z^2-1}{az\sqrt{(1+a^2z^2)^2-4a^2z^2}}\,arc\left(tg=\sqrt{\frac{1+a^2z^2-2az}{1+a^2z^2+2az}}\,tg\frac{x}{2}\right)\ (\text{§. 36, III}).$$

Da aber $a<1$ und $z\overline{<}1$, so ist $(1+a^2z^2)^2-4a^2z^2=(1-a^2z^2)^2$, $\sqrt{(1+a^2z^2)^2-4a^2z^2}=1-a^2z^2$, und eben so $\sqrt{\frac{1+a^2z^2-2az}{1+a^2z^2+2az}}=\frac{1-az}{1+az}$, so dass

$$\int\frac{az+\cos x}{1+2az\cos x+a^2z^2}\partial x=\frac{x}{2az}+\frac{a^2z^2-1}{az(1-a^2z^2)}\,arc\left(tg=\frac{1-az}{1+az}\,tg\frac{x}{2}\right)$$
$$=\frac{x}{2az}-\frac{1}{az}\,arc\left(tg=\frac{1-az}{1+az}\,tg\frac{x}{2}\right),$$

$$\int_0^\pi\frac{az+\cos x}{1+2az\cos x+a^2z^2}\partial x=\frac{\pi}{2az}-\frac{\pi}{2az}=0,$$

mithin

$$\int_0^1\partial z\int_0^\pi\frac{(az+\cos x)\partial x}{1+2az\cos x+a^2z^2}=0,$$

d. h. endlich

$$\int_0^\pi l(1+2a\cos x+a^2)\partial x=0,\ 1>a>0, \qquad \text{(h)}$$

Ist $a>1$, so setze man $a=\frac{1}{\alpha}$, wo $\alpha<1$, und hat:

$$\int_0^\pi l(1+2a\cos x+a^2)\partial x=\int_0^\pi l\left(1+\frac{2\cos x}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right)\partial x=\int_0^\pi l\left(\frac{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}{\alpha^2}\right)\partial x=$$
$$\int_0^\pi l(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)\partial x-l(\alpha^2)\int_0^\pi\partial x,$$

d. h. da $\int_0^\pi l(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)\partial x=0$, $l(\alpha^2)=-l(a^2)$:

$$\int_0^\pi l(1+2a\cos x+a^2)\partial x=\pi l(a^2),\ a>1. \qquad \text{(h')}$$

Setzt man $\pi-x$ für x, so ergibt sich leicht

$$\int_0^\pi l(1-2a\cos x+a^2)\partial x=0,\ 1>a>0,\qquad \int_0^\pi l(1-2a\cos x+a^2)\partial x=\pi l(a^2),\ 1<a<\infty. \qquad \text{(h'')}$$

Für $a=1$ geben alle Formeln:

Digitized by Google

$$\int_0^\pi l(1+\cos x)\,\partial x = -\pi\, l(2) = \int_0^\pi l(1-\cos x)\,\partial x, \tag{i}$$

d. h. da $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$, $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$, wenn man $2x$ für x setzt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l(\cos x)\,\partial x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l(\sin x)\,\partial x = -\frac{\pi}{2}\, l(2). \tag{i'}$$

II. Dasselbe Resultat lässt sich auch auf einem Wege finden, der von dem eben eingeschlagenen wesentlich verschieden ist. Setzt man nämlich für $a^2 < 1$:

$$\int_0^\pi l(1+2a\cos x+a^2)\,\partial x = f(a), \tag{α}$$

so ergibt sich, wenn $\pi - x$ statt x gesetzt wird, ebenfalls

$$\int_0^\pi l(1-2a\cos x+a^2)\,\partial x = f(a). \tag{α'}$$

Durch Addition der beiden Gleichungen (α) und (α') ergibt sich wegen $(1+2a\cos x+a^2) + l(1-2a\cos x+a^2) = l[(1+a^2)^2 - 4a^2\cos^2 x] = l(1+a^4 - 2a^2\cos 2x)$:

$$\int_0^\pi l(1+a^4-2a^2\cos 2x)\,\partial x = 2f(a),$$

und wenn $\frac{x}{2}$ statt x gesetzt wird:

$$\int_0^{2\pi} l(1+a^4-2a^2\cos x)\,\partial x = 4f(a),$$

oder

$$\int_0^\pi l(1+a^4-2a^2\cos x)\,\partial x + \int_\pi^{2\pi} l(1+a^4-2a^2\cos x)\,\partial x = 4f(a),$$

$$\int_0^\pi l(1+a^4-2a^2\cos x)\,\partial x + \int_0^\pi l(1+a^4+2a^2\cos x)\,\partial x = 4f(a),$$

und da

$$\int_0^\pi l(1+a^4-2a^2\cos x)\,\partial x = \int_0^\pi l(1+a^4+2a^2\cos x)\,\partial x:$$

$$\int_0^\pi l(1+a^4+2a^2\cos x)\,\partial x = 2f(a). \tag{β}$$

Aber nach (α) ist

$$\int_0^\pi l(1+a^4+2a^2\cos x)\,\partial x = f(a^2),$$

so dass

$$f(a) = \frac{1}{2} f(a^2),\quad f(a^2) = \frac{1}{2} f(a^4), \ldots\ldots$$

woraus

$$f(a) = \frac{1}{2^n} f(a^{2^n}). \tag{γ}$$

Da nun $a < 1$, und die Gleichung (γ) für alle n richtig ist, also auch für $n = \infty$, so folgt daraus

$$f(a) = Gr\,\frac{1}{2^n} f(a^{2^n}),\quad (Gr\, a^{2^n} = 0),$$

d. h. da $f(0) = \int_0^\pi l(1)\,\partial x = 0$, und $Gr\,\frac{1}{2^n}$ ebenfalls 0, es ist $f(a) = 0$, und mithin

Digitized by Google

$$\int_0^\pi l(1+2a\cos x+a^2)\partial x=0,\ a^2<1. \qquad (h)$$

III. Es ist, immer unter der Voraussetzung $1>az>0$;

$$\int_0^\pi \frac{\partial x}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{\pi}{1-a^2z^2},$$

also

$$\int_0^\pi \partial x\int_0^1 \frac{az\,\partial z}{1+2az\cos x+a^2z^2}=a\pi\int_0^1\frac{z\,\partial z}{1-a^2z^2}=-\frac{\pi}{2a}l(1-a^2),\ a\gtrless{0 \atop 1}, \qquad (k)$$

mithin da (I)

$$\int_0^\pi \partial x\int_0^1 \frac{(az+\cos x)\partial z}{1+2az\cos x+a^2z^2}=0,$$

so ist

$$\int_0^\pi \partial x\int_0^1 \frac{\cos x\,\partial z}{1+az\cos x+a^2z^2}=\int_0^1\partial z\int_0^\pi\frac{\cos x\,\partial x}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{\pi}{2a}l(1-a^2). \qquad (\delta)$$

Aber es ist, da $\sin x>0$:

$$\int\frac{\partial z}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{1}{a\sin x}arc\left(tg=\frac{az+\cos x}{\sin x}\right)+C,$$

$$\int_0^1\frac{\partial z}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{1}{a\sin x}\left[arc\left(tg=\frac{a+\cos x}{\sin x}\right)-arc(tg=cotg\,x)\right],$$

so dass aus (δ) folgt:

$$\int_0^\pi\frac{\cos x}{\sin x}\left[arc\left(tg=\frac{a+\cos x}{\sin x}\right)-arc(tg=cotg\,x)\right]\partial x=\frac{\pi}{2}l(1-a^2). \qquad (k')$$

Nach §. 27 erhält man [wenn man beachtet, dass $arc(tg=cotg\,x)=\frac{\pi}{2}-x$]:

$$\int\frac{\cos x}{\sin x}\left[arc\left(tg=\frac{a+\cos x}{\sin x}\right)-arc(tg=cotg\,x)\right]\partial x=l(\sin x)\times$$
$$\left[arc\left(tg=\frac{a+\cos x}{\sin x}\right)-arc(tg=cotg\,x)\right]-$$
$$-\int l(\sin x)\left[\frac{-1-a\cos x}{1+2a\cos x+a^2}+1\right]\partial x=l(\sin x)\left[arc\left(tg=\frac{a+\cos x}{\sin x}\right)-arc(tg=cotg\,x)\right]-$$
$$a\int\frac{(a+\cos x)\,l(\sin x)}{1+2a\cos x+a^2}\partial x.$$

Lässt man hier x von 0 bis π gehen, so verlaufen die Grössen $arc\left(tg=\frac{a+\cos x}{\sin x}\right)$, $arc(tg=cotg\,x)$ stetig und zwar von $\frac{\pi}{2}$ bis $-\frac{\pi}{2}$ (§. 43), so dass

$$\int_0^\pi\frac{\cos x}{\sin x}\left[arc\left(tg=\frac{a+\cos x}{\sin x}\right)-arc\,tg=cotg\,x)\right]\partial x=-\int_0^\pi\frac{(a^2+a\cos x)\,l(\sin x)}{1+2a\cos x+a^2}\partial x^*.$$

* Es ist (§. 32, IV), da $1+\frac{a+\cos x}{\sin x}cotg\,x=\frac{1+a\cos x}{\sin^2 x}$ von $x=0$ bis $x=\pi$ positiv ist, immer $arc\left(tg=\frac{a+\cos x}{\sin x}\right)-arc(tg=cotg\,x)=arc\left(tg=\frac{a\sin x}{1+a\cos x}\right)$, so dass

Digitized by Google

Aber

$$2\frac{a^2+a\cos x}{1+2a\cos x+a^2}=1-\frac{1-a^2}{1+2a\cos x+a^2},$$

also

$$\int_0^\pi \frac{(a^2+a\cos x)\,l(\sin x)\,\partial x}{1+2a\cos x+a^2}=\frac{1}{2}\int_0^\pi l(\sin x)\,\partial x-\frac{1-a^2}{2}\int_0^\pi \frac{l(\sin x)\,\partial x}{1+2a\cos x+a^2},$$

mithin da $\int_0^\pi l(\sin x)\,\partial x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} l(\sin x)\,\partial x=-\pi\, l(2)$:

$$\frac{\pi}{2}l(1-a^2)=\frac{\pi}{2}l(2)+\frac{1-a^2}{2}\int_0^\pi \frac{l(\sin x)}{1+2a\cos x+a^2}\,\partial x,$$

$$\int_0^\pi \frac{l(\sin x)\,\partial x}{1+2a\cos x+a^2}=\frac{\pi}{1-a^2}\,l\left(\frac{1-a^2}{2}\right),\ a\gtrless{}^{0}_{1}. \quad \text{(l)}$$

Ist $a>1$, so erhält man wie oben:

$$\int_0^\pi \frac{l(\sin x)\,\partial x}{1+2a\cos x+a^2}=\frac{\pi}{a^2-1}\,l\left(\frac{a^2-1}{2a^2}\right). \quad \text{(l')}$$

Setzt man $\pi-x$ für x, so ergibt sich noch

$$\int_0^\pi \frac{l(\sin x)\,\partial x}{1-2a\cos x+a^2}=\frac{\pi}{1-a^2}\,l\left(\frac{1-a^2}{2}\right),\quad \int_0^\pi \frac{l(\sin x)\,\partial x}{1-2a\cos x+a^2}=\frac{\pi}{a^2-1}\,l\left(\frac{a^2-1}{2a^2}\right). \quad \text{(m)}$$

$$1>a>0 \qquad\qquad 1<a<\infty.$$

§. 89.

Integrale, deren Werth sich sprungweise ändert.

I. Bereits in §. 85, III haben wir gesehen, dass das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin(bx)}{x}\,\partial x=\frac{\pi}{2},$$

---

man statt des ersten Theils im obigen Integrale auch schreiben kann: $l(\sin x)\ arc\left(tg=\frac{a\sin x}{1+a\cos x}\right)=\frac{a\sin x\, l(\sin x)}{1+a\cos x}\ \frac{arc\left(tg=\frac{a\sin x}{1+a\cos x}\right)}{\frac{a\sin x}{1+a\cos x}}$. Setzt man $\sin x=z$, $\cos x=\omega$, so ist diess auch $\frac{a z\, l(z)}{1+a\omega}\ \frac{arc\left(tg=\frac{a z}{1+a\omega}\right)}{\frac{a z}{1+a\omega}}$. Für $x=0$ ist $z=0$ und $\omega=1$; für $x=\pi$ aber $z=0$, $\omega=-1$; ferner (§. 23, II) für $z=0$: $z\,l(z)=0$ und aus §. 57, VI zieht man leicht, dass $\frac{arc\left(tg=\frac{a z}{1+a\omega}\right)}{\frac{a z}{1+a\omega}}$ für $z=0$ gleich 1 ist. Demnach ist an den Gränzen $x=0$ und $x=\pi$ die Grösse $l(\sin x)\left[arc\left(tg=\frac{a+\cos x}{\sin x}\right)-arc\,(tg=cotg\,x)\right]$ Null, wie diess im Texte angenommen wurde.

Digitized by Google

wenn $b > 0$; für $b = 0$ ist es offenbar $= 0$, für $b < 0$ aber $-\frac{\pi}{2}$, da für $b = -b'$:

$$\int_0^\infty \frac{\sin b x}{x} \partial x = -\int_0^\infty \frac{\sin (b' x)}{x} \partial x = -\frac{\pi}{2}.$$

Nun ist $\sin(az)\cos(xz) = \frac{1}{2}\sin(a+x)z + \frac{1}{2}\sin(a-x)z$; demnach

$$\int_0^\infty \frac{\sin(az)\cos(xz)}{z}\partial z = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(a+x)z}{z}\partial z + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(a-x)z}{z}\partial z.$$

Von diesen Integralen ist das erste $= \frac{\pi}{2}$, wenn $a + x > 0$, d. h. $x > -a$; 0, wenn $a+x=0$ oder $x = -a$; $-\frac{\pi}{2}$, wenn $a + x < 0$, d. h. $x < -a$; das zweite ist $\frac{\pi}{2}$, wenn $a - x > 0$, d. h. $x < a$; 0, wenn $a - x = 0$, $x = a$; $-\frac{\pi}{2}$, wenn $a - x < 0$, d. h. $x > a$. Daraus folgt nun leicht:

$$\int_0^\infty \frac{\sin a z \cos x z}{z}\partial z = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } -a < x < +a, \\ 0, & \text{wenn } x < -a, \\ 0, & \text{wenn } x > +a, \\ \frac{\pi}{4}, & \text{wenn } x = \pm a. \end{cases} \qquad a > 0.$$

Ganz eben so ist

$$\int_0^\infty \frac{\sin x z \cos a z}{z}\partial z = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \text{wenn } -\infty < x < -a, \\ -\frac{\pi}{4}, & \text{wenn } x = -a, \\ 0, & \text{wenn } -a < x < +a, \\ \frac{\pi}{4}, & \text{wenn } x = +a, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } +\infty > x > +a. \end{cases}$$

II. Da ferner

$$\sin x z \sin a z \sin b z = \frac{1}{4}\sin(x+a-b)z + \frac{1}{4}\sin(x+b-a)z - \frac{1}{4}\sin(x+a+b)z - \frac{1}{4}\sin(x-a-b)z,$$

also

$$\int_0^\infty \frac{\sin x z \sin a z \sin b z}{z}\partial z = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\sin(x+a-b)z}{z}\partial z + \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\sin(x+b-a)z}{z}\partial z - \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\sin(x+a+b)z}{z}\partial z - \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\sin(x-a-b)z}{z}\partial z$$

und da ferner von diesen Integralen das erste $\frac{\pi}{2}$ ist für $x > -(a-b)$, 0 für $x = -(a-b)$, $-\frac{\pi}{2}$ für $x < -(a-b)$, u. s. w., so folgt daraus, dass wenn $a > b > 0$:

Digitized by Google

$$\int_0^\infty \frac{\sin xz \sin az \sin bz}{z}\partial z = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -(a+b), \\ -\frac{\pi}{8}, & x = -(a+b), \\ -\frac{\pi}{4}, & -(a+b) < x < -(a-b), \\ -\frac{\pi}{8}, & x = -(a-b), \\ 0, & -(a-b) < x < a-b \\ +\frac{\pi}{8}, & x = a-b, \\ +\frac{\pi}{4}, & a-b < x < a+b, \\ +\frac{\pi}{8}, & x = a+b, \\ 0, & a+b < x < +\infty. \end{cases}$$

Daraus für $a = b$:

$$\int_0^\infty \frac{\sin xz \sin^2 az}{z}\partial z = \begin{cases} 0, & \text{wenn } -\infty < x < -2a, \\ -\frac{\pi}{8}, & \text{wenn } x = -2a, \\ -\frac{\pi}{4}, & \text{wenn } -2a < x < 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0, \\ +\frac{\pi}{4}, & 0 < x < 2a, \\ +\frac{\pi}{8}, & x = 2a, \\ 0, & 2a < x < \infty, \end{cases}$$

wie sich leicht auch daraus findet, dass

$$\sin xz \sin^2 az = \frac{1}{2}\sin xz - \frac{1}{4}\sin(x+2a)z - \frac{1}{4}\sin(x-2a)z.$$

Wie man in dieser Weise weiter gehen kann, ist klar. Wir werden von diesen Formeln später mehrfach Gebrauch machen; für jetzt mag es an ihrer Ableitung genügen.

Druck der J. B. Metzler'schen Buchdruckerei in Stuttgart.

Digitized by Google

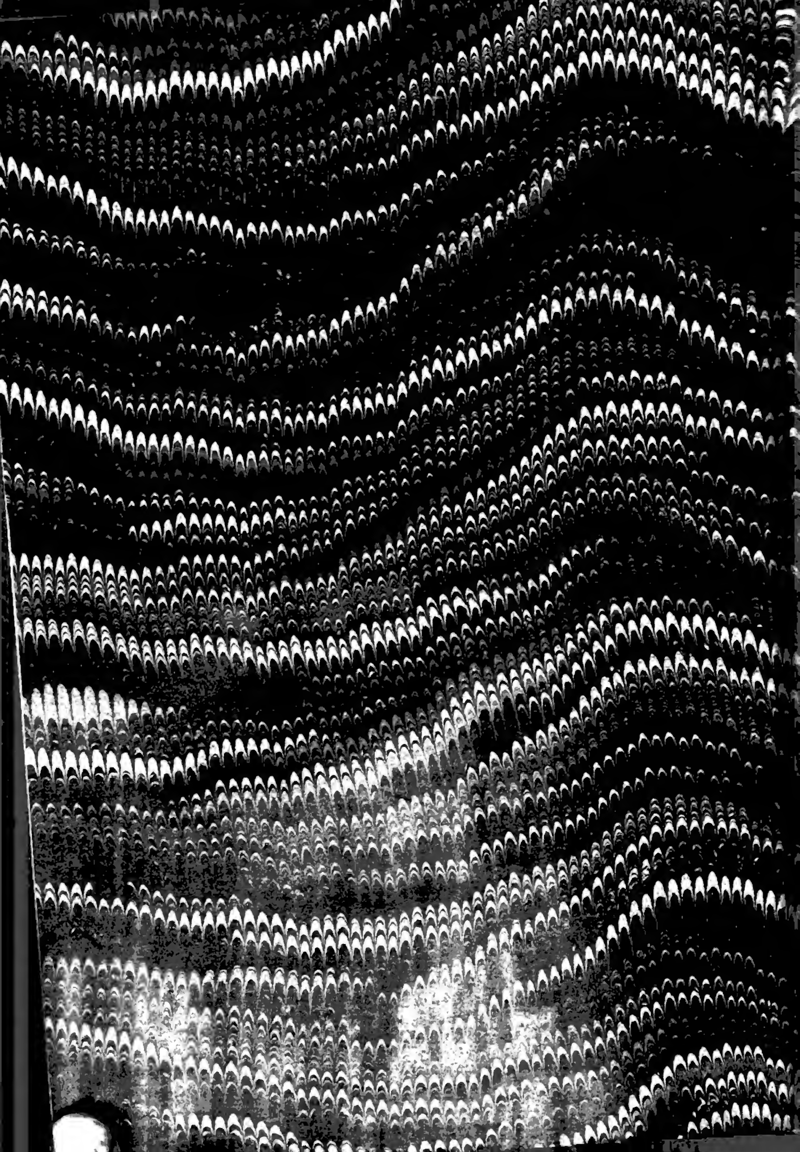


Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google




UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06828 3855


Digitized by Google